Ткачев С.Б.
каф. Математического моделирования
МГТУ им. Н.Э. Баумана

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

**ИУ5 — 4 семестр, 2015 г.**

# Лекция 6. ТЕОРЕМА ПОСТА

# 6.1. Полные множества булевых функций

**Определение 6.1.** Множество булевых функций $F$ называют **полным**, если любая булева функция может быть представлена некоторой формулой над $F$.

**Стандартный базис** $\{\vee, \wedge, \overline{\ }\}$ является **полным множеством**, в силу теоремы о **представлении** любой **булевой функции дизъюнктивной** или **конъюнктивной нормальной формой**.

**Теорема 1.** Пусть $F$ и $G$ — некоторые множества булевых функций, причем $F$ — полное множество. Тогда, если каждая функция из $F$ может быть представлена некоторой **формулой над множеством** $G$, то $G$ — полное множество. (без доказательства)#

Базис $\{\wedge, \overline{\phantom{x}}\}$ является полным множеством. Согласно **законам де Моргана**, **дизъюнкцию** можно выразить через **конъюнкцию** и **отрицание**.

Базис $\{\vee, \overline{\phantom{x}}\}$ является полным множеством. Согласно **закону де Моргана**, **конъюнкцию** можно выразить через **дизъюнкцию** и **отрицание**

$$x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}.$$

**Пример 6.1.** Рассмотрим множество, состоящее из единственной функции — **штриха Шеффера**: $\{|\}$ ( $x|y = \overline{x \cdot y}$ ).

Это множество полно, т.к. любая функция стандартного базиса может быть представленя формулой над $\{|\}$ :

$$\overline{x} = (x|x),$$
$$x \cdot y = \overline{(\overline{x \cdot y})} = \overline{(x|y)} = (x|y)|(x|y),$$
$$x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{(x|x) \cdot (y|y)} = (x|x)|(y|y).$$

# 6.2. Базис Жегалкина

Рассмотрим **базис Жегалкина** $\{\oplus, \cdot, 1\}$.
Чтобы доказать полноту этого множества, представим каждый элемент стандартного базиса формулой над базисом Жегалкина

$$x \vee y = x \cdot y \oplus x \oplus y, \quad \overline{x} = x \oplus 1.$$

В силу полноты стандартного базиса и теоремы 1 базис Жегалкина является полным.

**Полином Жегалкина**.

Общий вид полинома Жегалкина от трех переменных:

$$a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus \\ \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0 \quad (6.1)$$

Полином Жегалкина от $n$ переменных можно записать в виде

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_m\} \subseteq I} \pmod 2\, a_{i_1 i_2 \ldots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m},$$

где $I = \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$, а коэффициенты полинома $a_{i_1 i_2 \ldots i_m} \in \{0,\, 1\}$ индексированы всеми возможными подмножествами множества $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ (коэффициент $a_0$ соответствует пустому множеству).

**Утверждение 6.1.** Полином Жегалкина для любой булевой функции определен однозначно.

Доказательство.
Количество коэффициентов в полиноме Жегалкина от $n$ переменных равно числу подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, т.е. $2^n$. Каждый коэффициент может принимать два значения — 0 и 1. Следовательно, различных полиномов Жегалкина столько же, сколько булевых функций от $n$ переменных — $2^{(2^n)}$.

Для функций от небольшого числа переменных (не превышающего 4) можно использовать **метод неопределенных коэффициентов**, позволяющий получить полином Жегалкина данной функции. Проиллюстрируем этот метод на примере.

**Пример 6.2.** Пусть $f = (1,1,0,0,1,0,1,1)$. Найдем полином Жегалкина, представляющий $f$.

Функция $f$ представляется некоторым полиномом Жегалкина третьей степени, общий вид которого дает формула

$$a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus \\ \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0 \quad (6.2)$$

Значение функции $f$ на наборе $000$ равно коэффициенту $a_0$ :

$$f(0,0,0) = a_0 = 1.$$

Чтобы найти коэффициенты $a_3$ , $a_2$ и $a_1$ , нужно рассмотреть значения функции на наборах $001$ , $010$ и $100$ соответственно.

$$f(0,0,1) = a_3 \oplus a_0 = a_3 \oplus 1 = 1,$$

Решая это уравнение относительно $a_3$ в поле $\mathbb{Z}_2$ , получим $a_3 = 0$ ;

$$f(0,1,0) = a_2 \oplus 1 = 0 \;\Rightarrow\; a_2 = 1;$$

$$f(1,0,0) = a_1 \oplus 1 = 1 \;\Rightarrow\; a_1 = 0;$$

Чтобы найти коэффициенты $a_{12}$, $a_{13}$ и $a_{23}$, нужно рассмотреть значения функции на наборах $110$, $101$ и $011$ соответственно.

Для первого набора получим

$$f(1,1,0) = a_{12}x_1x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_0 = \\ = a_{12} \oplus a_2 \oplus a_0 = a_{12} \oplus 1 \oplus 1 = a_{12}$$

(сумма по модулю 2 любого четного числа равных слагаемых равна 0).
Поскольку $f(1,1,0) = 1$, то $a_{12} = 1$.
Аналогично находим $a_{13}$. $f(1,0,1) = 0$

$$f(1,0,1) = a_{13} \oplus a_0 = a_{13} \oplus 1 = 0$$

откуда $a_{13} = 1$;

$$f(0,1,1) = a_{23} \oplus a_2 \oplus a_0 = a_{23} \oplus 1 \oplus 1 = 0,$$

$a_{23} = 0$.

$$f(1,1,1) = a_{123} \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_2 \oplus a_0 = a_{123} = 1.$$

Полином Жегалкина, представляющий $f$ есть:

$$f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2 \oplus 1.$$

# 6.3. Классы Поста

Рассмотрим некоторые специальные множества функций.

**Определение 6.2.** Функцию $f$ называют **функцией, сохраняющей константу 0**, если $f(\tilde{0}) = 0$, где $\tilde{0}$ — нулевой набор значений переменных функции $f$.

**Определение 6.3.** Функцию $f$ называют **функцией, сохраняющей константу константу 1**, если $f(\tilde{1}) = 1$, где $\tilde{1}$ — единичный набор значений переменных функции $f$.

Например, функция $f = (00111101)$ является функцией, сохраняющей и константу 0, и константу 1.
Отрицание не сохраняет ни 0, ни 1.

Множество всех функций, сохраняющих константу 0 обозначается через $T_0$ .

Множество всех функций, сохраняющих константу 1 обозначается через $T_1$ .

Наборы $\tilde{\alpha}$ и $\overline{\tilde{\alpha}}$ из булева куба $\mathbb{B}^n = \{0,\ 1\}^n$ (для произвольного фиксированного $n$) будем называть **взаимно противоположными**.

Говорят, что набор $\overline{\tilde{\alpha}}$ есть **отрицание набора** $\tilde{\alpha}$.

**Определение 6.4.** Функцию $g \in \mathcal{P}_{2,n}$ называют **двойственной к функции** $f \in \mathcal{P}_{2,n}$, если для всякого $\tilde{\alpha} \in \{0,\ 1\}^n$ ($n > 0$) имеет место

$$g(\tilde{\alpha}) = \overline{f}(\overline{\tilde{\alpha}}).$$

Константа 0 является двойственной к константе 1 и наоборот.

**Пример 6.3.**

**а.** Стрелка Пирса есть функция, двойственная к штриху Шеффера, так как

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{\overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}} = \overline{\overline{x} | \overline{y}}.$$

**б.** Сумма по модулю 2 двойственна к эквивалентности, так как

$$x \sim y = \overline{x \oplus y} = \overline{\overline{x} \oplus \overline{y}}.$$

В общем случае в силу свойства единственности отрицания функция $h$, двойственная к функции $g$, которая двойственна к $f$, равна $f$.

**Определение 6.5.** Функцию $f \in \mathcal{P}_{2,n}$ называют **самодвойственной**, если она двойственна к себе самой, т.е.

$$(\forall \tilde{\alpha} \in \{0,\, 1\}^n)(f(\tilde{\alpha}) = \overline{f}(\overline{\tilde{\alpha}})),$$

или

$$(\forall \tilde{\alpha} \in \{0,\, 1\}^n)(f(\overline{\tilde{\alpha}}) = \overline{f}(\tilde{\alpha})).$$

Функция самодвойственна тогда и только тогда, когда на взаимно противоположных наборах она принимает взаимно противоположные значения.

Для того чтобы убедиться в несамодвойственности заданной функции $f$, достаточно найти хотя бы одну пару взаимно противоположных наборов $\tilde{\alpha}$ и $\overline{\tilde{\alpha}}$, таких, что значения функции на них совпадают, т.е. $f(\tilde{\alpha}) = f(\overline{\tilde{\alpha}})$.

Так, функция $f_1 = (0101)$ является самодвойственной, поскольку

$$f_1(0,0) = 0 = \overline{f}_1(\overline{0},\overline{0}) = \overline{f}_1(1,1) = \overline{1} = 0,$$

$$f_1(0,1) = 1 = \overline{f}_1(\overline{0},\overline{1}) = \overline{f}_1(1,0) = \overline{0} = 1.$$

Функция $f_2 = (1001)$ (эквивалентность) не является самодвойственной, поскольку при $\tilde{\alpha} = (0,\ 0)$ $0 \sim 0 = 1$ и $1 \sim 1 = 1$.

Множество всех самодвойственных функций (при всех $n \geq 1$) обозначим $S$.

**Определение 6.6.** Функцию $f \in \mathcal{P}_{2,n}$ называют **монотонной**, если для любых наборов $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta} \in \mathbb{B}^n$, таких, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$, имеет место $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$.

Функция $f = (0011)$ монотонна. Штрих Шеффера — немонотонная функция, так как $00 < 11$, но $0|0 = 1$, а $1|1 = 0$. Множество всех монотонных функций принято обозначать через $M$.

Формула вида

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{mod}\, 2)\, a_i x_i \oplus a_0 \qquad (6.3)$$

называется **полиномом Жегалкина первой степени** от переменных. В таком полиноме отсутствуют „нелинейные“ слагаемые.

**Определение 6.7.** Функцию $f \in \mathcal{P}_{2,n}$ называют **линейной**, если она может быть представлена полиномом Жегалкина первой степени от $n$ переменных.

Например, $1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ — полином первой степени от $3$ переменных.
Множество всех линейных функций обозначают через $L$.

**Определение 6.8.** Множества функций $T_0$ , $T_1$ , $S$ , $M$ , $L$ называются **классами Поста**.

**Пример 6.4.** Штрих Шеффера не принадлежит ни одному из классов Поста.
Все свойства, кроме нелинейности, следуют из таблицы этой функции. Нелинейность же доказывается выводом полинома Жегалкина для штриха Шеффера:

$$x|y = \overline{x \cdot y} = x \cdot y \oplus 1.$$

Полученный полином Жегалкина имеет степень выше первой.

**Определение 6.9.** Множество булевых функций $F$ называют **замкнутым**, если любая формула над $F$ представляет некоторую функцию из $F$.

Фундаментальным свойством каждого класса Поста является его замкнутость (в смысле определения 6.9).

**Определение 6.10.** Функция $f(g_1, \ldots, g_n)$ называется **суперпозицией функций** $f$, $g_1$, …, $g_n$. Для любого $\tilde{\alpha} \in \mathbb{B}^m$ имеет место равенство

$$f(g_1, \ldots, g_n)(\tilde{\alpha}) = f(g_1(\tilde{\alpha}), \ldots, g_n(\tilde{\alpha})).$$

Замкнутость классов Поста: для любого из классов Поста $C$ всякая **суперпозиция над** $C$ снова есть элемент $C$.

**Теорема 2.** Каждый класс Поста замкнут.

◀ Для каждого класса Поста $C \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$ нужно доказать, что замыкание $[C]$ множества булевых функций $C$ совпадает с $C$, т.е. любая функция, представляемая формулой построенной над классом $C$, принадлежит этому классу.

Пусть $f(g_1, \ldots, g_n)$ — какая-то суперпозиция над $C$. Обозначим ее через $\varphi$.

Без ограничения общности можно считать, что все функции $f$, $g_1$, …, $g_n$ зависят от $n$ переменных (для некоторого $n$).

1. Рассмотрим $C = T_0$.

Пусть $f$, $g_1, \dots, g_n \in T_0$, т.е. $f(\tilde{0}) = 0$ и $g_i(\tilde{0}) = 0$.

Тогда $\varphi(\tilde{0}) = f(g_1(\tilde{0}), \dots, g_n(\tilde{0})) = f(0, \dots, 0) = 0$.

Следовательно, $\varphi \in T_0$.

2. При $C = T_1$ рассуждаем точно так же.

3. Пусть $C = S$, т.е. $f$, $g_1, \ldots, g_n \in S$. Докажем, что $\varphi = f(g_1, \ldots, g_m) \in S$.

Фиксируем произвольный набор $\tilde{\alpha} \in \{0, 1\}^n$ и покажем, что $\varphi(\overline{\tilde{\alpha}}) = \overline{\varphi}(\tilde{\alpha})$, используя самодвойственность всех функций:

$$\begin{aligned}\varphi(\overline{\tilde{\alpha}}) = f(g_1(\overline{\tilde{\alpha}}), \ldots, g_n(\overline{\tilde{\alpha}})) = \\ = f(\overline{g_1}(\tilde{\alpha}), \ldots, \overline{g_n}(\tilde{\alpha})) = \\ = \overline{f}(g_1(\tilde{\alpha}), \ldots, g_n(\tilde{\alpha})) = \overline{\varphi}(\tilde{\alpha}).\end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi \in S$.

4. $C = M$, т.е. $f$, $g_1, \ldots, g_n \in S$.
Берем произвольно наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ так, что $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$.
Докажем, что $\varphi = f(g_1, \ldots, g_m) \in M$. Имеем

$$\varphi(\tilde{\alpha}) = f(g_1(\tilde{\alpha}), \quad \ldots, \quad g_n(\tilde{\alpha})) \leq f(g_1(\tilde{\beta}), \quad \ldots, \quad g_n(\tilde{\beta}))$$

так как все функции $g_i$, $i = \overline{1, n}$, монотонны, вектор $(g_1(\tilde{\alpha}), \ldots, g_n(\tilde{\alpha}))$ не больше вектора $(g_1(\tilde{\beta}), \ldots, g_n(\tilde{\beta}))$, функция $f$ также монотонна. Следовательно, $\varphi \in M$.

5. Если же $C = L$, то очевидно, что при подстановке в линейную функцию (полином Жегалкина первой степени) вместо ее переменных произвольных линейных функций получится снова линейная функция.
Доказана замкнутость каждого класса Поста. ▶

Приведем теорему, характеризующую важное свойство немонотонных функций.

**Теорема 3.** Если функция $f$ не является монотонной, т.е. $f \notin M$, то найдутся два таких набора $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, что

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n),$$

и $f(\tilde{\alpha}) = 1$, $f(\tilde{\beta}) = 0$, т.е. эти два набора различаются значениями в точности одной компоненты, а значение функции равно 0 на большем наборе и равно 1 на меньшем.

# 6.4. Реализация функций формулами

**Реализация констант $0$ и $1$.**

Рассмотрим два случая реализации **констант** $0$ и $1$ .

**1.** Пусть имеется функция $f_0$ , не сохраняющая константу $0$ ( $f_0 \notin T_0$ ), и сохраняющая константу $1$ ( $f_0 \in T_1$ ), т.е. $f_0(0,\ldots,0) = 1$ и $f_0(1,\ldots,1) = 1$ .

Константа 1 представляется формулой

$$1 = f_0(x,\ldots,x).$$

Чтобы выразить константу $0$ , используем любую функцию $g \in F$ , не сохраняющую константу $1$ ( $g \notin T_1$ ):

$$0 = g(1,\ldots,1) = g(f_0(x,\ldots,x),\ldots,f_0(x,\ldots,x)).$$

Пусть имеется функция $f_1$, не сохраняющая константу $1$ ($f_0 \notin T_1$), но сохраняющая константу $0$ ($f_0 \in T_0$), т.е. $f_0(0, \ldots, 0) = 0$ и $f_0(1, \ldots, 1) = 0$.
Константа 0 представляется формулой

$$0 = f_0(x, \ldots, x).$$

Если существует функция $g \notin T_0$, то

$$1 = g(0, \ldots, 0) = g(f_0(x, \ldots, x), \ldots, f_0(x, \ldots, x)).$$

**2.** Реализация **констант** $0$ и $1$ из **несамодвойственной** функции с использованием отрицания.

**Утверждение.** Если функция несамодвойственная, то с использованием отрицания из нее можно реализовать константу.

Пусть функция $f_S$ — несамодвойственная. Тогда найдется такой набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, что

$$f_S(\overline{\tilde{\alpha}}) = f_S(\tilde{\alpha}).$$

Введем функцию от одного переменного

$$h(x) = f_S(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}).$$

Заметим, что

$$0^\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma = 0; \\ 0, & \sigma = 1. \end{cases}$$

Поэтому $0^{\alpha_i} = \overline{\alpha_i}$ . Аналогично $1^{\alpha_i} = \alpha_i$ .
Получим

$$h(0) = f_S(\overline{\tilde{\alpha}}) = f_S(\tilde{\alpha}) = h(1),$$

Таким образом, значение $h(x)$ есть константа.

# Реализация отрицания.

**Утверждение.** Если функция $f_M$ **немонотонная**, то с использованием констант 0 и 1 из нее можно реализовать отрицание.

Для немонотонной функции $f_M$ согласно теореме 3 найдутся два таких набора $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, что

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{i-1},\ 0,\ \alpha_{i+1},\ \ldots,\ \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{i-1},\ 1,\ \alpha_{i+1},\ \ldots,\ \alpha_n),$$

$f_M(\tilde{\alpha}) = 1$, а $f_M(\tilde{\beta}) = 0$.

Тогда

$$\overline{x} = f_M(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$.

**Частный случай.** Если для немонотонной функции имеет место $f_M \notin T_0$ и $f_M \notin T_1$, то

$$f_M(0, \ldots, 0) = 1,$$

$$f_M(1, \ldots, 1) = 0.$$

Тогда

$$\overline{x} = f_2(x, \ldots, x).$$

## Реализация конъюнкции с использованием констант и отрицания.

**Утверждение.** Если функция $f_L$ нелинейная, то с использованием констант и отрицания из нее можно реализовать конъюнкцию.

В полиноме Жегалкина этой функции выбираем произвольное нелинейное слагаемое, содержащее наименьшее число переменных.
Пусть это будет слагаемое $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ при $2 \leq k \leq n$.
Вместо каждого переменного $x_m$ функции $f_L$, где $m \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, подставим константу 0.

Получим новую функцию

$$\begin{aligned}
&f'_L(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \\
&\quad = x_{i_1} \ldots x_{i_k} \oplus a_{i_1} x_{i_1} \oplus \ldots \oplus a_{i_k} x_{i_k} \oplus a_0 = \\
&\quad\quad = f_L(0, \ldots, 0, x_{i_1}, 0, \ldots, 0, x_{i_k}, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

Разобьем множество переменных $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ на две части: $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$ и $\{x_{i_{m+1}}, \ldots, x_{i_k}\}$, где $1 \le m \le k-1$ так, чтобы после замены всех переменных первой части переменным $x$, а переменных второй части — переменным $y$, получить функцию от двух переменных

$$\chi(x, y) = xy \oplus ax \oplus by \oplus c,$$

где $a = a_{i_1} \oplus \ldots \oplus a_{i_m}$, $b = a_{i_{m+1}} \oplus \ldots \oplus a_{i_k}$, $c = a_0$.

Функция $\chi$ может быть представлена такой формулой над $F$ :

$$\chi(x,y) = f_L(0,\dots,0,\underbrace{x}_{i_1},0,\dots,0,\underbrace{x}_{i_m},0,\dots,0,$$
$$\underbrace{y}_{i_{m+1}},0,\dots,0,\underbrace{y}_{i_k},0,\dots,0),$$

Определим функцию

$$\psi(x,y) = \chi(x \oplus b, y \oplus a) \oplus ab \oplus c.$$

Выразив функцию $\psi(x, y)$ из полинома Жегалкина для $\chi$ , получим

$$\psi(x,y) = \chi(x \oplus b, y \oplus a) \oplus ab \oplus c =$$
$$= (x \oplus b)(y \oplus a) \oplus a(x \oplus b) \oplus b(y \oplus a) \oplus c \oplus ab \oplus c =$$
$$= xy \oplus ax \oplus by \oplus ab \oplus ax \oplus ab \oplus by \oplus ab \oplus c \oplus ab \oplus c =$$
$$= xy,$$

т.к. сумма по модулю 2 любого четного числа равных слагаемых равна $0$ .

Функция $\psi$ есть конъюнкция.

Прибавление к любой функции константы по модулю 2 есть либо сама исходная функция, либо ее отрицание. Поскольку отрицание доступно, то конъюнкция реализована формулой.

**Теорема 4 (критерий Поста).** Множество $F$ булевых функций полно тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов Поста.

◄ **Необходимость.** Пусть множество $F$ булевых функций полно. Предположим, что оно содержится целиком в одном из классов Поста, то есть для некоторого класса Поста $C$ выполняется $F \subseteq C$.

Всякая суперпозиция над $F$, согласно теореме 2, снова лежала бы в $C$.

Существуют функции, не содержащиеся ни в одном из классов Поста, например штрих Шеффера.

Таким образом, нашлась функция, которую нельзя представить в виде суперпозиции над $F$, что противоречит предположению о полноте $F$.

**Достаточность.** Для доказательства полноты множества $F$, удовлетворяющего условию теоремы, построим формулы над $F$ для **отрицания** и **конъюнкции**, поскольку множество, образованное этими функциями, полно. Тогда в силу теоремы 1 будет полным и множество $F$.

По условию теоремы в $F$ найдется хотя бы одна функция $f_1 \notin T_0$. Если $f_1 \in T_1$, то можно реализовать константу 1. Если $f_1 \notin T_1$, то можно реализовать отрицание.

По условию теоремы в $F$ найдется хотя бы одна функция $f_2 \notin T_1$. Если $f_2 \in T_0$, то можно реализовать константу 0. Если $f_2 \notin T_1$, то можно реализовать отрицание.

Таким образом, могут быть реализованы либо две константы 0 и 1, либо только отрицание, либо константы и отрицание.

По условию теоремы в $F$ найдется хотя бы одна **немонотонная** функция, хотя бы одна **несамодвойственная** функция и хотя бы одна **нелинейная** функция.

В случае, если из первых двух классов ( $T_0$ , $T_1$ ) построены только формулы для констант, с использованием немонотонной функции $f_M \notin M$ можно реализовать отрицание.

Если реализовано только отрицание, с использованием несамодвойственной функции $f_S \notin S$ можно реализовать константы.

Имея константы и отрицание, из нелинейной функции $f_L \notin L$ можно реализовать коньюнкцию.

Таким образом, отрицание и конъюнкция реализованы формулами над $F$ . Множество полно. ►

Чтобы исследовать полноту конкретного множества функций

$$F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\},$$

используют **критериальную таблицу**

*Таблица 6.1*

| | $T_0$ | $T_1$ | $S$ | $M$ | $L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | | | | | |
| $f_2$ | | | | | |
| $\vdots$ | | | | | |
| $f_n$ | | | | | |

Строки таблицы соответствуют функциям исследуемого множества, а столбцы — классам Поста.

**Пример 6.5.** Пусть $F = \{\sim,\ \vee,\ 0\}$.

Заполненная критериальная таблица:

*Таблица 6.2*

| | $T_0$ | $T_1$ | $S$ | $M$ | $L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sim$ | $-$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\vee$ | $+$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $0$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |

В множестве $F$ есть функции, не принадлежащие каждому из пяти классов Поста. Согласно теореме Поста, множество $F$ — полное.

**Реализация констант, отрицания и конъюнкции над $F$**

Константа 0 принадлежит самому множеству $F$ .

Функция $\sim$ (эквивалентность) не сохраняет константу $0$ , но сохраняет константу $1$ , поэтому $1 = x \sim x$ .

Поскольку $0 \sim 0 = 1$ , $1 \sim 0 = 0$ , то $\overline{x} = x \sim 0$ .

Конъюнкцию можно представить формулой над $F$ , следуя доказательтву теоремы Поста.
Берем единственную нелинейную функцию данного множества, дизъюнкцию, и записываем для нее полином Жегалкина:

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2.$$

Этот полином есть функция

$$\chi(x_1, x_2) = xy \oplus ax \oplus by \oplus c$$

при $a = b = 1$ и $c = 0$.

Следовательно,

$$x_1 \cdot x_2 = \chi(x_1 \oplus 1, x_2 \oplus 1) \oplus 1.$$

Так как $x \oplus 1 = \overline{x} = x \sim 0$, то

$$x_1 \cdot x_2 = \big(\underbrace{(x_1 \sim 0)}_{x_1 \oplus 1} \vee \underbrace{(x_2 \sim 0)}_{x_2 \oplus 1}\big) \sim 0.$$

Этот же результат в данном конкретном случае можно получить и гораздо проще:

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2} = ((x_1 \sim 0) \vee (x_2 \sim 0)) \sim 0.$$

**Замечание.** Это полное множество $F = \{\sim, \vee, 0\}$ двойственно к базису Жегалкина в том смысле, что каждая из его функций двойственна к соответствующей функции базиса Жегалкина: эквивалентность двойственна к сумме по модулю $2$, дизъюнкция — к конъюнкции, константа $0$ — к константе $1$.

Никакое собственное подмножество заданного множества не будет полным.