Семинар 8

«Функции от случайных величин»

Приведем основные теоретические сведения, необходимые для решения задач [1,2].

§1 Функция от скалярной случайной величины

Задача о нахождении закона распределения функции случайной величины

Постановка задачи: известна функция распределения случайной величины $\xi(\omega)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta(\omega) = \varphi(\xi(\omega))$.

Пусть $\varphi(x) -$ непрерывная возрастающая или убывающая функция. Тогда существует обратная к ней функция $\varphi^{-1}(y)$.

1. Если $\varphi(x)$ монотонно возрастает, то эквивалентны события
$$\{\varphi(\xi(\omega)) < y\} \sim \{\xi(\omega) < \varphi^{-1}(y)\}$$

$$\Rightarrow \; F_\eta(y) = P\{\eta(\omega) < y\} = P\{\varphi(\xi(\omega)) < y\} = P\{\xi(\omega) < \varphi^{-1}(y)\} = \\ = F_\xi(\varphi^{-1}(y)).$$

2. Если $\varphi(x)$ монотонно убывает, то эквивалентны события
$$\{\varphi(\xi(\omega)) < y\} \sim \{\xi(\omega) > \varphi^{-1}(y)\}$$

$$\Rightarrow \; F_\eta(y) = P\{\eta(\omega) < y\} = P\{\varphi(\xi(\omega)) < y\} = P\{\xi(\omega) > \varphi^{-1}(y)\} = \\ = 1 - P\{\xi(\omega) < \varphi^{-1}(y)\} = 1 - F_\xi(\varphi^{-1}(y)).$$

Пусть $\varphi(x) -$ монотонная дифференцируемая функция, тогда применяя правило вычисления производной сложной функции, получаем

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \pm\left(F_\xi(x)\right)'|_{x=\varphi^{-1}(y)} \cdot \left(\varphi^{-1}(y)\right)' = \pm f_\xi\left(\varphi^{-1}(y)\right) \cdot \left(\varphi^{-1}(y)\right)',$$

где знак «плюс» («минус») соответствует случаю, когда функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает (убывает).

Таким образом,

$$f_\eta(y) = f_\xi\left(\varphi^{-1}(y)\right) \cdot \left|\left(\varphi^{-1}(y)\right)'\right|. \tag{1}$$

Если функция $\varphi(x)$ в интервале возможных значений не монотонна, то этот интервал следует разбить на такие интервалы, в которых $\varphi(x)$ монотонна:

$$f_\eta(y) = \sum_{k=1}^{n} f_\xi\left(\varphi_k^{-1}(y)\right) \cdot \left|\left(\varphi_k^{-1}(y)\right)'\right|, \tag{2}$$

где $n -$ число интервалов монотонности, $\varphi_k^{-1}(y) -$ обратная к $\varphi(x)$ функция в $k -$м интервале монотонности.

Примеры решения задач

Пример 1. Случайная величина $\xi(\omega)$ распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x \notin \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right). \end{cases};$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta(\omega) = \sin\xi(\omega)$.

<u>Решение.</u> Функция $\varphi(x) = \sin x$ непрерывна и монотонно возрастает в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $\exists\ \varphi^{-1}(y) = \arcsin y,\ \ y \in (-1,1)$.

Вычислим производную обратной функции и найдем плотность распределения по формуле (1):

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (-1,1); \\ 0, & y \notin (-1,1). \end{cases}$$

Пример 2. Случайная величина $\xi(\omega) \sim N(m,\sigma^2)$:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\},\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta(\omega) = \xi^2(\omega)$.

<u>Решение.</u> Функция $\varphi(x) = x^2$ непрерывна на всей оси x и имеет два промежутка монотонности:

1. $\varphi(x) = x^2$ монотонно убывает при $x \in (-\infty, 0)$

$$\Rightarrow\ \exists\ \varphi_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}, \qquad y > 0;$$

2. $\varphi(x) = x^2$ монотонно возрастает при $x \in (0, +\infty)$

$$\Rightarrow\ \exists\ \varphi_2^{-1}(y) = +\sqrt{y}, \qquad y > 0.$$

Далее, применяя формулу (2), находим

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{\left(-\sqrt{y}-m\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left\{-\frac{\left(\sqrt{y}-m\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{y}}\left[exp\left\{-\frac{\left(\sqrt{y}+m\right)^2}{2\sigma^2}\right\}+exp\left\{-\frac{\left(\sqrt{y}-m\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\right],\qquad y>0.$$

Самостоятельная работа

Задача 1. Случайная величина $\xi(\omega)$ распределена по экспоненциальному закону с параметром λ. Найти плотность распределения случайной величины $\eta(\omega)=exp\big(-\xi(\omega)\big)$.

Задача 2. Случайная величина $\xi(\omega)\sim N(m,\sigma^2)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta(\omega)=|\xi(\omega)|$.

---

§2 Функция от двумерной случайной величины

Формула свертки

Пусть $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ – непрерывные, независимые случайные величины:

$$f_{\xi\eta}(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y).$$

Тогда плотность распределения случайной величины $\varepsilon(\omega)=\xi(\omega)+\eta(\omega)$ равна свертке плотностей этих случайных величин:

$$f_\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(x)\,f_\eta(t-x)dx. \qquad (3)$$

Примеры решения задач

Пример 3. Независимые случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ распределены по экспоненциальному закону с параметрами $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=2$. Найти плотность распределения случайной величины $\varepsilon(\omega)=\xi(\omega)+\eta(\omega)$.

Решение. Согласно условию задачи,

$$f_\xi(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0;\end{cases}\qquad f_\eta(t-x)=\begin{cases}2e^{-2(t-x)}, & t-x\geq 0;\\ 0, & t-x<0.\end{cases}$$

Применим формулу (3).

При $t<0$: $f_\varepsilon(t)=0$.

При $t \geq 0$:

$$f_\varepsilon(t) = \int_0^t e^{-x} 2e^{-2(t-x)} dx = 2e^{-2t} \int_0^t e^x dx = 2e^{-2t}(e^t - 1).$$

Таким образом,

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 2(e^{-t} - e^{-2t}), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Самостоятельная работа

Задача 3. Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы и равномерно распределены в интервале $(0,1)$. Найти плотность распределения случайной величины $\varepsilon(\omega) = \xi(\omega) + \eta(\omega)$.

Список используемой литературы

1. Печинкин А.В., Тескин О.И., Цветкова Г.М. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. (Сер. Математика в техническом университете, Вып. XVI).
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Физматлит, 2005.

ОТВЕТЫ (Самостоятельная работа)

Задача 1. $f_\eta(y) = \begin{cases} \lambda y^{\lambda-1}, & y \in (0,1]; \\ 0, & y \notin (0,1]. \end{cases}$

Задача 2.

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[exp\left\{-\frac{(y+m)^2}{2\sigma^2}\right\} + exp\left\{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right\}\right], \qquad y > 0.$$

Задача 3. $f_\varepsilon(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1; \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2; \\ 0, & t < 0, \ t \geq 2. \end{cases}$