Лекция-Семинар

Лекция 6. Предельные теоремы теории вероятностей

- Первое и второе неравенства Чебышева.
- Закон больших чисел в форме Чебышева.
- Закон больших чисел в форме Бернулли.
- Центральная предельная теорема.
- Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

§1 Первое и второе неравенства Чебышева

Теорема 1. Пусть случайная величина $\xi(\omega)$ принимает неотрицательные значения, и для нее определено математическое ожидание m_ξ. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ имеет место следующее неравенство (*первое неравенство Чебышева*):

$$P\{\xi(\omega) \geq \varepsilon\} \leq \frac{m_\xi}{\varepsilon}.$$

Доказательство. По условию теоремы $f_\xi(x) \equiv 0 \ \ \forall x < 0 \quad \Rightarrow$

$$m_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int_{0}^{\varepsilon} x f_\xi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f_\xi(x)dx \geq$$

$$\geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f_\xi(x)dx \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \varepsilon \cdot P\{\xi(\omega) \geq \varepsilon\}.$$

Откуда следует, что

$$P\{\xi(\omega) \geq \varepsilon\} \leq \frac{m_\xi}{\varepsilon}.$$

Замечание. Неравенство следует применять в том случае, когда $\varepsilon > m_\xi$.

Теорема 2. Пусть для случайной величины $\xi(\omega)$ определены математическое ожидание m_ξ и дисперсия σ_ξ^2. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ имеет место следующее неравенство (*второе неравенство Чебышева*):

$$P\{|\xi(\omega) - m_\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma_\xi^2}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Применим 1-е неравенство Чебышева:

$$P\{|\xi(\omega) - m_\xi| \geq \varepsilon\} = P\left\{|\xi(\omega) - m_\xi|^2 \geq \varepsilon^2\right\} \leq \frac{M\left[|\xi(\omega) - m_\xi|^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_\xi^2}{\varepsilon^2}.$$

Пример. Для случайной величины $\xi(\omega)$ оценить сверху вероятность того, что $\xi(\omega)$ отклонится от своего математического ожидания m_ξ не менее чем на $3\sigma_\xi$:

$$P\{|\xi(\omega)-m_\xi| \geq 3\sigma_\xi\} \leq \frac{\sigma_\xi^2}{(3\sigma_\xi)^2} = \frac{1}{9}.$$

В большинстве случаев вероятность того, что случайная величина $\xi(\omega)$ выйдет за пределы интервала $(m_\xi - 3\sigma_\xi, m_\xi + 3\sigma_\xi)$ значительно меньше $1/9$.

Например, если $\xi(\omega) \sim N(m, \sigma^2)$, то

$$P\{|\xi(\omega)-m| \geq 3\sigma\} = 1 - P\{m-3\sigma < \xi(\omega) < m+3\sigma\} =$$
$$= 1 - [\Phi_0(3) - \Phi_0(-3)] = 1 - 2\Phi_0(3) \approx 0{,}0028.$$

На практике применяется «правило 3σ»: если закон распределения случайной величины $\xi(\omega)$ не известен, а известны только математическое ожидание m_ξ и дисперсия σ_ξ^2, то интервал $(m_\xi - 3\sigma_\xi, m_\xi + 3\sigma_\xi)$ считают практически возможным для случайной величины $\xi(\omega)$.

Примеры решения задач

Задача 1. Среднее потребление электроэнергии в апреле в некотором населенном пункте составляет $360 \cdot 10^3$ кВт · ч.

1) Оцените с помощью 1-го неравенства Чебышева вероятность того, что потребление электроэнергии в апреле текущего года в этом населенном пункте превысит $500 \cdot 10^3$ кВт · ч.
2) Оцените с помощью 2-го неравенства Чебышева эту вероятность, если известно, что среднее квадратичное отклонение потребления электроэнергии в апреле равно $40 \cdot 10^3$ кВт · ч.

Решение. Пусть $\xi(\omega)-$ количество потребляемой электроэнергии в апреле текущего года.

1) Известны: $m_\xi = 360 \cdot 10^3$ кВт · ч, $\varepsilon = 500 \cdot 10^3$ кВт · ч.

Применим 1-е неравенство Чебышева:

$$P\{\xi(\omega) \geq \varepsilon\} \leq \frac{m_\xi}{\varepsilon} = \frac{360 \cdot 10^3}{500 \cdot 10^3} = 0{,}72.$$

2) Известны: $m_\xi = 360 \cdot 10^3$ кВт · ч, $\varepsilon = 500 \cdot 10^3$ кВт · ч и $\sigma_\xi = 40 \cdot 10^3$ кВт · ч.

Применим 2-е неравенство Чебышева:

$$P\{\xi(\omega) \geq \varepsilon\} = P\{\xi(\omega) - m_\xi \geq \varepsilon - m_\xi\} < P\{|\xi(\omega) - m_\xi| \geq \varepsilon - m_\xi\} \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_\xi^2}{(\varepsilon - m_\xi)^2} = \left[\frac{40 \cdot 10^3}{(500 - 360) \cdot 10^3}\right]^2 = \frac{4}{49}.$$

Задача 2. Вероятность появления некоторого события в каждом из 800 независимых испытаний равна $0{,}25$. Оцените вероятность того, что случайная величина $\xi(\omega)$ – появление этого события, примет значения в пределах от 150 до 250.

Решение. Вычислим математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины $\xi(\omega)$, распределенной по биномиальному закону:

$$m_\xi = np = 800 \cdot 0{,}25 = 200;$$

$$\sigma_\xi^2 = npq = 800 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 150.$$

Определим значение ε: $\varepsilon = 250 - m_\xi = 50.$

Применим 2-е неравенство Чебышева:

$$P\{150 < \xi(\omega) < 250\} = P\{|\xi(\omega) - m_\xi| < \varepsilon\} =$$

$$= 1 - P\{|\xi(\omega) - m_\xi| \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma_\xi^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{150}{50^2} = 0{,}94.$$

§2 Закон больших чисел в форме Чебышева

Теорема 3. Если последовательность $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \cdots, \xi_n(\omega), \cdots$ независимых случайных величин такова, что существуют $M[\xi_k(\omega)] = m_k$ и $D[\xi_k(\omega)] = \sigma_k^2 \leq C < \infty$, то $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину

$$\eta(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)$$

и найдем числовые характеристики $\eta(\omega)$:

$$M[\eta(\omega)] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[\xi_k(\omega)] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k;$$

$$D[\eta(\omega)] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D[\xi_k(\omega)] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 \le \frac{1}{n^2}Cn = \frac{C}{n}.$$

Применим 2-е неравенство Чебышева:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}m_k\right| < \varepsilon\right\} = P\{|\eta(\omega) - M[\eta(\omega)]| < \varepsilon\} =$$

$$= 1 - P\{|\eta(\omega) - M[\eta(\omega)]| \ge \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D[\eta(\omega)]}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \to 1,$$

при $n \to \infty$.

Примеры решения задач

Задача 3. Дана последовательность $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \cdots, \xi_n(\omega), \cdots$ независимых дискретных случайных величин. Ряд распределения случайной величины $\xi_k(\omega)$ имеет вид:

$\xi_k(\omega)$	$-\sqrt{k}$	0	$\sqrt{k}$
P	$\frac{1}{2k}$	$1 - \frac{1}{k}$	$\frac{1}{2k}$

Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел в форме Чебышева.

<u>Решение.</u> Найдем дисперсию случайной величины $\xi_k(\omega)$.

Поскольку,

$$M[\xi_k(\omega)] = (-\sqrt{k})\frac{1}{2k} + 0\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \sqrt{k}\frac{1}{2k} = 0,$$

то, применяя формулу,

$$D[\xi_k(\omega)] = M[\xi_k^2(\omega)] - m_{\xi_k}^2,$$

находим

$$D[\xi_k(\omega)] = (-\sqrt{k})^2\frac{1}{2k} + (\sqrt{k})^2\frac{1}{2k} = 1.$$

Следовательно, к данной последовательности закон больших чисел в форме Чебышева применим.

§3 Закон больших чисел в форме Бернулли

Теорема 4. Пусть проведено n испытаний по схеме Бернулли и p – вероятность успеха в одном испытании. Если k – число успехов, то величина $\frac{k}{n}$ – частота успехов. Тогда $\forall\varepsilon > 0$

$$\exists \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказательство. Пусть дискретная случайная величина $\xi_k(\omega) \in \{0,1\}$ – исход испытания с № k (0 – неудача, 1 – успех). Тогда

$$P\{\xi_k(\omega) = 0\} = 1 - p,\ \ P\{\xi_k(\omega) = 1\} = p.$$

Найдем числовые характеристики $\xi_k(\omega)$:

$$M[\xi_k(\omega)] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p;$$

$$D[\xi_k(\omega)] = M[\xi_k^2(\omega)] - m_{\xi_k}^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p - p^2 = p(1-p) < 1.$$

Поскольку

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)$$

и случайные величины $\{\xi_k(\omega)\}_{k=1}^{n}$ независимы, то применив закон больших чисел в форме Чебышева (если $M[\xi_k(\omega)] = p,\ k = \overline{1,n}$, то $M\left[\frac{k}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[\xi_k(\omega)] = \frac{1}{n}(np) = p$), приходим к утверждению теоремы.

§4 Центральная предельная теорема

Теорема 5. Пусть $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \cdots, \xi_n(\omega), \cdots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $M[\xi_k(\omega)] = m$ и дисперсией $D[\xi_k(\omega)] = \sigma^2$. Тогда случайная величина $\eta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)$ асимптотически нормальна:

$$\eta(\omega) \sim N(nm, n\sigma^2),\ \ n \to \infty;$$

$$P\{a \le \eta(\omega) \le b\} \approx \Phi_0\left(\frac{b - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi_0\left(\frac{a - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ – интеграл Лапласа.

Доказательство теоремы 5 приведено в [1] и основано на применении характеристической функции.

§5 Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Теорема 6. Пусть проведено n испытаний по схеме Бернулли ($n -$ достаточно большое) и $p -$ вероятность успеха в одном испытании, $k -$ число успехов. Тогда

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Замечание. Интегральная теорема Муавра-Лапласа является следствием из центральной предельной теоремы. Доказательство теоремы 6 приведено в [1].

Отклонение относительной частоты определяется следующим образом:

$$P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \approx 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Примеры решения задач

Задача 4. Вероятность появления события в каждом из $n = 2100$ независимых испытаний равна $p = 0{,}7$. Найти вероятность того, что событие появится не менее $k_1 = 1470$ и не более $k_2 = 1500$ раз.

Решение. Применим интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$k_1 = 1470, \;\; k_2 = 1470;$

$$m = np = 2100 \cdot 0{,}7 = 1470;$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3} = 21;$$

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx \Phi_0\left(\frac{1500 - 1470}{21}\right) - \Phi_0\left(\frac{1470 - 1470}{21}\right) =.$$

$$= \Phi_0(1{,}43) - \Phi_0(0) = 0{,}4236.$$

Задача 5. Вероятность появления события в одном испытании равна $p = 0{,}3$. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при $n = 100$ испытаниях примет значения в пределах от 0,2 до 0,4?

Решение. По условию задачи

$$0{,}2 \leq \frac{k}{n} \leq 0{,}4 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{k}{n} - 0{,}3\right| \leq 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 0{,}1.$$

Тогда

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-0{,}3\right|\leq 0{,}1\right\}\approx 2\Phi_0\left(\frac{0{,}1\sqrt{100}}{\sqrt{0{,}3\cdot 0{,}7}}\right)=2\Phi_0(2{,}18)=0{,}97.$$

Самостоятельная работа (Семинар 11)

Первое и второе неравенства Чебышева

Задача 1. Математическое ожидание числа солнечных дней в году для определенной местности равно 150 дням. Оцените вероятность того, что в данном году здесь будет не менее 200 солнечных дней. Как изменится искомая вероятность, если известно, что среднее квадратичное отклонение числа солнечных дней равно 10?

Задача 2. Вероятность появления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,5. Оцените вероятность того, что случайная величина $\xi(\omega)$ – появление этого события, примет значения в пределах от 40 до 60.

Задача 3. В осветительную сеть параллельно включено 30 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0,8. Оцените вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется: а) меньше 3; б) не меньше 3.

Задача 4. Дискретная случайная величина $\xi(\omega)$ задана рядом распределения:

$\xi(\omega)$	$x_1=0{,}1$	$x_2=0{,}4$	$x_3=0{,}6$
$P\{\xi(\omega)=x_k\}$	0,2	0,3	0,5

Оцените вероятность того, что $\left|\xi(\omega)-m_\xi\right|<\sqrt{0{,}4}$.

Закон больших чисел в форме Чебышева

Задача 5. Дана последовательность $\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\cdots,\xi_n(\omega),\cdots$ независимых дискретных случайных величин. Ряд распределения случайной величины $\xi_k(\omega)$ имеет вид:

$\xi_k(\omega)$	$\sqrt{\ln k}$	$-\sqrt{\ln k}$
P	$1/2$	$1/2$

Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел в форме Чебышева.

Задача 6. Дана последовательность $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \cdots, \xi_n(\omega), \cdots$ независимых дискретных случайных величин. Ряд распределения случайной величины $\xi_k(\omega)$ имеет вид:

$\xi_k(\omega)$	$-k$	0	k
P	$\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$	$1-\dfrac{1}{\sqrt{k}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел в форме Чебышева.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Задача 7. Решите задачу №2, применив для приближенной оценки искомой вероятности, интегральную теорему Муавра-Лапласа. Сравните полученные результаты.

Список используемой литературы

1. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. (Сер. Математика в техническом университете, Вып. XVI).
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Физматлит, 2005.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для студентов вузов. М.: Высшая школа, 1999.