Ткачев С.Б.

каф. Математического моделирования
МГТУ им. Н.Э. Баумана

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ИУ5 — 4 семестр, 2015 г.

Лекция 10. АЛГЕБРЫ: ПОЛУКОЛЬЦА

Определение 10.1. **Полукольцо** — это алгебра с двумя **бинарными** и двумя **нульарными операциями**

$$\mathcal{S} = (S,\ +,\ \cdot,\ \mathbf{0},\ \mathbf{1}),$$

такая, что для произвольных элементов a, b, c множества S выполняются следующие равенства, называемые **аксиомами полукольца**:

1) $a + (b + c) = (a + b) + c$;
2) $a + b = b + a$;
3) $a + \mathbf{0} = a$;
4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
5) $a \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot a = a$;
6) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
7) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$;
8) $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot a = \mathbf{0}$.

Первую операцию $+$ называют **сложением полукольца**, вторую операцию $\cdot$ — **умножением полукольца** $\mathcal{S}$; элементы $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ называют соответственно **нулем** и **единицей полукольца** $\mathcal{S}$.

Аксиомы полукольца называют также **основными тождествами полукольца**.

Аксиому 8 полукольца называют **аннулирующим свойством нуля** в полукольце.

Полукольцо $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ — это алгебра с двумя бинарными и двумя нульарными операциями, такая, что:

1) алгебра $(S, +, \mathbf{0})$ является коммутативным моноидом; **аддитивный моноид полукольца**;

2) алгебра $(S, \cdot, \mathbf{1})$ является моноидом ; **мультипликативный моноид полукольца**;

3) имеют место свойства (двусторонней) дистрибутивности операции сложения относительно операции умножения;

4) выполняется аннулирующее свойство нуля.

Кольцо есть частный случай полукольца: если кольцо по сложению является абелевой группой, то полукольцо — лишь коммутативный моноид.

Выделим два вида полуколец:
1) **коммутативное полукольцо** с коммутативной операцией умножения;

2) **идемпотентное полукольцо** с идемпотентной операцией сложения.

Пример 10.1. Рассмотрим алгебру

$$\mathcal{R}^+ = (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\},\ \min,\ +,\ +\infty,\ 0),$$

где $\mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных действительных чисел, $\min$ — операция взятия наименьшего из двух данных чисел, $+$ — операция сложения действительных чисел, $+\infty$ — „плюс бесконечность“, 0 — число „нуль“.

Эта алгебра — полукольцо.
Операция взятия наименьшего из двух чисел $\min$ является операцией сложения, сложение действительных чисел $\mathcal{R}^+$ —операцией умножения полукольца.
Элемент $+\infty$ — нуль полукольца.
Элемент 0 — единица полукольца.

Проверим аксиомы полукольца.

Операция **сложения полукольца**.

Операция взятия $\min$ ассоциативна и коммутативна (доказать самостоятельно).

Элемент $+\infty$ есть нейтральный элемент относительно операции $\min$ (операции сложения в полукольце):

$$\forall(x \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}); \min(x, +\infty) = x.$$

Выполняются аксиомы 1,2,3 полукольца.

Алгебра $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \min, +\infty)$ — коммутативный моноид.

Операция **умножения полукольца**.

Операция сложения действительных чисел $+$ ассоциативна и коммутативна.

Элемент 0 есть нейтральный элемент относительно операции $+$ (операции умножения в полукольце):

$$\forall (x \in \mathbb{R}^{+} \cup \{+\infty\})\ (x + 0) = x.$$

Выполняются аксиомы 4,5 полукольца.

Алгебра $(\mathbb{R}^{+} \cup \{+\infty\},\ +,\ 0)$ — коммутативный моноид.

Проверим **свойства дистрибутивности** (аксиомы 6 и7):

$$a + \min(b,\ c) = \min(a + b,\ a + c).$$

Имеем

$$a + \min(b,\ c) = \begin{cases} a + b, & b \le c; \\ a + c, & b > c. \end{cases}$$

В то же время

$$\min(a + b,\ a + c) = \begin{cases} a + b, & b \le c; \\ a + c, & b > c. \end{cases}$$

Таким образом,

$$a + \min(b,\ c) = \min(a + b,\ a + c).$$

Элемент $+\infty$ также обладает **аннулирующим свойством** относительно операции сложения чисел (операции умножения в полукольце): $x + (+\infty) = +\infty$. Выполняется аксиома 8 полукольца.

В рассматриваемом полукольце умножение $+$ коммутативно, а сложение $\min$ идемпотентно.

Следовательно, $\mathcal{R}^+$ — идемпотентное коммутативное полукольцо.

Пример 10.2. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B} = (\{0, 1\}, +, \cdot, 0, 1)$, в которой операции $+$ и $\cdot$ заданы **таблицами Кэли**

Таблица 10.1 *Таблица 10.2*

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Проверка аксиом полукольца основана на этих таблицах.

Два элемента 0 и 1 одновременно являются соответственно нулем и единицей данного полукольца.

Полукольцо $\mathcal{B}$ коммутативное и идемпотентное.

Операции полукольца $\mathcal{B}$ можно трактовать как логические связки „или“ и „и“, а элементы 0 и 1 — как „ложь“ и „истина“ соответственно.

Алгебры, являющиеся полукольцами.

Пример 10.3. а. Алгебра $\mathcal{N} = (\mathbb{N} \cup 0,\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1)$ с носителем — множеством неотрицательных целых чисел — и операциями сложения и умножения чисел есть коммутативное полукольцо. Оно не является идемпотентным.

б. Алгебра $\mathcal{S}_A = (2^A,\ \cup,\ \cap,\ \varnothing,\ A)$ с носителем — множеством всех подмножеств некоторого множества A — и операциями объединения и пересечения есть полукольцо. Оно является идемпотентным и коммутативным.

Введем **отношение порядка** на носителе **идемпотентного** полукольца $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$:
для произвольных x , $y \in S$ положим $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x + y = y$, т.е.

$$x \leq y \Leftrightarrow x + y = y. \tag{10.1}$$

Покажем, что введенное бинарное отношение **рефлексивно**, **антисимметрично** и **транзитивно**.

Для идемпотентного полукольца

$$(\forall x)\ x + x = x \Rightarrow (x \leq x) \text{ (согласно (10.1))}$$

Отношение **рефлексивно**.

$$(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x + y = y) \wedge (y + x = x) \Rightarrow (x = y)$$

в силу коммутативности сложения.
Отношение **антисимметрично**.

$$\begin{gathered}(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x + y = y) \wedge (y + z = z) \Rightarrow \\ \Rightarrow x + z = x + (y + z) = (x + y) + z = y + z = z \Rightarrow \\ \Rightarrow x \leq z\end{gathered}$$

Отношение **транзитивно**.

Отношение $\leq$ на носителе произвольного идемпотентного полукольца есть отношение порядка.
Будем называть его **естественным порядком идемпотентного полукольца** и говорить, что он задан в этом полукольце.

Всякое идемпотентное полукольцо можно рассматривать как **упорядоченное множество**, причем отношение порядка определяется через сложение этого полукольца согласно (10.1).

Нуль идемпотентного полукольца $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ есть **наименьший элемент** относительно естественного порядка этого идемпотентного полукольца .
$\forall(x \in S)\ (\mathbf{0} \leq x\ )$ поскольку $\mathbf{0} + x = x\ \forall(x \in S)$.

Пример 10.4. В полукольце $\mathcal{B}$ (пример 10.2) выполняется равенство $0+1=1$ и, следовательно, $0 \leq 1$.

Пример 10.5. В полукольце $\mathcal{R}^+$ $x \leq y$, если и только если $\min(x, y) = y$.

Обозначим через $\leq_{\mathbb{R}}$ **естественный числовой порядок** на множестве действительных чисел.
Тогда для произвольных элементов x, y полукольца $\mathcal{R}^+$ соотношение $x \leq y$ означает, что $x \geq_{\mathbb{R}} y$, т.е. число x не меньше числа y относительно естественного числового порядка.
Таким образом, порядок в полукольце $\mathcal{R}^+$ — это **двойственный порядок** для отношения $\leq_{\mathbb{R}}$.

В полукольце есть **наименьший элемент** относительно введенного порядка — элемент $+\infty$, поскольку для любого элемента x имеем $\min(x, +\infty) = x$.
Существует **наибольший элемент** — единица полукольца, т.е. число 0 .

Не путать число 0 с **нулем** данного полукольца — элементом $+\infty$.

Пример 10.6. В полукольце $\mathcal{S}_A$ (пример 10.3[б]) получаем в качестве отношения естественного порядка полукольца *отношение* включения $\subseteq$.

Для любых двух множеств X , $Y \in 2^A$ из $X \cup Y = Y$ вытекает $X \subseteq Y$ и наоборот.

Наименьшим элементом является нуль полукольца — $\varnothing$ (пустое множество), наибольшим — единица полукольца (множество A).

Теорема 1. Если A — конечное подмножество (носителя) идемпотентного полукольца, то $\sup A$ относительно естественного порядка этого полукольца равен сумме всех элементов множества A.

◀ Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $a = a_1 + \ldots + a_n$. Для произвольного элемента a_i, $i = \overline{1, n}$, в силу коммутативности и идемпотентности сложения имеем

$$\begin{aligned} a_i + a = a_i + (a_1 + \ldots + a_i + \ldots + a_n) = \\ = a_1 + \ldots + a_i + a_i + \ldots + a_n = \\ = a_1 + \ldots + a_i + \ldots + a_n = a, \end{aligned}$$

т.е. $a_i \leq a$, и поэтому a есть **верхняя грань множества** A.

Покажем, что это **точная верхняя грань множества**.

Пусть b произвольная верхняя грань множества A.
Рассмотрим сумму $b + a$.
Так как для каждого $i = \overline{1, n}$ имеет место $a_i \leq b$, т.е. $a_i + b = b$, то

$$b + a = b + (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$$
$$= (b + a_1) + (a_2 + \ldots + a_n) = (b + a_2) + \ldots + a_n = \ldots = b.$$

Следовательно, $a \leq b$ и a — точная верхняя грань множества A. ►

10.1. Замкнутые полукольца

Определение 10.2. Полукольцо $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ называют **замкнутым**, если:

1) оно идемпотентно;

2) любая последовательность элементов множества S имеет *точную верхнюю грань* относительно *естественного порядка* $\leq$ этого *идемпотентного полукольца*;

3) операция *умножения полукольца* $\mathcal{S}$ сохраняет *точные верхние грани последовательностей*, т.е. для любого $a \in S$ и любой последовательности $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ элементов множества S

$$a \sup X = \sup aX, \quad (\sup X)a = \sup(Xa).$$

Теорема 2. Любое конечное идемпотентное полукольцо замкнуто.

◀ Поскольку носитель S идемпотентного полукольца

$$\mathcal{S} = (S,\ +,\ \cdot,\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})$$

есть конечное множество, то множество элементов любой последовательности в этом полукольце конечно.
Для нахождения точной верхней грани такой последовательности нужно найти **точную верхнюю грань множества** $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ ее членов, т.е., согласно теореме 1, вычислить некоторую конечную сумму, которая всегда существует.
В конечном идемпотентном полукольце любая последовательность имеет точную верхнюю грань.

Условия сохранения точных верхних граней имеют вид

$$a(p_1 + \ldots + p_n) = ap_1 + \ldots + ap_n,$$
$$(p_1 + \ldots + p_n)a = p_1a + \ldots + p_na$$

и выполняются в силу **аксиом полукольца**.
Таким образом, полукольцо S замкнуто. ►

В любом идемпотентном полукольце сумма произвольного конечного множества элементов является точной верхней гранью этого множества.

В замкнутом полукольце точную верхнюю грань последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ естественно называть **суммой элементов последовательности**, полагая, по определению,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sup\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}. \qquad (10.2)$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ всегда есть элемент множества S (условие 2 определения 10.2).

„Пределы суммирования“ будем опускать и писать просто $\sum x_n$, если это не приводит к недоразумению.

Также будем использовать обозначение $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Если множество элементов x_n бесконечно, сумму, стоящую в левой части (10.2), будем называть **бесконечной суммой**.

Утверждение 10.1. Замкнутое полукольцо является **индуктивным упорядоченным множеством**.

◄ Замкнутое полукольцо с отношением естественного порядка является упорядоченным множеством, в котором **наименьшим элементом** служит **нуль полукольца**, поскольку

$$(\forall x)(\mathbf{0} + x = x \Rightarrow \mathbf{0} \leq x).$$

Точной верхней гранью любой *неубывающей последовательности* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является бесконечная сумма $\sum x_n$. ►

Заметим, что точная верхняя грань в замкнутом полукольце существует у любой последовательности, а не только у неубывающей.

Операция умножения на произвольный фиксированный элемент a **непрерывна**, поскольку сохраняет точные верхние грани

$$a\sum x_n = \sum a x_n \quad \text{и} \quad \Big(\sum x_n\Big)a = \sum x_n a.$$

Это следует из определения 10.2, пункт 3.

Исследуем непрерывность операции сложения. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ элементов замкнутого полукольца и любого элемента a этого полукольца выполняется равенство

$$a + \sum x_n = \sum (a + x_n).\# \tag{10.3}$$

Тождество (10.3) можно рассматривать как свойство непрерывности операции сложения в замкнутом полукольце. Это свойство аналогично свойству непрерывности операции умножения, которое имеет место по определению.

Свойства частичных сумм.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$. Назовем k-ой частичной суммой последовательности

$$s_k = \sum_{i=0}^{k} x_i.$$

При $k=0$ получим $s_0 = x_0$,
при $k=1$ — $s_1 = x_0 + x_1$,
при $k=2$ — $s_2 = x_0 + x_1 + x_2$ и т.д.

Рассмотрим последовательность $\{s_k\}_{k\geq 0}$. Эта последовательность является неубывающей, поскольку

$$s_k + s_{k+1} = s_k + (s_k + x_{k+1}) = (s_k + s_k) + x_{k+1} = s_k + x_{k+1} = s_{k+1}$$

и $s_k \leq s_{k+1}$.

Утверждение 10.2.

$$\sum x_n = \sum s_n$$

Одним из важнейших понятий в замкнутых полукольцах является понятие **итерации** (или **замыкания**) **элемента** замкнутого полукольца.

Итерация x^* элемента x определяется как точная верхняя грань последовательности всех *степеней элемента* x , т.е.

$$x^* = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

где, по определению, $x^0 = \mathbf{1}$, а $x^n = x^{n-1}x$, $n = 1, 2, \ldots$

Пример 10.7. Идемпотентное полукольцо $\mathcal{B}$ из примера замкнуто согласно теореме о замкнутости конечного идемпотентного кольца.

Точная верхняя грань любой последовательности элементов этого полукольца равна 1, если хотя бы один ее член равен 1, и равна 0 в противном случае.

Итерация любого элемента полукольца $\mathcal{B}$ равна **1**.

Для 1^* это очевидно, а для 0^* имеем

$$0^* = 0^0 + 0^1 + \ldots + 0^k + \ldots = 1 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 1.$$

10.2. Решение линейных уравнений

Всякое замкнутое полукольцо является индуктивным упорядоченным множеством.

Следовательно, согласно теореме о неподвижной точке любое непрерывное отображение f замкнутого полукольца в себя имеет наименьшую **неподвижную точку**.

Т.е. в любом замкнутом полукольце всякое уравнение вида $x = f(x)$, где f — непрерывное отображение носителя этого полукольца в себя, имеет наименьшее решение.

Особенно важными для приложений являются линейные уравнения в замкнутом полукольце, имеющие вид

$$x = ax + b \tag{10.4}$$

или

$$x = xa + b. \tag{10.5}$$

В силу непрерывности операций сложения полукольца и умножения полукольца правые части уравнений (10.4) и (10.5) есть непрерывные отображения.
Поэтому, согласно теореме о неподвижной точке, существуют наименьшие решения этих уравнений.

Теорема 4. Наименьшими решениями уравнений (10.4) и (10.5) в замкнутых полукольцах являются соответственно

$$x = a^*b \tag{10.6}$$

и

$$x = ba^*, \tag{10.7}$$

где a^* — итерация элемента a .

◀ Используем формулу $x = \sup\limits_{n \geq 0} f^n(\mathbf{0})$ для вычисления наименьшей неподвижной точки.
Запишем $\sup$ в случае замкнутого полукольца как бесконечную сумму, для уравнения (10.6).

$$x = \sum_{n \geq 0}^{\infty} f^n(\mathbf{0}), \tag{10.8}$$

где $\mathbf{0}$ — нуль полукольца, а $f(x) = ax + b$.
Вычислим $f^0(\mathbf{0}), f^1(\mathbf{0}), \ldots, f^n(\mathbf{0}), \ldots$

$$
\begin{aligned}
f^0(\mathbf{0}) &= \mathbf{0},\\
f^1(\mathbf{0}) &= b,\\
f^2(\mathbf{0}) &= ab + b = (a + \mathbf{1})b,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^n(\mathbf{0}) &= (a^{n-1} + \ldots + a^2 + a + \mathbf{1})b,
\end{aligned}
$$

Подставим в выражение (10.8) и получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbf{0}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1})b.$$

Используя непрерывность умножения, вынесем b (вправо) за знак бесконечной суммы и получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1})b = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1})\Big)b.$$

Сумма $\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1}$ есть частичная сумма s_{n-1} последовательности $\{a^n\}_{n\geq 0}$.

Используя равенство $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (x_1 + \ldots + x_k)$, запишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} + a + \ldots + a^{n-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = a^*.$$

Окончательно получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n(\mathbf{0}) = a^* b.$$

Анологично доказывается равенство (10.7). ►

Формулы (10.6) и (10.7) дают именно **наименьшие** решения уравнений (10.4) и (10.5), а не все возможные их решения.

Пример 10.8. В полукольце $\mathcal{B} = (\{0, 1\}, +, \cdot, 0, 1)$, можно определить только два уравнения: $x = x + 1$ и $x = x + 0$.

Второе уравнение переписывается совсем просто: $x = x$; его решением является любой элемент полукольца — как 0, так и 1.

Но по формуле (10.6) получим $x = 1^{*}0 = 0$, что, как и доказано выше, есть наименьшее решение уравнения.

В **полукольце**, в котором **итерация любого элемента** равна **единице полукольца**, формулы (10.6) и (10.7) дают один и тот же результат: $x = b$, т.е. в данном случае наименьшее решение совпадает со свободным членом уравнения.

Материал для самостоятельного изучения

Утверждение 10.3.

$$\sum x_n = \sum s_n$$

◀ Покажем, что для любого элемента x_j имеет место $x_j \le \sum s_n$. Заметим, что для неубывающей последовательности $\{s_n\}$ и любого $j \le n$

$$\sum_{n=0} s_n = \sum_{n \ge j} s_n,$$

поскольку точная верхняя грань неубывающей последовательности не изменится, если отбросить конечное число первых членов последовательности от 0 до $j-1$.

Для произвольного j рассмотрим $x_j + \sum\limits_{n=0} s_n$. Имеем

$$x_j + \sum_{n=0} s_n = x_j + \sum_{n\geq j} s_n = \sum_{n\geq j} (x_j + s_n) =$$

$$= \sum_{n\geq j} (x_j + \overbrace{x_1 + \ldots + x_j + \ldots + x_n}^{s_n}) =$$

$$= \sum_{n\geq j} (x_1 + \ldots + x_j + x_j + \ldots + x_n) =$$

$$\sum_{n\geq j} (x_1 + \ldots + x_j + \ldots + x_n) = \sum_{n\geq j} s_n = \sum s_n,$$

Следовательно, $x_j \leq \sum s_n$. Поэтому точная верхняя грань последовательности частичных сумм $\sum s_n$ есть верхняя грань последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$.

Покажем, что $\sum s_n$ есть **точная** верхняя грань последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$. Пусть b есть некоторая верхняя грань этой последовательности. Тогда для любого j имеем $x_j + b = b$, поскольку $x_j \leq b$.

Тогда

$$b + s_n = b + \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} (b + x_i) = \sum_{i=0}^{n} b = b,$$

и, следовательно,

$$b + \sum s_n = \sum_{n \geq 0} (b + s_n) = \sum_{n \geq 0} b = b.$$

Таким образом, $\sum s_n \leq b$ и $\sum s_n$ есть наименьший элемент множества верхних граней последовательности $\{x_n\}_{n \geq 0}$, т.е. ее точной верхней гранью и $\sum x_n = \sum s_n$. ▶

Пример 10.9. В идемпотентном полукольце $\mathcal{R}^+ = (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0)$, любая последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$ есть последовательность **неотрицательных** действительных чисел.

Естественный порядок идемпотентного полукольца $\mathcal{R}^+$ является двойственным к **естественному числовому порядку**.

Последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$ ограничена снизу и имеет точную нижнюю грань $\inf x_n$ относительно естественного числового порядка (известно из курса математического анализа).

Точная нижняя грань представляет собой точную верхнюю грань относительно **естественного порядка идемпотентного полукольца** $\mathcal{R}^+$.

Для любой последовательности x_n элементов полукольца $\mathcal{R}^+$ точная верхняя грань существует.

Докажем непрерывность операции умножения в этом полукольце, опираясь на естественный числовой порядок.

Непрерывность операции умножения в идемпотентном полукольце $\mathcal{R}^+$ эквивалентна выполнению равенства

$$a + \inf\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \inf\{a + x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (10.9)$$

где a — неотрицательное действительное число;
$\inf$ — точная нижняя грань последовательности относительно естественного числового порядка.
Равенство 10.9 доказывается в курсе математического анализа.

Следовательно, идемпотентное полукольцо $\mathcal{R}^+$ является замкнутым.

Итерация x^* элемента x в полукольце $\mathcal{R}^+$ есть точная верхняя грань последовательности степеней элемента x.

Поскольку операция умножения в этом полукольце определена как операция сложения действительных чисел, то $x^0 = 0$, так как число 0 есть единица полукольца $\mathcal{R}^+$. Далее, $x^2 = x + x = 2x, \ldots, x^n = nx$.

Для каждого $n \geq 0$ выполняется неравенство $x^n \geq 0$ в смысле естественного числового порядка.

Т.о., число 0 есть наименьший в смысле естественного числового порядка член последовательности $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и, следовательно, $\inf\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

Переходя к двойственному порядку — естественному порядку полукольца $\mathcal{R}^+$, получим, что число 0 является точной верхней гранью последовательности $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, т.е. $x^* = 0$.

В полукольце $\mathcal{R}^+$ итерация произвольного элемента также равна единице полукольца, т.е. числу 0.