Семинар 10

«Непрерывные двумерные случайные величины»

Приведем основные теоретические сведения, необходимые для решения задач [1,2].

<u>*Непрерывной двумерной случайной величиной*</u> $\xi(\omega) = \binom{\xi_1(\omega)}{\xi_2(\omega)}$ называют такую двумерную случайную величину, совместную функцию распределения которой можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла

$$F_\xi(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_\xi(u,v)dudv.$$

Функцию $f_\xi(x,y)$ называют <u>*совместной двумерной плотностью распределения*</u> случайного вектора $\xi(\omega) = \binom{\xi_1(\omega)}{\xi_2(\omega)}$.

<u>Свойства двумерной плотности распределения</u>

1. Плотность неотрицательна:
$$f_\xi(x,y) \geq 0, \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}.$$
2. Условие нормировки:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,y)dxdy = 1.$$
3. Вероятность попадания случайного вектора $\xi(\omega) = \binom{\xi_1(\omega)}{\xi_2(\omega)}$ в область D:
$$P\{\xi(\omega) \in D, \ \ D \subset \mathbb{R}^2\} = \iint_D f_\xi(x,y)dxdy.$$
4. Одномерные плотности распределения компонент случайного вектора:
$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,y)dy, \qquad f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x,y)dx.$$

Случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ называются <u>*независимыми*</u>, если их совместная функция распределения $F_\xi(x,y)$ является произведением одномерных функций распределения:

$$F_\xi(x,y) = F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y).$$

Теорема (критерий независимости непрерывных случайных величин). Для того чтобы непрерывные случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_\xi(x,y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y), \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Числовые характеристики двумерного случайного вектора

1. Математическое ожидание двумерной непрерывной случайной величины $\xi(\omega) = \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \xi_2(\omega) \end{pmatrix} -$ вектор $M[\xi(\omega)] = \begin{pmatrix} M[\xi_1(\omega)] \\ M[\xi_2(\omega)] \end{pmatrix}$, компоненты которого определяются следующим образом:

а) если известна совместная двумерная плотность $f_\xi(x,y)$, то

$$M[\xi_1(\omega)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x,y) dx dy,$$

$$M[\xi_2(\omega)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_\xi(x,y) dx dy;$$

б) если известны одномерные плотности компонент вектора $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(y)$, то применяя формулу для вычисления математического ожидания скалярной непрерывной случайной величины, получаем

$$M[\xi_1(\omega)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x) dx,$$

$$M[\xi_2(\omega)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y) dy.$$

2. <u>*Ковариационной матрицей*</u> двумерного случайного вектора называют матрицу $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$, состоящую из ковариаций случайных величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$:

$$\sigma_{ij} = cov\big[\xi_i(\omega), \xi_j(\omega)\big].$$

Следует отметить, что ковариационная матрица является симметрической, так как

$$\sigma_{ij} = cov\big[\xi_i(\omega), \xi_j(\omega)\big] = cov\big[\xi_j(\omega), \xi_i(\omega)\big] = \sigma_{ji},$$

причем на главной диагонали расположены дисперсии компонент случайного вектора:

$$\sigma_{ii} = cov[\xi_i(\omega), \xi_i(\omega)] = D[\xi_i(\omega)].$$

Таким образом,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} D[\xi_1(\omega)] & cov[\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)] \\ cov[\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)] & D[\xi_2(\omega)] \end{pmatrix}.$$

Далее запишем формулу для вычисления ковариации непрерывных случайных величин

$$cov[\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)] = M[\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] - M[\xi_1(\omega)]M[\xi_2(\omega)],$$

где

$$M[\xi_1(\omega)\xi_2(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_\xi(x,y)dxdy.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Совместная двумерная плотность распределения случайного вектора $\xi(\omega) = \binom{\xi_1(\omega)}{\xi_2(\omega)}$ имеет вид

$$f_\xi(x,y) = \begin{cases} Ce^{-4x-2y}, & x > 0 \text{ и } y > 0; \\ 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0. \end{cases}$$

Найти:

1) постоянную C;
2) одномерные плотности распределения компонент случайного вектора;
3) вероятность попадания случайного вектора $\xi(\omega) = \binom{\xi_1(\omega)}{\xi_2(\omega)}$ в область D, ограниченную прямыми: $y = x,\ x + y = 2,\ x = 0$.
4) проверить, являются ли случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

<u>Решение.</u>

1) Определим значение постоянной C из условия нормировки:

$$1 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} C\exp\{-4x-2y\}dxdy = C\left(\int_0^{+\infty} e^{-4x}\,dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dy\right) =$$

$$= C\left(-\frac{1}{4}\right)(0-1)\left(-\frac{1}{2}\right)(0-1) = \frac{C}{8} \qquad \Rightarrow C = 8.$$

Таким образом,

$$f_\xi(x,y)=\begin{cases}8e^{-4x-2y}, & x>0 \text{ и } y>0;\\ 0, & x\le 0 \text{ или } y\le 0.\end{cases}$$

2) Найдем одномерные плотности распределения компонент случайного вектора

   Очевидно, что

$$f_{\xi_1}(x)=0,\ \ x\le 0;$$

$$f_{\xi_1}(x)=\int\limits_0^{+\infty} 8e^{-4x-2y}dy=8e^{-4x}\int\limits_0^{+\infty} e^{-2y}\ dy=\ 4e^{-4x},\ \ x>0.$$

   Аналогично,

$$f_{\xi_2}(y)=0,\ \ y\le 0;$$

$$f_{\xi_2}(y)=\int\limits_0^{+\infty} 8e^{-4x-2y}dx=8e^{-2y}\int\limits_0^{+\infty} e^{-4x}\ dx=\ 2e^{-2y},\ \ y>0.$$

Таким образом,

$$f_{\xi_1}(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0;\end{cases}\quad f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0;\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

3) Вычислим вероятность:

$$P\{\xi(\omega)\in D,\ \ D\subset\mathbb{R}^2\}=\iint\limits_D f_\xi(x,y)dxdy=8\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x} e^{-4x-2y}\,dy=$$

$$=8\int\limits_0^1 e^{-4x}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-2(2-x)}-e^{-2x}\right)dx=$$

$$=-4e^{-4}\int\limits_0^1 e^{-2x}dx+4\int\limits_0^1 e^{-6x}dx=$$

$$=2e^{-4}(e^{-2}-1)-\frac{2}{3}(e^{-6}-1)=\frac{2}{3}(2e^{-6}-3e^{-4}+1).$$

4) Применив критерий независимости непрерывных случайных величин, приходим к следующему результату: случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ являются независимыми.

Самостоятельная работа

Задача 1. Совместная двумерная плотность распределения случайного вектора $\xi(\omega) = \binom{\xi_1(\omega)}{\xi_2(\omega)}$ имеет вид

$$f_\xi(x,y) = \frac{C}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

Найти:

1) постоянную C;
2) одномерные плотности распределения компонент случайного вектора;
3) вероятность попадания случайного вектора $\xi(\omega) = \binom{\xi_1(\omega)}{\xi_2(\omega)}$ в треугольник с вершинами в точках: $O(0,0)$, $A(-1,1)$, $B(1,1)$.
4) проверить, являются ли случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимыми.

Список используемой литературы

1. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. (Сер. Математика в техническом университете, Вып. XVI).
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Физматлит, 2005.

ОТВЕТЫ (Самостоятельная работа)

Задача 1.

$$C = \frac{1}{\pi};$$

$$f_{\xi_1}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}; \quad f_{\xi_2}(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)};$$

$$P = \frac{1}{16};$$

случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ являются независимыми.