

Домашнее задание №1
по курсу "Дискретная математика"
Модуль 1 - Множества и отношения
Для специальности РТ5, 2 курс, 4 семестр, 2021 г.

Задача 1 (2 балла)

Для заданного теоретико-множественного тождества:

- а) проиллюстрировать тождество диаграммой Эйлера — Венна;
б) проверить тождество методом эквивалентных преобразований и методом характеристических функций.

№ вар.	Тождество	№ вар.	Тождество
1	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	16	$(A \cup (A \Delta B) \cup (A \Delta C)) \setminus ((B \cup C) \cap \bar{A}) = A$
2	$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$	17	$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \Delta (B \cup C)) \setminus (B \cup C)$
3	$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$	18	$(A \cap B \cap \bar{C}) \Delta (A \cap B \cap C) = A \cap B$
4	$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$	19	$(A \setminus B) \Delta (A \setminus C) = (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{C} \cap B)$
5	$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$	20	$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \bar{A} \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C))$
6	$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$	21	$(A \Delta B) \setminus (A \cup C) = B \cap \bar{A} \cap \bar{C}$
7	$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{C})$	22	$(A \cup B) \Delta (A \cap B) = A \Delta B$
8	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$	23	$(A \setminus B) \Delta (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$
9	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	24	$((A \setminus B) \setminus C) \Delta (B \cup C) = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cup (B \cup C)$
10	$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = ((\bar{A} \Delta \bar{B}) \setminus C) \cap A$	25	$((A \Delta B) \cup (A \Delta C)) \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$
11	$A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$	26	$(A \Delta B) \cap (B \Delta C) = (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$
12	$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$	27	$(A \cup B) \Delta (A \setminus B) = B$
13	$((A \cap B) \Delta A) \setminus A \cup (C \Delta B) = (C \cup B) \setminus (C \cap B)$	28	$(A \setminus B) \Delta (A \cap B) = A$
14	$(A \cap B \cap C) \Delta (A \cup B) = ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \Delta B)$	29	$(A \Delta B) \Delta (B \Delta C) = A \Delta C$
15	$(A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (B \cap C) = C$	30	$A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$

Задача 2 (2 балла)

Для заданных на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ бинарных отношений ρ и τ :

- а) записать матрицы и построить графики;
- б) матричным методом найти композицию $\rho \circ \tau$, построить график отношения;
- в) исследовать свойства отношений ρ , τ и $\rho \circ \tau$ (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).

№ вар.	ρ	τ
1	$\{(x, y): (x + y) \neq 0 \pmod{2}\}$	$\{(x, y): -1 \leq x - y < 0\}$
2	$\{(x, y): (x - y) = 0 \pmod{2}\}$	$\{(x, y): 2 \leq x \leq y - 1\}$
3	$\{(x, y): (2x + 2y) \neq 0 \pmod{3}\}$	$\{(x, y): 2x - 1 < y\}$
4	$\{(x, y): xy \leq 8\}$	$\{(x, y): x - y \leq 1\}$
5	$\{(x, y): x(6 - y) \leq 8\}$	$\{(x, y): x - y > 2\}$
6	$\{(x, y): x(3 - y) \leq 3\}$	$\{(x, y): x = 0 \pmod{y}\}$
7	$\{(x, y): (3 - x)(3 - y) \leq 1\}$	$\{(x, y): x + y < 5\}$
8	$\{(x, y): (x - 2)(y - 2) \leq 1\}$	$\{(x, y): 2x \geq 3y\}$
9	$\{(x, y): 5 \leq x + y \leq 8\}$	$\{(x, y): 4 \leq xy \leq 6\}$
10	$\{(x, y): x - y < 2\}$	$\{(x, y): 2 < x + y \leq 5\}$
11	$\{(x, y): 2 \leq x - 2y \leq 4\}$	$\{(x, y): (x + y + 1) = 0 \pmod{2}\}$
12	$\{(x, y): (7x - 2y) \neq 0 \pmod{4}\}$	$\{(x, y): x - y \geq 2\}$
13	$\{(x, y): (4 - x)(2 - y) \leq 1\}$	$\{(x, y): 1 \leq (x - 2)y < 8\}$
14	$\{(x, y): x \geq y + 1\}$	$\{(x, y): (4 - x)(4 - y) \leq 1\}$
15	$\{(x, y): y > x + 1\}$	$\{(x, y): x - y \leq 1\}$
16	$\{(x, y): (x + y) \neq 0 \pmod{2}\}$	$\{(x, y): 6 \leq xy \leq 12\}$
17	$\{(x, y): (x + y) = 0 \pmod{2}\}$	$\{(x, y): 2 \leq y \leq x - 1\}$
18	$\{(x, y): x - y < 0\}$	$\{(x, y): 4 \leq xy \leq 9\}$
19	$\{(x, y): x - y \leq 1\}$	$\{(x, y): x(y - 2) \leq 3, x \neq y\}$
20	$\{(x, y): x - y \geq 2\}$	$\{(x, y): x(6 - y) \leq 8, x \neq y\}$
21	$\{(x, y): y = 0 \pmod{x}\}$	$\{(x, y): (5 - x)(5 - y) \leq 5\}$
22	$\{(x, y): x + y \leq 7\}$	$\{(x, y): (x - 3)(5 - y) \leq 1\}$
23	$\{(x, y): 3x \leq 2y\}$	$\{(x, y): 1 \leq (2 - x)(2 - y) \leq 3\}$
24	$\{(x, y): 2 \leq xy \leq 5\}$	$\{(x, y): 2 \leq x \leq y^2 - 3\}$
25	$\{(x, y): 3 < x + y < 6\}$	$\{(x, y): x - y^2 \leq 2\}$
26	$\{(x, y): x + y + 2 = 0 \pmod{3}\}$	$\{(x, y): 3 \leq x^2 - y \leq 5\}$
27	$\{(x, y): x - y + 1 = 0 \pmod{3}\}$	$\{(x, y): 0 \leq x^2 - xy \leq 9\}$
28	$\{(x, y): 0 \leq xy \leq 8\}$	$\{(x, y): (5 - x)(y^2 - 3) \geq 14\}$
29	$\{(x, y): 0 \leq (2 - x)(2 - y) \leq 9\}$	$\{(x, y): 1,5x - y \leq 0\}$
30	$\{(x, y): 2 \leq (x - 1)(y - 1) \leq 6\}$	$\{(x, y): 0,5y - x \leq -3\}$

Задача 3 (2 балла)

Для булевой функции f , заданной в таблице 1, с использованием карты Карно:

- а) найти сокращенную ДНФ; б) найти ядро функции;
 в) получить все тупиковые ДНФ и указать, какие из них являются кратчайшими и минимальными;
 г) для минимальных ДНФ изобразить на картах Карно ядро и соответствующие покрытия склейками.

Таблица 1

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0 0 0 0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 0 0 1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0 0 1 0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1
0 0 1 1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
0 1 0 0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0 1 0 1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0 1 1 0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0 1 1 1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1 0 0 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1 0 0 1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1 0 1 0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1 0 1 1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1 1 0 0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
1 1 0 1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1 1 1 0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1 1 1 1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
№ варианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0 0 0 0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
0 0 0 1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0 0 1 0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1 1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0 1 0 0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0 1 0 1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0 1 1 0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0 1 1 1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
1 0 0 0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
1 0 0 1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1 0 1 0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
1 0 1 1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1 1 0 0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1
1 1 0 1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0
1 1 1 0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
1 1 1 1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1

Задача 4 (2 балла)

Даны функции f (таблица 2) и w (таблица 3).

а) Вычислить таблицу значений функции f .

б) Найти минимальные ДНФ функций f и w .

в) Выяснить полноту системы $\{f, w\}$. Если система не полна, дополнить систему функцией g от трёх переменных до полной системы. При этом нельзя дополнять функцией, образующей с f или w полную подсистему, кроме случаев, когда иное невозможно.

г) реализовать базовые функции $\wedge, \vee, \overline{}, 0, 1$ формулами над $\{f, w\}$ или $\{f, w, g\}$. Для реализации \wedge использовать полином Жегалкина нелинейной функции.

Таблица 2

№	$f(x_1, x_2, x_3)$	№	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	$(x_2 x_2 \vee x_3)(x_2 \downarrow \bar{x}_3) \vee (x_1 \oplus x_3)$	16	$\overline{((\bar{x}_2 \vee (\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_2)) \downarrow (x_1 \vee \bar{x}_3))} \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$
2	$((\bar{x}_1 \Rightarrow (\bar{x}_3 \Rightarrow x_1)) \downarrow (x_2 x_3)) \vee (\bar{x}_1 \downarrow x_3)$	17	$((\bar{x}_1 \vee x_2) \sim x_3) \sim (x_2 \sim x_3) \Rightarrow (\bar{x}_1 \vee x_3)$
3	$((x_3 \Rightarrow (x_1 \sim x_2)) \oplus (\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_1)) \Rightarrow (\bar{x}_2 \bar{x}_3)$	18	$(x_1 \oplus (x_1 \vee \bar{x}_3))(x_2 \oplus \bar{x}_3) \sim \bar{x}_1 \bar{x}_3$
4	$(x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \Rightarrow (x_1 \oplus x_3)$	19	$((\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \Rightarrow (\bar{x}_2 \sim x_3)) \sim (x_1 \sim \bar{x}_3)$
5	$(x_1(x_1 \oplus \bar{x}_3) \Rightarrow (x_1 \sim \bar{x}_2)) (x_1 \downarrow \bar{x}_2)$	20	$\bar{x}_1(x_1 \downarrow \bar{x}_2)(x_1 \oplus \bar{x}_3) \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$
6	$(x_3 \Rightarrow (x_2 \sim \bar{x}_3)) \vee (x_1 \oplus \bar{x}_2) \oplus x_1 x_2$	21	$((\bar{x}_1 x_3) \oplus x_2) \Rightarrow (x_2 \Rightarrow \bar{x}_1) \oplus \bar{x}_2 \oplus \bar{x}_3$
7	$(\bar{x}_1 \vee (\bar{x}_1 \oplus x_2) \vee x_2 \bar{x}_3) (\bar{x}_1 \sim \bar{x}_3)$	22	$(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_3 \oplus x_3 \oplus (x_1 \sim \bar{x}_2)) (x_1 \downarrow x_3)$
8	$\overline{((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \Rightarrow x_3) \Rightarrow (\bar{x}_1 \sim \bar{x}_2)} \downarrow (x_1 \sim x_3)$	23	$(\bar{x}_1(\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_1) \sim (x_2 x_3)) \downarrow \overline{(x_1 \vee x_2)}$
9	$(x_1 \oplus x_3 \oplus (x_2 x_2 x_3)) (\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_3)$	24	$((x_1 \oplus x_2) \vee x_2) \Rightarrow (\bar{x}_2 x_3) \vee (x_2 \oplus \bar{x}_3)$
10	$((x_1 \vee (x_2 \Rightarrow x_3)) \Rightarrow x_1 x_2) \vee (\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_3)$	25	$((x_1 \bar{x}_3) \oplus (x_2 x_3 \vee \bar{x}_3)) \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$
11	$((x_2 \Rightarrow (x_1 \oplus x_3)) \oplus (\bar{x}_2 \sim x_3)) \Rightarrow (\bar{x}_2 \bar{x}_3)$	26	$((\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \oplus (\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_1)) \sim (\bar{x}_2 \bar{x}_3)$
12	$\bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee ((\bar{x}_3 \oplus (x_2 \Rightarrow x_1)) \Rightarrow (\bar{x}_1 \sim x_2))$	27	$((\bar{x}_1 \Rightarrow (x_1 \sim \bar{x}_3)) \sim (\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2)) \vee x_1$
13	$((\bar{x}_1 \Rightarrow (\bar{x}_2 \sim x_3)) \oplus (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)) \vee (x_1 \oplus \bar{x}_2)$	28	$((x_1 \vee x_1 x_3) \oplus (x_2 \downarrow \bar{x}_3)) \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$
14	$(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee (\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_1)) \sim \overline{(x_2 \downarrow x_3)}$	29	$((\bar{x}_3 \Rightarrow (x_2 \bar{x}_3))(\bar{x}_1 \sim \bar{x}_3)) \sim (x_1 \sim x_2)$
15	$(\bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \oplus x_3) \oplus (\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_3)$	30	$x_1(\bar{x}_1 x_3)(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_3) \Rightarrow (x_2 \sim x_3)$

Таблица 3

№	w	№	w	№	w
1	(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)	11	(1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)	21	(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)
2	(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)	12	(0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)	22	(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)
3	(0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)	13	(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)	23	(1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0)
4	(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)	14	(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)	24	(1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)
5	(1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)	15	(1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)	25	(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)
6	(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)	16	(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)	26	(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)
7	(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0)	17	(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)	27	(1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)
8	(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)	18	(1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)	28	(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)
9	(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1)	19	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)	29	(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)
10	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0)	20	(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)	30	(1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)