Лекция-Семинар

Числовые характеристики случайных величин

Приведем основные теоретические сведения, доказательства сформулированных свойств можно найти в [1,2].

§1 Математическое ожидание и дисперсия

Математическим ожиданием $M[\xi(\omega)]$ *дискретной случайной величины* $\xi(\omega)$ называют

$$M[\xi(\omega)] = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P\{\xi(\omega) = x_k\}.$$

Замечание. Если множество возможных значений дискретной случайной величины $\xi(\omega)$ счетно, то предполагается, что ряд сходится абсолютно (в противном случае математическое ожидание не существует).

Математическим ожиданием $M[\xi(\omega)]$ *непрерывной случайной величины* $\xi(\omega)$ называют

$$M[\xi(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\xi(x)dx.$$

Замечание. Предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно (в противном случае математическое ожидание не существует).

Свойства математического ожидания

1. Если случайная величина $\xi(\omega)$ принимает всего одно значение, равное C, с вероятностью 1, то $M[C] = C$.
2. $M[\alpha\xi(\omega) + \beta] = \alpha M[\xi(\omega)] + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $M[\xi(\omega) + \eta(\omega)] = M[\xi(\omega)] + M[\eta(\omega)]$.
4. Если случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы, то
$$M[\xi(\omega) \cdot \eta(\omega)] = M[\xi(\omega)] \cdot M[\eta(\omega)].$$

Дисперсией $D[\xi(\omega)]$ *случайной величины* $\xi(\omega)$ называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины $\xi(\omega)$ от ее среднего значения

$$D[\xi(\omega)] = M\left[\{\xi(\omega) - m_\xi\}^2\right], \quad m_\xi \equiv M[\xi(\omega)].$$

Формулы для вычисления дисперсии

а) дискретной случайной величины:

$$D[\xi(\omega)] = \sum_{k=1}^{\infty} \{x_k - m_\xi\}^2 \cdot P\{\xi(\omega) = x_k\}.$$

б) непрерывной случайной величины:

$$D[\xi(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x - m_\xi\}^2 \cdot f_\xi(x)dx.$$

Свойства дисперсии

1. Если случайная величина $\xi(\omega)$ принимает всего одно значение, равное C, с вероятностью 1, то $D[C] = 0$.
2. $D[\alpha\xi(\omega) + \beta] = \alpha^2 D[\xi(\omega)],\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $D[\xi(\omega)] = M[\xi^2(\omega)] - m_\xi^2$.
4. Если случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы, то
$$D[\xi(\omega) + \eta(\omega)] = D[\xi(\omega)] + D[\eta(\omega)].$$

Таблица 1.

Закон распределения случайной величины $\xi(\omega)$	$M[\xi(\omega)]$	$D[\xi(\omega)]$
1. Биномиальное распределение: $P\{\xi(\omega) = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}.$	pn	npq
2. Геометрическое распределение: $P\{\xi(\omega) = k\} = q^k p, \quad k = 0,1, \dots.$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
3. Распределение Пуассона: $P\{\xi(\omega) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} exp\{-\lambda\},$ $k = 0,1, \dots;\ \lambda > 0.$	λ	λ
4. Равномерное распределение: $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
5. Экспоненциальное распределение: $f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda exp\{-\lambda x\}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ $\lambda > 0.$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
6. Нормальное распределение: $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\},\ x \in \mathbb{R}$	m	σ^2

Примеры решения задач

Пример 1. Дискретная случайная величина $\xi(\omega)$ может принимать только три значения: $x_1 = 1$, x_2 и x_3, причем $x_1 < x_2 < x_3$. Вероятности того, что $\xi(\omega)$ примет значения x_1 и x_2 соответственно равны 0,3 и 0,2. Найти ряд распределения случайной величины $\xi(\omega)$, если $m_\xi = 2{,}2$ и $D[\xi(\omega)] = 0{,}76$.

Решение. Запишем ряд распределения дискретной случайной величины $\xi(\omega)$:

$\xi(\omega)$	$x_1 = 1$	x_2	x_3
$P\{\xi(\omega) = x_k\}$	0,3	0,2	p_3

1. Из условия

$$\sum_{k=1}^{3} p_k = 1$$

получаем уравнение:

$$0{,}3 + 0{,}2 + p_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad p_3 = 0{,}5.$$

2. По условию задачи $m_\xi = 2{,}2$

$$m_\xi = \sum_{k=1}^{3} x_k \cdot p_k.$$

В результате приходим к уравнению:

$$1 \cdot 0{,}3 + x_2 \cdot 0{,}2 + x_3 \cdot 0{,}5 = 2{,}2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2 \cdot x_2 + 0{,}5 \cdot x_3 = 1{,}9.$$

3. По условию задачи $D[\xi(\omega)] = 0{,}76$

$$D[\xi(\omega)] = M[\xi^2(\omega)] - m_\xi^2 = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 \cdot p_k - m_\xi^2.$$

Отсюда получаем соотношение:

$$1^2 \cdot 0{,}3 + x_2^2 \cdot 0{,}2 + x_3^2 \cdot 0{,}5 - 2{,}2^2 = 0{,}76$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}2 \cdot x_2^2 + 0{,}5 \cdot x_3^2 = 5{,}3.$$

Таким образом, получена система уравнений относительно x_2 и x_3:

$$\begin{cases} 0{,}2 \cdot x_2 + 0{,}5 \cdot x_3 = 1{,}9: \\ 0{,}2 \cdot x_2^2 + 0{,}5 \cdot x_3^2 = 5{,}3. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$ (с учетом того, что $x_2 < x_3$).

Ряд распределения дискретной случайной величины $\xi(\omega)$ примет вид:

$\xi(\omega)$	1	2	3
$P\{\xi(\omega) = x_k\}$	0,3	0,2	0,5

Пример 2. Непрерывная случайная величина $\xi(\omega)$ распределена по закону «прямоугольного треугольника» в интервале $(0,1)$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2(1-x), & x \in (0,1); \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$$

Найти m_ξ и $D[\xi(\omega)]$.

Решение. Найдем математическое ожидание случайной величины $\xi(\omega)$:

$$m_\xi = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)dx = \frac{1}{3}.$$

Вычислим дисперсию по формуле

$$D[\xi(\omega)] = M[\xi^2(\omega)] - m_\xi^2.$$

Поскольку

$$M[\xi^2(\omega)] = \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x)dx = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad D[\xi(\omega)] = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Самостоятельная работа

Задача 1. Дискретная случайная величина $\xi(\omega)$ может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что $\xi(\omega)$ примет значение x_1 равна 0,2. Найти ряд распределения случайной величины $\xi(\omega)$, если $m_\xi = 2{,}6$ и $D[\xi(\omega)] = 0{,}64$.

Задача 2. Непрерывная случайная величина $\xi(\omega)$ распределена по закону «равнобедренного треугольника» на отрезке $[-1,1]$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \le x < 0; \\ 1-x, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & x < -1 \text{ и } x > 1. \end{cases}$$

Найти m_ξ и $D[\xi(\omega)]$.

---

§2 Ковариация и коэффициент корреляции

Ковариацией $cov[\xi(\omega), \eta(\omega)]$ *случайных величин* $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ называют число, равное математическому ожиданию произведения центрированных случайных величин

$$cov[\xi(\omega), \eta(\omega)] = M\left[\left\{\xi(\omega) - m_\xi\right\} \cdot \left\{\eta(\omega) - m_\eta\right\}\right].$$

Свойства ковариации

1. $cov[\xi(\omega), \xi(\omega)] = D[\xi(\omega)]$.
2. Если случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы, то
$$cov[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 0.$$
3. Если $\eta_k(\omega) = \alpha_k \xi_k(\omega) + \beta_k,\ k = 1,2$, то
$$cov[\eta_1(\omega), \eta_2(\omega)] = \alpha_1 \alpha_2 cov[\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)].$$
4. $cov[\xi(\omega), \eta(\omega)] = M[\xi(\omega)\eta(\omega)] - M[\xi(\omega)] \cdot M[\eta(\omega)]$.
5. $D[\alpha\xi(\omega) + \beta\eta(\omega) + \gamma] = \alpha^2 D[\xi(\omega)] + \beta^2 D[\eta(\omega)] +$
$$+2\alpha\beta cov[\xi(\omega), \eta(\omega)], \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Коэффициентом корреляции $\rho_{\xi\eta}$ *случайных величин* $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ называют число

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{cov[\xi(\omega), \eta(\omega)]}{\sqrt{D[\xi(\omega)] \cdot D[\eta(\omega)]}}.$$

Свойства коэффициента корреляции

1. $\left|\rho_{\xi\eta}\right| \leq 1$.
2. $\rho_{\xi\eta} = \pm 1 \ \Leftrightarrow \ \eta(\omega) = \alpha\xi(\omega) + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
$$\left(\rho_{\xi\eta} = +1, \text{если } \alpha > 0;\ \rho_{\xi\eta} = -1, \text{если } \alpha < 0\right).$$

Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ называют *некоррелированными*, если

$$cov[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 0.$$

Замечание. Из некоррелированности случайных величин не следует их независимость.

Пример 3. Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ имеют следующие числовые характеристики: $m_\xi = -5$, $D[\xi(\omega)] = 0{,}5$, $m_\eta = 2$, $D[\eta(\omega)] = 0{,}4$, $cov[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 0{,}2$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\varepsilon(\omega) = 4\xi(\omega) - 5\eta(\omega) + 25$.

Решение. Применяя свойства математического ожидания 2 и 3, находим

$$M[\varepsilon(\omega)] = M[4\xi(\omega) - 5\eta(\omega) + 25] = 4m_\xi - 5m_\eta + 25 = -5.$$

Далее применим свойство 5 дисперсии

$$D[\varepsilon(\omega)] = D[4\xi(\omega) - 5\beta\eta(\omega) + 25] = 4^2 D[\xi(\omega)] + (-5)^2 D[\eta(\omega)] + \\ +2 \cdot 4 \cdot (-5) cov[\xi(\omega), \eta(\omega)] = 10.$$

Самостоятельная работа

Задача 3. Случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ имеют следующие числовые характеристики: $M[\xi_1(\omega)] = -0{,}5$, $D[\xi_1(\omega)] = 3$, $M[\xi_2(\omega)] = 1$, $D[\xi_2(\omega)] = 2{,}9$, $cov[\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)] = 2$. Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариацию случайных величин $\eta_1(\omega) = 3\xi_1(\omega) - 2\xi_2(\omega)$ и $\eta_2(\omega) = 5\xi_2(\omega) - \xi_1(\omega)$.

---

§3 Числовые характеристики функции случайной величины

Пусть $f_\xi(x) -$ плотность распределения непрерывной случайной величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega) = \varphi\big(\xi(\omega)\big)$. Тогда

$$M[\eta(\omega)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f_\xi(x) dx.$$

$$D[\eta(\omega)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) \cdot f_\xi(x) dx - m_\eta^2.$$

Пример 4. Ребро куба $\xi(\omega) -$ случайная величина, распределенная равномерно на отрезке $[1,2]$. Найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

Решение. Обозначим $\eta(\omega) -$ объем куба. Очевидно, что $\eta(\omega) = \xi^3(\omega)$

$$\Rightarrow \quad y = \varphi(x) = x^3, \qquad x \in [1,2].$$

Плотность распределения случайной величины $\xi(\omega)$ имеет вид

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-1}, & x \in [1,2]; \\ 0, & x \notin [1,2]\,; \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in [1,2]; \\ 0, & x \notin [1,2]\,. \end{cases}$$

Тогда

$$M[\eta(\omega)] = \int\limits_1^2 x^3 \cdot 1 dx = \frac{2^4 - 1}{4} = \frac{15}{4},$$

$$D[\eta(\omega)] = \int_1^2 (x^3)^2 \cdot 1dx - m_\eta^2 = \frac{2^7 - 1}{7} - \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{457}{112}.$$

Самостоятельная работа

Задача 4. По сторонам прямого угла xOy скользит линейка AB длины l, занимая случайное положение, причем все значения абсциссы $X(\omega)$ ее конца A на оси Ox в пределах от O до l равновероятны. Найти математическое ожидание расстояния $R(\omega)$ от начала координат до линейки.

Список используемой литературы

1. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. (Сер. Математика в техническом университете, Вып. XVI).
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Физматлит, 2005.

Ответы (Самостоятельная работа)

1. Ряд распределения дискретной случайной величины $\xi(\omega)$ имеет вид:

$\xi(\omega)$	1	3
$P\{\xi(\omega) = x_k\}$	0,2	0,8

2. $m_\xi = 0$, $D[\xi(\omega)] = \frac{1}{6}$.
3. $M[\eta_1(\omega)] = -3{,}5$, $D[\eta_1(\omega)] = 14{,}6$,
   $M[\eta_2(\omega)] = 5{,}5$, $D[\eta_2(\omega)] = 50{,}5$, $cov[\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)] = -4$.
4. $M[R(\omega)] = \frac{l}{3}$; случайная величина $X(\omega)$ равномерно распределена на отрезке $[0, l]$.