Аналитическая геометрия

Лекция 15

Однородные и неоднородные СЛАУ

Свойства решений однородной СЛАУ

Теорема: всякая линейная комбинация решений $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(s)}$ однородной СЛАУ $AX = 0$ также является решением этой СЛАУ.

Доказательство: $A\left(\sum_k \lambda_k \vec{x}^{(k)}\right) = \sum_k \lambda_k A\left(\vec{x}^{(k)}\right) = 0$ □

Следствие: если однородная СЛАУ имеет ненулевое решение, то она имеет бесконечно много решений.

Доказательство: вместе с $\vec{x} \neq \vec{0}$ решением будет также $\lambda\vec{x}$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ □

Фундаментальной системой решений (***ФСР***) однородной СЛАУ называется любой упорядоченный набор из $n - r$ линейно независимых решений, где n – количество переменных, а r – ранг основной матрицы системы.

При фиксировании базисного минора основной матрицы системы переменные, отвечающие базисным столбцам, будем называть ***базисными*** (***зависимыми***), а переменные, не являющиеся базисными, будем называть ***свободными*** (***независимыми***).

Теорема о существовании ФСР однородной СЛАУ

Теорема: для любой однородной СЛАУ $AX = 0$, в которой ранг r матрицы A меньше числа n переменных, существует ФСР.

Доказательство: пусть базисный минор расположен в левом верхнем углу основной матрицы системы, тогда по теореме о базисном миноре в системе можно оставить только первые r уравнений; перенесём свободные переменные в правые части уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ \dots - a_{2n}x_n \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ \dots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

отсюда по свободным переменным однозначно по формулам Крамера определяются базисные; рассмотрим $n - r$ линейно независимых решений $\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n-r)}$, полагая в $\vec{x}^{(i)}$ свободная переменная $x_{r+i} = 1$, а остальные свободные переменные равны нулю;

Теорема о существовании ФСР однородной СЛАУ

Теорема: для любой однородной СЛАУ $AX = 0$, в которой ранг r матрицы A меньше числа n переменных, существует ФСР.

Доказательство: осталось показать, что $\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n-r)}$ линейно независимы, составим линейную комбинацию

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ \ldots + \alpha_{n-r} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ \vdots \\ x_r^{(n-r)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ \ldots\ = \alpha_{n-r} = 0$ □

Построенная в доказательстве ФСР называется ***нормальной***.

Следствия из теоремы о существовании ФСР однородной СЛАУ

Следствие: любое решение однородной СЛАУ является линейной комбинацией решений некоторой нормальной ФСР.

Доказательство: коэффициенты в линейной комбинации совпадают с последними $n - r$ координатами решения $\square$

Следствие: для однородной СЛАУ с квадратной основной матрицей A $\exists$ ненулевое решение $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$.

Доказательство: ранее доказано, что если $\det A \neq 0$, то существует только нулевое решение; если же $\det A = 0$, то $\operatorname{Rg} A < n$ и существует нормальная ФСР, любое решение которой является ненулевым $\square$

Теорема о структуре общего решения однородной СЛАУ

Теорема: если $\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}$ – ФСР однородной СЛАУ, то
$\forall$ решения $\vec{x}$, $\exists\, c_1, \ldots, c_k$ такие, что $\vec{x} = c_1\vec{x}^{(1)} + \ldots + c_k\vec{x}^{(k)}$.

Доказательство: как и ранее, оставляем только первые r уравнений и по формулам Крамера выражаем базисные переменные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ x_r = \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn}x_n \end{cases}$$

из вектор-столбцов $\vec{x}, \vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}$ составляем матрицу B; в ней минимум k линейно независимых столбцов (образуют ФСР) и максимум k линейно независимых строк (так как первые r строк содержат базисные переменные и выражаются через остальные),
поэтому $\operatorname{Rg} B = k$ и по теореме о базисном миноре первый столбец $\vec{x}$ является линейной комбинацией остальных $\square$

Теорема об элементарных преобразованиях строк основной матрицы однородной СЛАУ

Теорема: при элементарных преобразованиях строк основной матрицы однородной СЛАУ множество её решений не меняется.

Доказательство:

1) при перестановке строк матрицы уравнения в системе также переставляются, но порядок расположения уравнений в системе, очевидно, никак не влияет на множество решений СЛАУ;

2) при умножении i-й строки матрицы на ненулевое число λ уравнение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \dots + a_{in}x_n = 0$$

меняется на уравнение

$$\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \ \dots + \lambda a_{in}x_n = 0,$$

которое, очевидно, имеет те же решения, что и исходное;

Теорема об элементарных преобразованиях строк основной матрицы однородной СЛАУ

Теорема: при элементарных преобразованиях строк основной матрицы однородной СЛАУ множество её решений не меняется.

Доказательство:

3) при прибавлении к i-й строке k-й строки, умноженной на λ, пара уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \dots + a_{in}x_n = 0,$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ \dots + a_{kn}x_n = 0$$

меняется на пару уравнений

$$(a_{i1} + \lambda a_{k1})x_1 + (a_{i2} + \lambda a_{k2})x_2 + \ \dots + (a_{in} + \lambda a_{kn})x_n = 0,$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ \dots + a_{kn}x_n = 0,$$

и ясно, что если упорядоченный набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет одной из пар уравнений, то он удовлетворяет и другой паре, поскольку первое уравнение во второй паре можно переписать в следующем виде

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \dots + a_{in}x_n) + \lambda(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ \dots + a_{kn}x_n) = 0 \ \square$$

Алгоритм решения однородной СЛАУ и нахождения ФСР

- элементарными преобразованиями строк привести основную матрицу системы к ступенчатому виду;
- назначить базисными те переменные, которым соответствуют номера столбцов, в которых расположены первые ненулевые элементы строк в ступенчатой матрице;
- перейти от ступенчатой матрицы к системе и, двигаясь снизу-вверх, выразить базисные переменные через свободные – это будет общее решение системы;
- полагая по очереди каждую свободную переменную равной 1, а остальные свободные переменные равными 0, получаем ФСР.

Пример решения однородной СЛАУ и нахождения ФСР

Пример: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

приведём основную матрицу системы к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}_{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

положим переменные x_1 и x_4 – базисные, а x_2 и x_3 – свободные;

перейдём к системе со ступенчатой матрицей $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_4 = 0; \end{cases}$

тогда общее решение: $x_1 = 2x_2 - x_3, \;\; x_4 = 0, \;\; x_2, x_3 \in \mathbb{R};$

найдём нормальную ФСР: $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

тогда общее решение можно записать как $X = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Структура решений неоднородной СЛАУ

Однор. СЛАУ $AX = 0$ называется ***ассоциированной*** с неоднор. СЛАУ $AX = B$.

Теорема (о связи решений неоднородной СЛАУ и ассоциированной однородной СЛАУ): пусть $\vec{x}^0$ является решением неоднородной СЛАУ $AX = B$, тогда $\vec{x}$ является решением $AX = B \iff \exists$ решение $\vec{y}$ ассоциированной однородной СЛАУ $AX = 0$ такое, что $\vec{x} = \vec{x}^0 + \vec{y}$.

Доказательство: для $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}^0$ имеем $A\vec{y} = A\vec{x} - A\vec{x}^0 = B - B = 0$;

обратно, $A\vec{x} = A\vec{x}^0 + A\vec{y} = B + 0 = B$ $\square$

Следствие: для решений $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ неоднородной СЛАУ $AX = B$ их разность $\vec{x} - \vec{x}'$ является решением ассоциированной однородной СЛАУ $AX = 0$.

Теорема (о структуре общего решения неоднородной СЛАУ):
если $\vec{x}^0$ – решение неоднородной СЛАУ $AX = B$ и $\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}$ – ФСР ассоциированной однородной СЛАУ $AX = 0$, то $\forall \vec{x}$ – решение неоднородной СЛАУ $AX = B$, $\exists\ c_1, \ldots, c_k$ такие, что $\vec{x} = \vec{x}^0 + c_1\vec{x}^{(1)} + \ldots + c_k\vec{x}^{(k)}$ $\square$

Теорема: при элементарных преобразованиях строк расширенной матрицы неоднородной СЛАУ множество её решений не меняется.

Алгоритм решения неоднородной СЛАУ

- элементарными преобразованиями строк привести расширенную матрицу системы к ступенчатому виду,
- по теореме Кронекера-Капелли проверить совместность системы,
- назначить базисными те переменные, которым соответствуют номера столбцов, в которых расположены первые ненулевые элементы строк в ступенчатой матрице;
- перейти от ступенчатой матрицы к системе и, двигаясь снизу-вверх, выразить базисные переменные через свободные – это будет общее решение системы.

Пример решения неоднородной СЛАУ

Пример: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \end{cases}$

приведём расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)_{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right);$$

$\operatorname{Rg} A = 2 = \operatorname{Rg}(A|b)$, поэтому система совместна;

положим переменные x_1 и x_4 – базисные, а x_2 и x_3 – свободные;

перейдём к системе со ступенчатой матрицей $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_4 = -3; \end{cases}$

тогда общее решение: $x_1 = 2x_2 - x_3 - 1, \quad x_4 = -3, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R};$

ФСР ассоциированной однородной СЛАУ: $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

общее решение можно записать как $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$