# Семинар 12

## Характеристическая функция

Приведем основные теоретические сведения, необходимые для решения задач [1,2].

<u>*Характеристической функцией*</u> $g(t) = g_\xi(t)$ случайной величины $\xi(\omega)$ называют

$$g(t) = M\big[\exp\big(it\xi(\omega)\big)\big],$$

где $i -$ мнимая единица, $t \in \mathbb{R}$.

Для дискретной случайной величины $\xi(\omega)$:

$$g(t) = \sum_k \exp(itx_k) \cdot p_k = \sum_k \cos(tx_k) \cdot p_k + i \sum_k \sin(tx_k) \cdot p_k.$$

Для непрерывной случайной величины $\xi(\omega)$:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx)\, f_\xi(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx)\, f_\xi(x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx)\, f_\xi(x) dx.$$

<u>Замечание.</u> Функция $g(t)$ существует $\forall t \in \mathbb{R}$, так как определяющие ее ряд (для дискретной случайной величины) и интеграл (для непрерывной случайной величины) сходятся абсолютно.

<u>Свойства характеристической функции</u>

1. Функция $g(t)$ непрерывна и $|g(t)| \le 1,\ \ g(0) = 1$.
2. Если $\eta(\omega) = \alpha\xi(\omega) + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $g_\eta(t) = g_\xi(\alpha t) \exp(i\beta t)$.
3. Если $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega) -$ независимые случайные величины и $\eta(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)$, то $g_\eta(t) = g_{\xi_1}(t) \cdot g_{\xi_2}(t)$.
4. *Формула обращения*: если $g(t)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то существует непрерывная плотность распределения[1]

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(-itx)\, dt.$$

**Пример 1.** Для случайной величины $\xi(\omega) \sim N(0,1)$: $g_\xi(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.

[1] Преобразование Фурье

**Пример 2.** Если $\xi(\omega)\sim N(0,1)$ и $\eta(\omega)=\sigma\xi(\omega)+m,$ то $\eta(\omega)\sim N(m,\sigma^2)$ и, согласно свойству 2:

$$g_\eta(t)=g_\xi(\sigma t)\exp(imt)=\exp\left(-\frac{(\sigma t)^2}{2}\right)\exp(imt)=\exp\left\{imt-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}.$$

**Пример 3.** Если $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ − независимые случайные величины, $\xi_k(\omega)\sim N(m_k,\sigma_k^2), k=1{,}2$ и $\eta(\omega)=\xi_1(\omega)+\xi_2(\omega)$, то согласно свойству 3:

$$g_\eta(t)=g_{\xi_1}(t)\cdot g_{\xi_2}(t)=\exp\left\{im_1t-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}\right\}\exp\left\{im_2t-\frac{\sigma_2^2t^2}{2}\right\}=$$

$$=\exp\left\{i(m_1+m_2)t-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}\right\}$$

$\Longrightarrow\quad \eta(\omega)\sim N(m_1+m_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$

**Пример 4.** Найдите характеристическую функцию случайной величины $\xi(\omega)$, ряд распределения которой имеет вид:

| $\xi(\omega)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

*Решение.*

$$g(t)=\sum_{k=1}^{4}\exp(itx_k)\cdot p_k=$$

$$=\exp(0)\cdot\frac{1}{2}+\exp(it)\cdot\frac{1}{8}+\exp(it2)\cdot\frac{1}{4}+\exp(it3)\cdot\frac{1}{8}=$$

$$=\frac{1}{2}+\exp(it)\cdot\{1+2\cdot\exp(it)+\exp(it2)\}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{\exp(it)}{8}\{1+\exp(it)\}^2.$$

**Пример 5**. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\xi(\omega)$, равномерно распределенной в интервале $(a,b)$.

*Решение.* Поскольку $\xi(\omega)$ распределена равномерно в интервале $(a,b)$, то ее плотность распределения имеет вид

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b);\\ 0, & x\notin(a,b).\end{cases}$$

$$g(t)=\int_a^b\exp(itx)\frac{1}{b-a}dx=\frac{\exp(itb)-\exp(ita)}{it(b-a)}.$$

# Самостоятельная работа

**Задача 1.** Найдите характеристическую функцию случайной величины $\xi(\omega)$, ряд распределения которой имеет вид:

| $\xi(\omega)$ | $-2$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

**Задача 2.** Случайная величина $\xi_1(\omega)$ распределена равномерно в интервале $(0,1)$, а случайная величина $\xi_2(\omega)$ имеет стандартное нормальное распределение. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\eta(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)$, если известно, что случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ являются независимыми.

## Список используемой литературы

1. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. (Сер. Математика в техническом университете, Вып. XVI).
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Физматлит, 2005.