Аналитическая геометрия
Лекция 14

Системы линейных алгебраических уравнений

Определение СЛАУ

Системой линейных алгебраических уравнений (***СЛАУ***) называется система уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots \ + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m$ называются ***коэффициентами*** СЛАУ.

СЛАУ называется ***однородной***, если $b_1 = b_2 = \ \dots \ = b_m = 0$, и ***неоднородной***, если хотя бы один из коэффициентов $b_1, b_2, \dots, b_m$ отличен от нуля.

Решения СЛАУ

(***Частным***) ***решением*** СЛАУ называется упорядоченный набор из n чисел, при подстановке которых вместо переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ каждое уравнение СЛАУ становится верным равенством.

СЛАУ называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если у неё нет ни одного решения.

СЛАУ называется ***определённой***, если у неё ровно одно решение, и ***неопределённой***, если у неё больше одного решения.

Примеры:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

совместная и определённая, единственное решение $(2; 1)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$$

несовместная

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

совместная и неопределённая, общее решение $x_1 = 3 - x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}$

Формы записи СЛАУ

1) Координатная форма записи СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

2) Векторная форма записи СЛАУ

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \ \dots + \vec{a}_n x_n = \vec{b},$$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \dots, \ \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

3) Матричная форма записи СЛАУ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad AX = B.$$

Основная матрица СЛАУ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица СЛАУ

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Критерий совместности СЛАУ

Теорема (Кро́некера-Капе́лли): $AX = B$ совместна $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|b)$.

Доказательство: пусть СЛАУ $\vec{a}_1 x_1 + \ \dots + \vec{a}_n x_n = \vec{b}$ совместна $\Rightarrow$

$\vec{b}$ является линейной комбинацией столбцов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ матрицы A $\Rightarrow$

для базисного минора матрицы A ранга k, расположенного для определённости в левом верхнем углу, $\forall j > k$ имеем

$$\vec{a}_j = \lambda_{1j}\vec{a}_1 + \ \dots + \lambda_{kj}\vec{a}_k \ \Rightarrow$$

$$\vec{b} = \left(x_1 + \lambda_{1,k+1}x_{k+1} + \ \dots + \lambda_{1,n}x_n\right)\vec{a}_1 + \ \dots +$$
$$+ \left(x_k + \lambda_{k,k+1}x_{k+1} + \ \dots + \lambda_{k,n}x_n\right)\vec{a}_k \ \Rightarrow \ \operatorname{Rg}(A|b) = \operatorname{Rg} A;$$

обратно, $\operatorname{Rg}(A|b) = \operatorname{Rg} A$ $\Rightarrow$

$\forall$ базисный минор матрицы A является базисным и в матрице $(A|b)$ $\Rightarrow$

по теореме о базисном миноре $\vec{b}$ является линейной комбинацией столбцов базисного минора $\vec{b} = \vec{a}_1 x_1 + \ \dots + \vec{a}_k x_k + \vec{a}_{k+1} \cdot 0 + \ \dots + \vec{a}_n \cdot 0$

$\square$

Формулы Крамера

Теорема: СЛАУ $AX = B$ с квадратной невырожденной матрицей A имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \qquad k \in \overline{1, n},$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_k – определитель, полученный из $\det A$ заменой k-го столбца на B.

Доказательство: из матричной записи $AX = B$ выводим

$$X = A^{-1}B = \frac{A^*B}{\det A} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$x_k = \frac{A_{1k}b_1 + \dots + A_{nk}b_n}{\det A} = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad \square$$

Следствие: однородная СЛАУ $AX = 0$ с квадратной невырожденной матрицей A имеет только нулевое решение.