Численные методы

«ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ»

ЧИГИРЕВА О.Ю.

Содержание лекции

1. Постановка задачи интерполяции
2. Интерполяционный многочлен Лагранжа
3. Интерполяция кубическими сплайнами

Список используемой литературы

1. Постановка задачи интерполяции

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка $\omega = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ и в узлах x_k этой сетки заданы значения y_k функции $f(x)$: $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$.

Требуется построить ***интерполянту*** – функцию $g(x)$, совпадающую с функцией $f(x)$ в узлах сетки: $g(x_k) = y_k$, $k = \overline{0, n}$.

Интерполирующую функцию $g(x)$ строят в виде линейной комбинации элементарных функций:

$$g(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m \varphi_m(x),$$

где $\varphi_m(x)$ – линейно независимые функции,

a_m – неизвестные коэффициенты.

1. Постановка задачи интерполяции

Из условий $g(x_k) = y_k$, $k = \overline{0,n}$ получим систему, состоящую из $(n+1)$ уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_m:

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \varphi_m(x_k) = y_k, \qquad k = \overline{0,n}.$$

Определитель данной системы имеет вид

$$\Delta(\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

Предположим, что система функций $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{n}$ такова, что при любом выборе узлов x_k (попарно различных), определитель системы $\Delta(\varphi) \neq 0$. Тогда по заданным значениям y_k, $k = \overline{0,n}$ однозначно определяются коэффициенты a_m, $m = \overline{0,n}$.

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Функцию $g(x)$ будем искать в виде многочлена степени n: $g(x) = P_n(x)$.

Многочлен степени n

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$$

называют ***интерполяционным многочленом***, если $P_n(x_k) = y_k,\ \ k = \overline{0, n}$.

В результате получим систему относительно коэффициентов a_m, $m = \overline{0, n}$:

$$a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \cdots + a_n x_k^n = y_k,\ \ k = \overline{0, n}.$$

Определитель этой системы является определителем Вандермонда:

$$\Delta(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \prod_{0 \le j < k \le n} \left(x_k - x_j\right) \ne 0.$$

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Следовательно, система

$$a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \dots + a_n x_k^n = y_k, \quad k = \overline{0, n}$$

имеет решение, и при том единственное. Это доказывает существование и единственность интерполяционного многочлена.

Таким образом, справедлива следующая ***теорема*** [2].

Существует единственный интерполяционный многочлен степени n, удовлетворяющий условиям: $P_n(x_k) = y_k, \quad k = \overline{0, n}$.

Одной из форм записи интерполяционного многочлена является ***многочлен Лагранжа***.

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть система функций $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{n}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi_m(x_k) = \begin{cases} 1, & m = k; \\ 0, & m \neq k; \end{cases} \quad k, m = \overline{0, n}.$$

Покажем, что многочлен вида

$$g(x) = \sum_{m=0}^{n} f(x_m)\varphi_m(x)$$

является интерполяционным многочленом.

Действительно,

$$g(x_k) = \sum_{m=0}^{n} f(x_m)\varphi_m(x_k) = f(x_k)\varphi_k(x_k) = f(x_k).$$

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Из условия $\varphi_m(x_k) = 0$ при $m \neq k$ следует, что $\varphi_m(x)$ делится на $(x - x_k)$ при $m \neq k$.

Таким образом,

$$\varphi_m(x) = C \prod_{k \neq m} (x - x_k).$$

Определим значение постоянной C:

$$\varphi_m(x_m) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\prod_{k \neq m}(x_m - x_k)}.$$

В результате получен ***интерполяционный многочлен Лагранжа***:

$$L_n(x) \equiv g(x) = \sum_{m=0}^{n} f(x_m) \prod_{k \neq m} \frac{(x - x_k)}{(x_m - x_k)}.$$

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Запишем интерполяционные многочлены Лагранжа 1-й и 2-й степени.

1. Линейная интерполяция (по двум узлам x_0 и x_1):

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

2. Квадратичная интерполяция (по трем узлам x_0, x_1 и x_2):

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

2. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Приведем формулировку ***теоремы*** о погрешности интерполяции [1-3].

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз на $[a,b]$ и $x_k \in [a,b]$, $k=\overline{0,n}$. Тогда для погрешности интерполяции в точке $x \in [a,b]$ справедливо равенство

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k), \qquad \xi \in [a,b].$$

Следствие. В условиях предыдущей теоремы справедлива оценка погрешности интерполяции:

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} |x - x_k|,$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

3. Интерполяция кубическими сплайнами

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка $\omega = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$.

Сплайном степени m называют функцию $S_m(x)$, удовлетворяющую условиям:

1) $S_m(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со всеми своими производными до порядка p включительно;

2) $S_m(x) = P_{m,k}(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$,   где $P_{m,k}(x)$ – многочлен степени m.

Дефектом сплайна называют разность $(m - p)$ между степенью сплайна и наивысшим порядком непрерывной на отрезке $[a, b]$ производной.

Далее рассмотрим ***интерполяцию кубическими сплайнами***.

3. Интерполяция кубическими сплайнами

Пусть на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$ функция $f(x)$ интерполируется многочленом 3-й степени:

$$P_{3,k}(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3, \quad x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Коэффициенты этого многочлена на каждом интервале (x_{k-1}, x_k) определяются из условий сопряжения в узлах x_k:

$$S_3(x_k) = y_k, \; k = \overline{0, n};$$

$$S_3'(x_k - 0) = S_3'(x_k + 0), \; k = \overline{1, n-1};$$

$$S_3''(x_k - 0) = S_3''(x_k + 0), \; k = \overline{1, n-1};$$

и условий, поставленных в граничных точках: $S_3''(x_0) = 0, \quad S_3''(x_n) = 0$. Эти условия определяют ***естественный кубический сплайн***.

3. Интерполяция кубическими сплайнами

1. Рассмотрим условие $S_3(x_k) = y_k,\ k = \overline{0, n}$:

$P_{3,k}(x_{k-1}) = y_{k-1} \ \Rightarrow \ a_k = y_{k-1}, \quad k = \overline{1, n}$;

$P_{3,k}(x_k) = y_k \ \Rightarrow \ a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = y_k, \quad k = \overline{1, n}, \ (h_k = x_k - x_{k-1})$.

2. Рассмотрим условие $S_3'(x_k - 0) = S_3'(x_k + 0),\ k = \overline{1, n-1}$:

$P_{3,k}'(x_k) = P_{3,k+1}'(x_k) \ \Rightarrow \ b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}, \ k = \overline{1, n-1}$.

3. Рассмотрим условие $S_3''(x_k - 0) = S_3''(x_k + 0),\ k = \overline{1, n-1}$:

$P_{3,k}''(x_k) = P_{3,k+1}''(x_k) \ \Rightarrow \ c_k + 3d_k h_k = c_{k+1}, \ k = \overline{1, n-1}$.

4. $S_3''(x_0) = 0$: $P_{3,1}''(x_0) = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = 0$.

5. $S_3''(x_n) = 0$: $P_{3,n}''(x_n) = 0 \ \Rightarrow \ c_n + 3d_n h_n = 0$.

3. Интерполяция кубическими сплайнами

Таким образом, получены следующие соотношения:

(1) $a_k = y_{k-1}, \quad k = \overline{1,n}$;

(2) $a_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = y_k, \quad k = \overline{1,n}$;

(3) $b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}, \quad k = \overline{1,n-1}$;

(4) $c_k + 3d_k h_k = c_{k+1}, \quad k = \overline{1,n-1}$;

(5) $c_1 = 0$;

(6) $c_n + 3d_n h_n = 0$.

Отсюда находим

$$d_k = \frac{1}{3h_k}(c_{k+1} - c_k), \qquad k = \overline{1,n-1};$$

$$b_k = \frac{1}{h_k}(y_k - y_{k-1}) - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k), \qquad k = \overline{1,n-1};$$

$$b_n = \frac{1}{h_n}(y_n - y_{n-1}) - \frac{2}{3}h_n c_n.$$

3. Интерполяция кубическими сплайнами

В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов c_k :

$$h_k c_k + 2(h_k + h_{k+1})c_{k+1} + h_{k+1}c_{k+2} = \frac{3}{h_{k+1}}(y_{k+1} - y_k) - \frac{3}{h_k}(y_k - y_{k-1}), k = \overline{1, n-1};$$

$c_1 = 0, c_{n+1} = 0.$

Матрица данной системы является трехдиагональной. Для решения данной системы применим метод прогонки (выполнено достаточное условие). По найденным коэффициентам c_k определим значения b_k и d_k, коэффициенты $a_k = y_{k-1}$.

Таким образом, построен алгоритм нахождения ***естественного кубического сплайна***, когда в граничных точках a и b ставятся условия $S_3''(x_0) = 0,\ \ S_3''(x_n) = 0$ независимо от того, удовлетворяет ли этим условиям функция $f(x)$.

3. Интерполяция кубическими сплайнами

Замечание. Если в граничных точках a и b известны значения $f''(a)$ и $f''(b)$, то ставятся условия: $P''_{3,1}(x_0) = f''\ (a)$ и $P''_{3,n}(x_n) = f''\ (b)$.

Если в граничных точках a и b значения производных не известны, то ставятся условия «отсутствия узла»: $P'''_{3,1}(x_1) = P'''_{3,2}(x_1)$ и $P'''_{3,n-1}(x_{n-1}) = P'''_{3,n}(x_{n-1})$**.**

Список используемой литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2019. 636 с.

2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994. 544 с.

3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 429 с.