Аналитическая геометрия
Лекция 11

Блочные матрицы и определители

Блочные матрицы

Блочной матрицей называется матрица $A = \left(M_{\alpha\beta}\right)$, элементы $M_{\alpha\beta}$ которой являются матрицами, причём у всех матриц $M_{\alpha\beta}$, расположенных в одной строке α, одинаковое число строк $m(\alpha)$, а у всех матриц $M_{\alpha\beta}$, расположенных в одном столбце β, одинаковое число столбцов $n(\beta)$.

Пример:
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

Операции над блочными матрицами:

$$\begin{pmatrix} A & E \\ \Theta & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & E \\ D & \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + C & 2E \\ D & B \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} M_{11}^{\top} & M_{21}^{\top} \\ M_{12}^{\top} & M_{22}^{\top} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & E \\ \Theta & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC \\ \Theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \Theta & E \\ E & \Theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}.$$

Прямая сумма матриц

Прямой суммой квадратных матриц A и B называется блочная матрица вида

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & \Theta \\ \Theta & B \end{pmatrix}.$$

Свойства прямой суммы:

1. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;
2. $(A_1 \oplus B_1) + (A_2 \oplus B_2) = (A_1 + A_2) \oplus (B_1 + B_2)$;
3. $(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = A_1A_2 \oplus B_1B_2$.

Доказательство:

$$(A \oplus B) \oplus C = \begin{pmatrix} A & \Theta & \Theta \\ \Theta & B & \Theta \\ \Theta & \Theta & C \end{pmatrix} = A \oplus (B \oplus C)$$

Прямая сумма матриц

Прямой суммой квадратных матриц A и B называется блочная матрица вида

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & \Theta \\ \Theta & B \end{pmatrix}.$$

Свойства прямой суммы:

1. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;
2. $(A_1 \oplus B_1) + (A_2 \oplus B_2) = (A_1 + A_2) \oplus (B_1 + B_2)$;
3. $(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = A_1 A_2 \oplus B_1 B_2$.

Доказательство:

$$(A_1 \oplus B_1) + (A_2 \oplus B_2) = \begin{pmatrix} A_1 & \Theta \\ \Theta & B_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 & \Theta \\ \Theta & B_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & \Theta \\ \Theta & B_1 + B_2 \end{pmatrix} = (A_1 + A_2) \oplus (B_1 + B_2)$$

Прямая сумма матриц

Прямой суммой квадратных матриц A и B называется блочная матрица вида

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & \Theta \\ \Theta & B \end{pmatrix}.$$

Свойства прямой суммы:

1. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;
2. $(A_1 \oplus B_1) + (A_2 \oplus B_2) = (A_1 + A_2) \oplus (B_1 + B_2)$;
3. $(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = A_1 A_2 \oplus B_1 B_2$.

Доказательство:

$$(A_1 \oplus B_1)(A_2 \oplus B_2) = \begin{pmatrix} A_1 & \Theta \\ \Theta & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & \Theta \\ \Theta & B_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 A_2 & \Theta \\ \Theta & B_1 B_2 \end{pmatrix} = A_1 A_2 \oplus B_1 B_2$$

Определитель квадратной матрицы

Определителем квадратной матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ порядка n называется сумма вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n},$$

где S_n – множество всех перестановок из n элементов и $|\sigma|$ – количество инверсий в перестановке σ. Обозначается $|A|$ или $\det A$.

Свойства определителя:

1. при транспонировании матрицы определитель не меняется

Доказательство:

$$|A^{\mathsf{T}}| = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \dots a_{\sigma_n n} = \sum_{\tau} (-1)^{|\tau|} a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \dots a_{n\tau_n} = |A|.$$

Определитель квадратной матрицы

Определителем квадратной матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ порядка n называется сумма вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n},$$

где S_n – множество всех перестановок из n элементов и $|\sigma|$ – количество инверсий в перестановке σ. Обозначается $|A|$ или $\det A$.

Свойства определителя:

2. при перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак

Доказательство:

$$\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} \dots a_{i\sigma_i} \dots a_{j\sigma_j} \dots a_{n\sigma_n} = -\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} \dots a_{j\sigma_j} \dots a_{i\sigma_i} \dots a_{n\sigma_n}.$$

Определитель квадратной матрицы

Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется сумма вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n},$$

где S_n – множество всех перестановок из n элементов и $|\sigma|$ – количество инверсий в перестановке σ. Обозначается $|A|$ или $\det A$.

Свойства определителя:

3. линейность

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Доказательство:

$$\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} \dots \left(a'_{i\sigma_i} + a''_{i\sigma_i}\right) \dots a_{n\sigma_n} = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} \dots a'_{i\sigma_i} \dots a_{n\sigma_n} + \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} \dots a''_{i\sigma_i} \dots a_{n\sigma_n}$$

Определитель квадратной матрицы

Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется сумма вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n},$$

где S_n – множество всех перестановок из n элементов и $|\sigma|$ – количество инверсий в перестановке σ. Обозначается $|A|$ или $\det A$.

Свойства определителя:

4. общий множитель элементов строки можно выносить за знак определителя

Доказательство:

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} \dots (\lambda a_{i\sigma_i}) \dots a_{n\sigma_n} = \lambda \cdot \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} \dots a_{i\sigma_i} \dots a_{n\sigma_n}.$$

Определитель квадратной матрицы

Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется сумма вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n},$$

где S_n – множество всех перестановок из n элементов и $|\sigma|$ – количество инверсий в перестановке σ. Обозначается $|A|$ или $\det A$.

Свойства определителя:

5. определитель равен нулю, если у него есть нулевая строка (столбец), две равные или пропорциональные строки (столбца), одна строка (столбец) является линейной комбинацией других строк (столбцов)

Доказательство: с нулевой строкой очевидно;

пропорциональные строки вынесением коэффициента пропорциональности сводятся к случаю равных строк;

Определитель квадратной матрицы

Определителем квадратной матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ порядка n называется сумма вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n},$$

где S_n – множество всех перестановок из n элементов и $|\sigma|$ – количество инверсий в перестановке σ. Обозначается $|A|$ или $\det A$.

Свойства определителя:

5. определитель равен нулю, если у него есть нулевая строка (столбец), две равные или пропорциональные строки (столбца), одна строка (столбец) является линейной комбинацией других строк (столбцов)

Доказательство: для равных строк переставим эти строки, тогда

$$|A| = -|A| \quad \Rightarrow \quad |A| = 0;$$

с линейной комбинацией используется свойство линейности.

Определитель квадратной матрицы

Определителем квадратной матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ порядка n называется сумма вида

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{|\sigma|} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n},$$

где S_n – множество всех перестановок из n элементов и $|\sigma|$ – количество инверсий в перестановке σ. Обозначается $|A|$ или $\det A$.

Свойства определителя:

6. определитель не изменится, если к любой строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию других строк (столбцов)

Доказательство:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется определитель, полученный из определителя матрицы $|A|$ путём удаления i-й строки и j-го столбца, в которых расположен элемент a_{ij}, и взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

Обозначается A_{ij}.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 6.$$

Теорема о разложении определителя по строке или столбцу

Теорема: определитель матрицы равен сумме произведений элементов некоторой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Доказательство: зафиксируем некоторую строку i определителя и разобьём его слагаемые на n групп так, чтобы в каждой группе слагаемые содержали один и тот же элемент i-й строки

$$|A| = a_{i1} \sum_{\sigma(i,1)} (-1)^{|\sigma(i,1)|} a_{1\sigma_1} \dots \widehat{a_{i1}} \dots a_{n\sigma_n} + a_{i2} \sum_{\sigma(i,2)} (-1)^{|\sigma(i,2)|} a_{1\sigma_1} \dots \widehat{a_{i2}} \dots a_{n\sigma_n} +$$

$$+ \dots + a_{in} \sum_{\sigma(i,n)} (-1)^{|\sigma(i,n)|} a_{1\sigma_1} \dots \widehat{a_{in}} \dots a_{n\sigma_n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{\sigma(i,j)} (-1)^{|\sigma(i,j)|} a_{1\sigma_1} \dots \widehat{a_{ij}} \dots a_{n\sigma_n},$$

где $\sigma(i,j)$ – перестановка, в которой на i-й позиции стоит число j. Осталось доказать, что

$$(-1)^{|\sigma(i,j)|} = (-1)^{i+j} \cdot (-1)^{|\sigma'|},$$

где перестановка σ' получается из $\sigma(i,j)$ удалением элемента j и уменьшением на 1 всех элементов, больших j. В самом деле,

$$(-1)^{|\sigma(i,j)|} = (-1)^{|\sigma'|} \cdot (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{j-1} = (-1)^{i+j-2} \cdot (-1)^{|\sigma'|} =$$

$$= (-1)^{i+j} \cdot (-1)^{|\sigma'|} \quad \square$$

Ещё одна теорема

Теорема: сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) квадратной матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство: для i-й и k-й строк надо доказать, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0,$$

но это равенство не содержит элементов k-строки, поэтому если k-я строка совпадает с i-й строкой, то левая часть равна $|A|$, который при равных строках равен нулю □

Определитель верхней треугольной матрицы

Теорема: для квадратных матриц определитель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Доказательство: верхние треугольные матрицы последовательно раскладываем по столбцам, нижние треугольные – по строкам □

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Определитель прямой суммы и произведения матриц

Теорема: для любых квадратных матриц A и B справедливо

$$\det(A \oplus B) = \det A \det B\,, \qquad \det(AB) = \det A \det B.$$

Доказательство: следующие элементарные преобразования строк не меняют определитель

- перестановка строк местами с умножением одной из строк на -1;
- прибавление к одной строке другой строки, умноженной на некоторое число;

в блочной матрице $\begin{pmatrix} A & \Theta \\ \Theta & B \end{pmatrix}$ блоки A и B приводим к верхнему треугольному виду с сохранением определителей A и B и определителя всей блочной матрицы;

$$\det(A \oplus B) = \begin{vmatrix} A & \Theta \\ \Theta & B \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \cdot b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{mm} = \det A \det B.$$

Определитель прямой суммы и произведения матриц

Теорема: для любых квадратных матриц A и B справедливо

$$\det(A \oplus B) = \det A \det B\,, \qquad \det(AB) = \det A \det B.$$

Доказательство: в блочной матрице $\begin{pmatrix} A & \Theta \\ -E & B \end{pmatrix}$ выполним преобразования столбцов по следующему правилу

$$(n+1) \to (n+1) + b_{11}(1) + b_{21}(2) + \ \dots + b_{n1}(n),$$

$$(n+2) \to (n+2) + b_{12}(1) + b_{22}(2) + \ \dots + b_{n2}(n),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\,,$$

получим матрицу $\begin{pmatrix} A & C \\ -E & \Theta \end{pmatrix}$, где $C = AB$, в этой матрице поменяем первые и последние n строк с умножением первых n строк на -1, получим $\begin{pmatrix} E & \Theta \\ A & C \end{pmatrix}$, итого

$$\det A \det B = \det \begin{pmatrix} A & \Theta \\ -E & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E & \Theta \\ A & C \end{pmatrix} = \det C \quad \square$$