

**Аналитическая геометрия, 1-й семестр,
ИУ, РЛ, БМТ (кроме ИУ9) (2020-21 уч.г.)**

Рубежный контроль 2

Вопросы для подготовки

Базовые теоретические вопросы

1. Дать определение единичной, нулевой, верхней треугольной и нижней треугольной матрицы.
2. Дать определение равенства матриц.
3. Дать определение суммы матриц и произведения матрицы на число.
4. Дать определение операции транспонирования матриц.
5. Дать определение операции умножения матриц.
6. Дать определение обратной матрицы.
7. Дать определение минора. Какие миноры называются окаймляющими для данного минора матрицы?
8. Дать определение базисного минора и ранга матрицы.
9. Дать определение однородной и неоднородной СЛАУ.
10. Дать определение фундаментальной системы решений однородной СЛАУ.
11. Записать формулы для нахождения обратной матрицы к произведению двух обратимых матриц и для транспонированной матрицы.
12. Дать определение присоединённой матрицы и записать формулу для вычисления обратной матрицы.
13. Перечислить элементарные преобразования матриц.
14. Записать формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратимой матрицей.
15. Перечислить различные формы записи системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Какая СЛАУ называется совместной?
16. Привести пример, показывающий, что умножение матриц некоммукативно.
17. Сформулировать свойства ассоциативности умножения матриц и дистрибутивности умножения относительно сложения.
18. Сформулировать критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ.
19. Сформулировать теорему о базисном миноре.
20. Сформулировать теорему о свойствах решений однородной СЛАУ.
21. Сформулировать теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.
22. Сформулировать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.
23. Сформулировать теорему об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях матрицы.
24. Сформулировать критерий существования обратной матрицы.

Теоретические вопросы повышенной сложности

1. Доказать теорему о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ и теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.
2. Доказать свойства ассоциативности и дистрибутивности умножения матриц.
3. Доказать теорему о базисном миноре.
4. Доказать критерий существования обратной матрицы.

5. Доказать критерий Кронекера — Капелли совместности СЛАУ.
6. Доказать теорему о существовании ФСР однородной СЛАУ.
7. Вывести формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратимой матрицей.
8. Доказать теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Задачи для подготовки базового уровня

1. Вычислить $AB - BA$, если

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 15 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг и указать базисный минор матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 4 & 0 \\ 5 & -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Найти ранг и указать базисный минор матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

6. Найти матрицу, обратную матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найти фундаментальную систему решений (ФСР) однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

8. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 1; \\ -2x_1 + 3x_3 = 1; \\ x_1 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

Задачи для подготовки повышенной сложности

1. Показать, что столбцы $e_1 = (1, -1, 2, -2)^T$ и $e_2 = (2, -1, -2, -1)^T$ образуют ФСР однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Выразить через эту ФСР частное решение $x^0 = (-1, -8, 16, -7)^T$.

2. Найти ФСР и общее решение однородной СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 - 9x_5 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5 = 0; \\ 7x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

3. Общее решение некоторой СЛАУ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 + c_1 + 2c_2 \\ -3 + c_1 + 2c_2 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 - 2c_2 \end{pmatrix}.$$

Какое наименьшее число уравнений может иметь такая СЛАУ? Привести пример системы с таким решением.

Типовой вариант билета по теории

1. (1 балл) Дать определение обратной матрицы.
2. (1 балл) Записать формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с обратной матрицей.
3. (1 балл) Сформулировать теорему о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.
4. (2 балла) Доказать теорему о существовании ФСР однородной СЛАУ.

min: 3 балла, max: 5 баллов

Типовой вариант билета по задачам

1. (7 баллов) Вычислить A^2 , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -4 & -13 & -24 \\ 2 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. (7 баллов) Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. (7 баллов) Найти фундаментальную систему решений (ФСР) однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

4. (7 баллов) Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

5. (9 баллов) Решить СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 20; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

6. (9 баллов) Найти ранг матрицы A в зависимости от параметра λ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & \lambda & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

min: 27 баллов, max: 46 баллов
