

Аналитическая геометрия

Лекция 12

Обратные матрицы и
матричные уравнения

Обратная матрица

Матрица B называется **обратной** к матрице A , если $AB = BA = E$.

Обозначают: $B = A^{-1}$.

Теорема: если обратная матрица существует, то она единственна.

Доказательство:

$$B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B' \quad \square$$

Теорема: для квадратной матрицы A

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

Доказательство: \Rightarrow

$$1 = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1};$$

\Leftarrow для матрицы $B = (b_{ij})$ с элементами $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$ имеем

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{A_{kj}}{\det A} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \quad \square$$

Обратная к произведению матриц и обратная к транспонированной матрице

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю.

Теорема: для невырожденных матриц A и B

$$\exists (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Доказательство:

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E \quad \square$$

Теорема: для невырожденной матрицы A

$$\exists (A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}.$$

Доказательство: используем свойство $(AB)^{\top} = B^{\top}A^{\top}$

$$A^{\top} \cdot (A^{-1})^{\top} = (A^{-1}A)^{\top} = E^{\top} = E \quad \square$$

Присоединённая матрица

Присоединённой матрицей A^* для квадратной матрицы A называется транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A .

Нахождение обратной матрицы с помощью присоединённой:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}.$$

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$$A_{11} = 3, \quad A_{12} = -1$$

$$A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Элементарные преобразования строк матрицы

1. перемена местами любых двух строк: $(i) \leftrightarrow (k)$;
2. умножение строки на любое число, кроме нуля: $(i) \rightarrow \lambda(i)$;
3. прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженной на некоторое число: $(i) \rightarrow (i) + \lambda(k)$.

Обозначим через F_{ik} , $E_i(\lambda)$ и $G_{ik}(\lambda)$ матрицы, полученные путём применения элементарных преобразований к единичной матрице.

Применение элементарного преобразования к матрице A означает умножение её слева на F_{ik} , $E_i(\lambda)$ или $G_{ik}(\lambda)$.

Элементарные преобразования столбцов матрицы соответствуют умножению матрицы справа на F_{ik} , $E_i(\lambda)$ и $G_{ik}^T(\lambda)$.

Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк (метод Гаусса)

Для поиска A^{-1} надо решить матричное уравнение $AX = E$.

Будем выполнять одинаковые элементарные преобразования матриц A и E до получения в левой части единичной матрицы: $EX = B$.

Поскольку каждое элементарное преобразование обратимо, полученное уравнение имеет то же решение, что и исходное, т. е. $B = A^{-1}$.

Для выполнения одинаковых элементарных преобразований матриц A и E пишут блочную матрицу $(A | E)$ и элементар. преобразованиями строк добиваются, чтобы в левой половине была единичная матрица, тогда в правой половине будет обратная матрица $(A | E) \sim (E | A^{-1})$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований столбцов (метод Гаусса)

Аналогично, для поиска A^{-1} можно решать матричное уравнение

$$XA = E,$$

выполняя элементарные преобразования столбцов матрицы A , что соответствует умножению справа на F_{ik} , $E_i(\lambda)$ и $G_{ik}^T(\lambda)$.

В сокращённой записи $\left(\begin{array}{c} A \\ E \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} E \\ A^{-1} \end{array} \right)$.

Матричное уравнение $AX = B$

Если A – невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1} .
Умножим обе части уравнения слева на A^{-1} :

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Уравнение $AX = B$ можно решать через элементарные преобразования строк блочной матрицы $(A | B) \sim (E | C)$, тогда $X = C$.

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Матричное уравнение $XA = B$

Если A – невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1} .
Умножим обе части уравнения справа на A^{-1} :

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

Уравнение $XA = B$ можно решать через элементарные преобразования столбцов блочной матрицы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E \\ C \end{pmatrix}$, тогда $X = C$.

Другой способ: уравнение $XA = B$ можно транспонировать $(XA)^T = B^T$

$$A^T X^T = B^T$$

$$X^T = (A^T)^{-1} B^T$$

Пример: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$