

Аналитическая геометрия

Лекция 13

Миноры и ранг
матрицы

Минор матрицы

Минором порядка k матрицы называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов с сохранением порядка строк и столбцов.

Обозначается: $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ – минор, составленный из строк с номерами i_1, i_2, \dots, i_k и столбцов с номерами j_1, j_2, \dots, j_k .

Пример: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 \end{pmatrix}, M_{134}^{124} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$

Ранг матрицы

Рангом ненулевой матрицы называется максимальный порядок её ненулевого минора. Ранг нулевой матрицы полагают равным нулю.

Обозначают: $Rk A$ или $Rg A$ (англ. rank, нем. и франц. rang).

Базисным минором называется ненулевой минор, порядок которого равен рангу матрицы. Строки и столбцы матрицы, входящие в некоторый базисный минор, называются **базисными**.

Пример: для невырожденной квадратной матрицы порядка n её ранг равен n и базисный минор – это её определитель.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $Rg A = 2$, базисный минор M_{13}^{12} .

Теорема: $Rg A^T = Rg A$.

Доказательство: каждому минору матрицы A^T соответствует минор матрицы A , составленный из тех же элементов, но транспонированный, а при транспонировании определитель не меняется \square

Теорема об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях

Теорема: ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях её строк и столбцов.

Доказательство: так как элементарные преобразования обратимы, достаточно показать, что ранг при элементарных преобразованиях не увеличивается, т. е. что минор N преобразованной матрицы A' равен нулю, если его порядок больше $\text{Rg } A$;

для умножения строки на λ либо $N = M$, либо $N = \lambda M$, где M – минор матрицы A на пересечении тех же строк и столбцов, и $M = 0$, так как его порядок больше $\text{Rg } A$;

для перестановки строк минор N состоит из строк и столбцов матрицы A и поэтому равен нулю, так как его порядок больше $\text{Rg } A$;

для преобразования $(i) \rightarrow (i) + \lambda(k)$ либо $N = M$, либо в силу линейности определителя $N = M + \lambda M_k$, где M_k получается из M заменой i -й строки на k -ю и миноры $M = M_k = 0$ как состоящие из строк матрицы A и имеющие порядок больше $\text{Rg } A$ \square

Теорема о базисном миноре

Теорема: базисные строки (столбцы), соответствующие базисному минору M , линейно независимы; строки (столбцы), не входящие в M , являются линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Доказательство: линейная независимость строк базисного минора доказывается методом от противного;

пусть базисный минор M расположен в левом верхнем углу матрицы A ранга r , добавим к нему i -ю строку, $r + 1 \leq i \leq m$, и j -й столбец, тогда полученный определитель $= 0$, разложим его по последнему столбцу

$$A_{1,r+1}a_{1j} + A_{2,r+1}a_{2j} + \dots + A_{r,r+1}a_{rj} + A_{r+1,r+1}a_{ij} = 0,$$

где $A_{r+1,r+1} = M \neq 0$, поэтому

$$a_{ij} = b_1 a_{1j} + \dots + b_r a_{rj},$$

где $b_k = -A_{k,r+1}/A_{r+1,r+1}$ - не зависят от j , поэтому i -я строка матрицы A является линейной комбинацией первых r строк, т. е. строк базисного минора \square

Следствия из теоремы о базисном миноре

Следствие 1: квадратная матрица невырожденная \Leftrightarrow её строки (столбцы) линейно независимы.

Доказательство: если $|A| \neq 0$, то базисный минор содержит все строки и они линейно независимы; если $|A| = 0$, то базисный минор содержит не все строки и хотя бы одна строка является линейной комбинацией остальных, откуда все строки будут линейно зависимы \square

Следствие 2: линейно независимые строки (столбцы), количество которых равно рангу, являются базисными.

Доказательство: отбросим все строки, кроме r линейно независимых, тогда ранг полученной матрицы по теореме о базисном миноре равен r , поэтому в этих r строках существует ненулевой минор порядка r , который будет базисным минором и в исходной матрице \square

Следствия из теоремы о базисном миноре

Следствие 3: ранг матрицы равен максимальному количеству её линейно независимых строк (столбцов).

Доказательство: в матрице ранга r базисные строки линейно независимы, поэтому максимальное число k линейно независимых строк, как минимум, равно r , т. е. $k \geq r$;

если отбросить все строки, кроме k линейно независимых, тогда ранг полученной матрицы по теореме о базисном миноре равен k , поэтому в этих k строках существует ненулевой минор порядка k , который будет ненулевым минором и в исходной матрице, откуда $k \leq r$ \square

Следствие 4: максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов.

Доказательство: и то, и другое равно рангу матрицы \square

Окаймляющий минор

Минор M' матрицы A называется *окаймляющим* для минора M той же матрицы, если M' получается из M путём добавления одной новой строки и одного нового столбца матрицы A .

Теорема: если для некоторого ненулевого минора все окаймляющие его миноры равны нулю, то он является базисным.

Доказательство: аналогично доказательству второй части теоремы о базисном миноре, в котором для ненулевого минора M из равенства нулю всех окаймляющих его миноров следует, что каждая строка матрицы, не входящая в M , является линейной комбинацией строк, входящих в M , откуда вычитанием этих линейных комбинаций обнуляем все строки, кроме входящих в M , и получается, что минор M базисный \square

Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров

Пример: найдём ранг и базисный минор для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad M_{12}^{14} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - \text{базисный минор}, \quad \text{так как}$$

$$M_{1234}^{1234} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_{12345}^{1245} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Нахождение ранга матрицы методом элем. преобразований

Элементарными преобразованиями строк приводим матрицу к ступенчатому виду. Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не меняется и для ступенчатой матрицы равен числу ненулевых строк. Базисным является минор, расположенный на пересечении ненулевых строк ступенчатой матрицы со столбцами, соответствующими первым слева ненулевым элементам в каждой из строк.

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & -7 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{Rg } A = 3,$ базисный минор M_{123}^{124} .