

Самостоятельная работа (Семинар 9)

Задача 3. Случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ имеют следующие числовые характеристики: $M[\xi_1(\omega)] = -0,5$, $D[\xi_1(\omega)] = 3$, $M[\xi_2(\omega)] = 1$, $D[\xi_2(\omega)] = 2,9$, $cov[\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)] = 2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариацию случайных величин $\eta_1(\omega) = 3\xi_1(\omega) - 2\xi_2(\omega)$ и $\eta_2(\omega) = 5\xi_2(\omega) - \xi_1(\omega)$.

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M[\eta_1(\omega)] &= M[3\xi_1(\omega) - 2\xi_2(\omega)] = 3M[\xi_1(\omega)] - 2M[\xi_2(\omega)] = \\ &= 3 \cdot (-0,5) - 2 \cdot 1 = -3,5; \end{aligned}$$

$$M[\eta_2(\omega)] = 5,5.$$

Вычислим дисперсию:

$$\begin{aligned} D[\eta_1(\omega)] &= 3^2 D[\xi_1(\omega)] + (-2)^2 D[\xi_2(\omega)] + 2 \cdot 3 \cdot (-2) cov[\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)] = \\ &= 9 \cdot 3 + 4 \cdot 2,9 - 12 \cdot 2 = 14,6; \quad D[\eta_2(\omega)] = 50,5. \end{aligned}$$

Применим следующие свойства:

- $cov[\eta_1(\omega), \eta_2(\omega)] = M[\eta_1(\omega)\eta_2(\omega)] - M[\eta_1(\omega)] \cdot M[\eta_2(\omega)];$
- $D[\xi(\omega)] = M[\xi^2(\omega)] - m_\xi^2.$

Вычислим

$$\begin{aligned} M[\eta_1(\omega)\eta_2(\omega)] &= M[(3\xi_1(\omega) - 2\xi_2(\omega))(5\xi_2(\omega) - \xi_1(\omega))] = \\ &= 17M[\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] - 3M[\xi_1^2(\omega)] - 10M[\xi_2^2(\omega)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{а) } M[\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] &= cov[\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)] + M[\xi_1(\omega)] \cdot M[\xi_2(\omega)] = \\ &= 2 + (-0,5) \cdot 1 = 1,5; \end{aligned}$$

$$\text{б) } M[\xi_1^2(\omega)] = D[\xi_1(\omega)] + M^2[\xi_1(\omega)] = 3 + (-0,5)^2 = 3,25;$$

$$M[\xi_2^2(\omega)] = D[\xi_2(\omega)] + M^2[\xi_2(\omega)] = 2,9 + 1 = 3,9;$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M[\eta_1(\omega)\eta_2(\omega)] &= 17M[\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] - 3M[\xi_1^2(\omega)] - 10M[\xi_2^2(\omega)] = \\ &= 17 \cdot 1,5 - 3 \cdot 3,25 - 10 \cdot 3,9 = -23,25. \end{aligned}$$

В результате

$$\begin{aligned} cov[\eta_1(\omega), \eta_2(\omega)] &= M[\eta_1(\omega)\eta_2(\omega)] - M[\eta_1(\omega)] \cdot M[\eta_2(\omega)] = \\ &= -23,25 - (-3,5) \cdot 5,5 = -4. \end{aligned}$$