Аналитическая геометрия

Лекция 10

Матрицы и операции над ними

Определения матрицы, квадратной, диагональной, единичной и нулевой матриц

Матрицей размера (типа) $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов.

Обозначение $A = \left(a_{ij}\right)$, $a_{ij} = [A]_{ij}$ – элемент в строке i и столбце j.

Квадратной матрицей порядка n называется матрица размера $n \times n$.

Главной диагональю квадратной матрицы называются её элементы, расположенные по диагонали, начиная с левого верхнего и до правого нижнего.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю.

Единичной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, а все элементы на главной диагонали равны единице.

Матрица называется ***нулевой***, если все её элементы равны нулю.

Определения верхней треугольной, нижней треугольной и ступенчатой матриц

Квадратная матрица называется ***верхней треугольной***, если все её элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю.

Квадратная матрица называется ***нижней треугольной***, если все её элементы, расположенные над главной диагональю, равны нулю.

Матрица называется ***ступенчатой*** (имеет ***ступенчатый вид***), если первый (слева) ненулевой элемент каждой строки расположен правее первого ненулевого элемента предыдущей строки, при этом несколько нижних строк могут быть нулевыми.

Примеры: $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 \\ 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{2} & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 4 \end{pmatrix}$

Равенство, сложение и вычитание матриц

Две матрицы называются ***равными***, если у них одинаковые размеры и элементы на соответствующих позициях совпадают.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}, \ \forall i, j.$$

Складывать можно только матрицы одинакового размера. Чтобы сложить две матрицы, надо сложить их соответствующие элементы.

$$C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall i, j.$$

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 0+1 \\ -2+4 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Свойства сложения:

1. коммутативность $\forall A, B, \ A + B = B + A$;
2. ассоциативность $\forall A, B, C, \ (A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $\forall A, \ A + \Theta = \Theta + A = A$, где Θ – нулевая матрица;
4. $\forall A, \ \exists(-A), \ A + (-A) = \Theta$, где $(-A)$ наз. ***противоположной*** к A.

Разность матриц и умножение матрицы на число

Разностью матриц A и B называется сложение матрицы A с матрицей $(-B)$, противоположной к B:

$$A - B = A + (-B).$$

Любую матрицу можно ***умножать на любое число***. Для этого надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$B = \lambda \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}, \ \ \forall i, j.$$

Свойства умножения матрицы на число:

1. ассоциативность $\forall A, \ \ \forall \lambda, \mu, \ \ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
2. дистрибутивность относительно сложения матриц
$$\forall A, B, \ \ \forall \lambda, \ \ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B;$$
3. дистрибутивность относительно сложения чисел
$$\forall A, \ \ \forall \lambda, \mu, \ \ (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$
4. $\forall A, \ \ 1 \cdot A = A$.

Транспонирование матриц

Транспонировать можно любую матрицу. В процессе транспонирования строки исходной матрицы становятся столбцами новой матрицы. Для квадратной матрицы транспонирование является отражением матрицы относительно её главной диагонали.

$$B = A^{\top} \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = a_{ji}, \ \ \forall i, j.$$

Примеры: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B^{\top} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Свойства транспонирования:

$$(A^{\top})^{\top} = A, \qquad (A + B)^{\top} = A^{\top} + B^{\top}, \qquad (\lambda A)^{\top} = \lambda A^{\top}.$$

Доказательство второго свойства:

$$[(A + B)^{\top}]_{ij} = [A + B]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = [A^{\top}]_{ij} + [B^{\top}]_{ij} = [A^{\top} + B^{\top}]_{ij}.$$

Симметрическая и кососимметрическая матрицы

Матрица A называется ***симметрической***, если $A^{\top} = A$.

Для симметрической матрицы элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны.

Пример симметрической матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Матрица A называется ***кососимметрической***, если $A^{\top} = -A$.

Для кососимметрической матрицы все элементы на главной диагонали равны нулю, а элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, противоположны.

Пример кососимметрической матрицы: $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Умножение матриц

Матрицу A можно ***умножить*** на матрицу B только в том случае, если количество столбцов матрицы A совпадает с количеством строк матрицы B. Чтобы перемножить матрицы, нужно каждую строку матрицы A умножить на каждый столбец матрицы B. При умножении строки на столбец перемножаются их соответствующие элементы, а затем произведения складываются.

$$C = AB \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \forall i, j.$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \\ -2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 & -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) & 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц не коммутативно!

Свойства умножения матриц:

1. ассоциативность $\forall A, B, C, \quad (AB)C = A(BC)$;
2. дистрибутивность относительно сложения

$$\forall A, B, C, \quad (A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC;$$

3. $\forall A, \quad E \cdot A = A$ и $A \cdot E = A$,

   где E – единичная матрица подходящего размера;
4. $\forall A, \quad \Theta \cdot A = \Theta$ и $A \cdot \Theta = \Theta$,

   где Θ – нулевая матрица подходящего размера.
5. $\forall A, B, \quad (AB)^\top = B^\top A^\top$.

Доказательство ассоциативности:

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{r=1}^{k} [AB]_{ir}[C]_{rj} = \sum_{r=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{n} [A]_{is}[B]_{sr} \right) [C]_{rj} =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=1}^{n} [A]_{is}[B]_{sr}[C]_{rj} = \sum_{s=1}^{n} [A]_{is} \left(\sum_{r=1}^{k} [B]_{sr}[C]_{rj} \right) = [A(BC)]_{ij}.$$

Степень квадратной матрицы

$$A^0 = E, \qquad A^1 = A, \qquad A^{n+1} = A^n A, \qquad \forall n \geq 1.$$

Свойство: $A^m A^n = A^{m+n}$, $\forall n, m \geq 0$.

Пример: найдём значение многочлена $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ на матрице $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$f(A) = 3 \cdot A^2 - 4 \cdot A^1 + 5 \cdot A^0,$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = 3\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Элементарные преобразования строк матрицы

1. перемена местами любых двух строк: $(i) \leftrightarrow (k)$;
2. умножение строки на любое число, кроме нуля: $(i) \rightarrow \lambda(i)$;
3. прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженной на некоторое число: $(i) \rightarrow (i) + \lambda(k)$.

Обозначим через F_{ik}, $E_i(\lambda)$ и $G_{ik}(\lambda)$ матрицы, полученные путём применения элементарных преобразований к единичной матрице.

Применение элементарного преобразования к матрице A означает умножение её слева на F_{ik}, $E_i(\lambda)$ или $G_{ik}(\lambda)$.

Элементарные преобразования столбцов матрицы соответствуют умножению матрицы справа на F_{ik}, $E_i(\lambda)$ и $G_{ik}^{\top}(\lambda)$.

Теорема о приведении матрицы к ступенчатому виду

Теорема: любую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к ступенчатому виду.

Доказательство:

полагаем в качестве текущего левый верхний элемент;

шаг 1) если текущий элемент не ноль, то обнуляем все элементы под ним, смещаемся вправо-вниз и переходим вновь к шагу 1, иначе переходим к шагу 2;

шаг 2) если под текущим нулевым элементом есть ненулевой элемент, то меняем строки местами, делаем этот ненулевой элемент текущим и переходим к шагу 1, иначе переходим к шагу 3;

шаг 3) смещаемся вправо и переходим к шагу 1;

если смещение на шаге 1 или 3 невозможно, то получена ступенчатая матрица □

Приведение матрицы к ступенчатому виду

Пример: приведём к ступенчатому виду матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$