Ткачев С.Б.
каф. Математического моделирования
МГТУ им. Н.Э. Баумана

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ИУ5 — 4 семестр, 2015 г.

Лекция 10. ГРАФЫ. ЗАДАЧА О ПУТЯХ ВО ВЗВЕШЕННЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФАХ

Неориентированный граф G задается двумя множествами

$$G = (V,\, E),$$

где V — конечное множество, элементы которого называют **вершинами** или **узлами**;
E —**множество неупорядоченных пар** на V, т.е. подмножество множества двухэлементных подмножеств V, элементы которого называют **ребрами**.
Для каждого ребра $\{u,\, v\} \in E$ считаем, что u и v — различные вершины.

Если ребро $e = (u, v)$, то говорят, что ребро e соединяет вершины u и v , и обозначают это $u \longmapsto v$; если необходимо, указывают имя графа G : $u \longmapsto_G v$. ▮

Вершины u и v , соединеные ребром ($u \longmapsto v$), называют **смежными**, а также **концами ребра** $\{u, v\}$. ▮

Если $u \longmapsto v$, говорят, что вершины u и v связаны **отношением непосредственной достижимости**.

Ориентированный граф G задается двумя множествами

$$G = (V,\ E),$$

где V — конечное множество, элементы которого называют вершинами или узлами;
E — множество **упорядоченных пар** на V, т.е. подмножество множества $V \times V$, элементы которого называют **дугами**.

Если дуга $e = (u, v)$, то говорят, что дуга e ведет из вершины u в вершину v, и обозначают это $u \longrightarrow v$; если необходимо, указывают имя графа G: $u \longrightarrow_G v$.

Вершины u и v, такие, что из вершины u в вершину v ведет дуга ($u \longrightarrow v$), называют **смежными**, u называют **началом**, а v — **концом дуги** (u, v).

Дугу, начало и конец которой есть одна и та же вершина, называют **петлей**.

Если $u \longrightarrow v$, то говорят, что вершины u и v связаны **отношением непосредственной достижимости**.

Цепь в неориентированном графе G — это последовательность вершин (конечная или бесконечная) v_0, v_1, ..., v_n, ..., такая, что $v_i \longmapsto v_{i+1}$ для любого i, если v_{i+1} существует. (Под конечной последовательностью понимается *кортеж* вершин.)

Для конечной цепи v_0, v_1, ..., v_n число n ($n \geq 0$) называют **длиной цепи**. Таким образом, длина цепи есть число ее ребер, т.е. всех ребер, соединяющих вершины v_i и v_{i+1} ($i = \overline{0, n-1}$).

Цепь длины 0 — это произвольная вершина графа.

Говорят, что **вершина** v неориентированного графа G **достижима** из вершины u этого графа и обозначают $u \mid\!=\!=\!\mid^{*} v$, если существует цепь v_0, $v_1, \ldots, v_n$, такая, что $u = v_0$, $v_n = v$ (при этом говорят также, что данная цепь соединяет вершины u и v, которые называют **концами цепи**). Таким образом, задано **отношение достижимости** $\mid\!=\!=\!\mid^{*}$ в неориентированном графе.

Оно является **рефлексивно-транзитивным замыканием** отношения $\vdash\!\dashv$ непосредственной достижимости.

Отношение достижимости в неориентированном графе **рефлексивно**, **симметрично** и **транзитивно**, т.е. является **отношением эквивалентности**.

Путь в ориентированном графе G — это последовательность вершин (конечная или бесконечная) v_0, v_1, $\ldots$, v_n, $\ldots$, такая, что $v_i \to v_{i+1}$ для любого i, если v_{i+1} существует.

Для конечного пути v_0, v_1, $\ldots$, v_n число n называют **длиной пути** $(n \geq 0)$. Тем самым длина пути есть число его дуг, т.е. всех дуг, которые ведут из вершины v_i в вершину v_{i+1} ($i = \overline{0, n-1}$). Путь длины 0 — это произвольная вершина графа.

Говорят, что **вершина** v ориентированного графа G **достижима** из вершины u этого графа и обозначают $u \Rightarrow^* v$, если существует путь v_0, v_1, ..., v_n, такой, что $u = v_0$, $v = v_n$ (при этом говорят, что данный путь ведет из вершины u в вершину v, называя первую вершину **началом**, а вторую — **концом** данного **пути**).

Таким образом, задано **отношение достижимости** $\Rightarrow^*$ в ориентированном графе. Оно является **рефлексивно-транзитивным замыканием** отношения $\rightarrow$ непосредственной достижимости.

Отношение достижимости в ориентированном графе рефлексивно и транзитивно, но в общем случае не **антисимметрично**: если две вершины ориентированного графа достижимы одна из другой, то из этого вовсе не следует, что они совпадают. Таким образом, отношение достижимости в ориентированном графе есть *отношение предпорядка*.

Если существует **цепь** ненулевой длины, соединяющая u и v, то пишут $u \mid\!=\!=\!\mid^{+} v$.

Если необходимо явно указать длину цепи, то пишут $u \mid\!=\!=\!\mid^{n} v$ и говорят, что существует цепь длины n, соединяющая u и v.

Простая цепь — это цепь, все вершины которой, кроме, быть может, первой и последней, попарно различны и все ребра попарно различны.

Простую цепь ненулевой длины с совпадающими концами называют **циклом**.

Произвольную цепь ненулевой длины с совпадающими концами, все ребра которой попарно различны, будем называть **замкнутой цепью**.

Если существует **путь** ненулевой длины, ведущий из u в v, то пишут $u \Rightarrow^{+} v$. ■

Если необходимо явно указать длину пути, то пишут $u \Rightarrow^{n} v$ и говорят, что существует путь длины n ,ведущий из u в v. ■

Простой путь — это путь, все вершины которого, кроме, быть может, первой и последней, попарно различны.

Простой путь ненулевой длины, начало и конец которого совпадают, называют **контуром**.

Произвольный путь ненулевой длины, начало и конец которого совпадают, будем называть **замкнутым путем**.

Неориентированный граф, не содержащий циклов, называют **ациклическим графом**.

Ориентированный граф, не содержащий контуров, называют **бесконтурным графом**.

Определение 10.1. Взвешенным (или **размеченным**) **ориентированным графом** называют пару $W = (G, \varphi)$, где $G = (V, E)$ — обычный ориентированный граф, $\varphi\colon E \to \mathcal{R}$ — **весовая функция** (или **функция разметки**) со значениями в некотором **идемпотентном полукольце** $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, причем $(\forall e \in E)(\varphi(e) \neq \mathbf{0})$.

Мы будем в этом случае также говорить, что ориентированный граф размечен над идемпотентным полукольцом $\mathcal{R}$.

Часто полукольцо $\mathcal{R}$ является **замкнутым**, хотя это требование необязательно.

$\mathcal{R}$ — обязательно **полукольцо с итерацией**.

Пусть вершины ориентированного графа каким-либо образом пронумерованы. Тогда взвешенный ориентированный граф может быть задан матрицей A, элемент которой a_{ij} равен значению $\varphi((i,\ j))$ весовой функции на дуге $(i,\ j)$, если из вершины i ведет дуга в вершину j, или **нулю полукольца** в противном случае. Эту матрицу будем называть **матрицей меток дуг**.

Важные задачи анализа ориентированных графов.

1. Вычисление для заданного ориентированного графа его **матрицы достижимости**.

Задача построения **транзитивного замыкания ориентированного графа**.

Матрицу достижимости можно рассматривать как матрицу **транзитивного** и **рефлексивного замыкания бинарного отношения непосредственной достижимости** в ориентированном графе.

2. **Задача о кратчайших расстояниях** .

Вычисление наименьших расстояний между всеми парами **вершин** в ориентированном графе.

Расстоянием от вершины v до вершины w **по пути** S называют сумму меток дуг, входящих в этот путь. **Наименьшие** расстояние это **минимальное** из расстояний между вершинами v и w по всем возможным путям.

3. Перечисление всех путей между двумя произвольными вершинами. Эту задачу будем называть **задачей о перечислении путей**. При ее решении требуется для любой заданной пары вершин u и v ориентированного графа получить все пути, для которых u является началом, а v — концом. ▮

Вычисление **итерации** A^* матрицы A дает решение всех сформулированных задач, если для каждой задачи выбирать соответствующее полукольцо.

В случае полукольца $\mathcal{B}$ получаем решение задачи о транзитивном замыкании, в случае полукольца $\mathcal{R}^+$ — решение задачи о кратчайших расстояниях.

Задачу вычисления матрицы A^* для ориентированного графа, размеченного над произвольным полукольцом с итерацией, в частности над **замкнутым полукольцом**, будем называть **общей задачей о путях** во взвешенных ориентированных графах.

Рассмотрим теперь решение общей задачи о путях для произвольного замкнутого полукольца $\mathcal{R}$.

Определение 10.2. **Метка пути**, ведущего из вершины v_i в вершину v_j, есть **произведение в полукольце** $\mathcal{R}$ меток входящих в путь дуг в порядке их следования (для пути ненулевой длины) и есть $\mathbf{1}$ (**единица полукольца** $\mathcal{R}$) для пути нулевой длины.

Определение 10.3. **Стоимость прохождения** из вершины v_i в вершину v_j (или между i-й и j-й вершинами) — это **сумма в полукольце** $\mathcal{R}$ меток всех путей, ведущих из вершины v_i в вершину v_j.

Сумма, определяющая стоимость прохождения есть **бесконечная сумма** замкнутого полукольца, т.е. **точная верхняя грань** соответствующей **последовательности меток**.

Если стоимость прохождения между парой вершин по какому-либо множеству путей равна $\mathbf{0}$, то это означает, что не существует пути, принадлежащего данному множеству путей, ведущего из первой вершины рассматриваемой пары во вторую вершину.

Матрица меток дуг является элементом **полукольца матриц над полукольцом** $\mathcal{R}$. В этом полукольце определены операции сложения и умножения матриц, а также возведение матрицы в неотрицательную степень.

10.1. Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим множество $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathcal{S})$ прямоугольных матриц типа $m\times n$ с элементами из произвольного идемпотентного полукольца $\mathcal{S} = (S, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Множество всех квадратных матриц порядка n с элементами из полукольца $\mathcal{S}$ обозначим $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$.

Операции сложения и умножения матриц определяют точно так же, как и в числовом случае , — с учетом того, что сложение и умножение элементов матриц понимаются в смысле данного идемпотентного полукольца $\mathcal{S}$:

1) суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ типа $m \times n$ называют матрицу $C = (c_{ij})$ того же типа с элементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, и используют обозначение $C = A + B$;

2) произведением AB матриц $A = (a_{ij})$ типа $m \times n$ и $B = (b_{ij})$ типа $n \times p$ называют матрицу $C = (c_{ij})$ типа $m \times p$ с элементами

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Нулевая (O) и единичная (E) матрицы любого порядка определяются с помощью единицы и нуля полукольца.

На множестве $\mathbb{M}_n(\mathcal{S})$ всех квадратных матриц фиксированного порядка n можно определить **алгебру**

$$\mathrm{M}_n(\mathcal{S}) = (\mathbb{M}_n(\mathcal{S}), +, \cdot, O, E).$$

Теорема 1.
Алгебра $\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ есть идемпотентное полукольцо. Если полукольцо $\mathcal{S}$ замкнуто, то полукольцо $\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ тоже замкнуто. (без доказательства)

Полукольцо $\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ будем называть **полукольцом матриц над полукольцом** $\mathcal{S}$.

Теорема 1 позволяет решать произвольные уравнения вида

$$X = AX + B \tag{10.1}$$

или

$$X = XA + B \tag{10.2}$$

относительно неизвестной матрицы X .

Наименьшие решения этих уравнений есть

$$X = A^*B \tag{10.3}$$

и

$$X = BA^* \tag{10.4}$$

соответственно, где A^* — **итерация** матрицы A в $\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$. Итерация A^* матрицы A играет в теории линейных уравнений в замкнутых полукольцах такую же роль, как обратная матрица в классической линейной алгебре.

Основную роль при решении задач теории ориентированных графов и теории формальных языков играют **праволинейные уравнения** вида (10.1), поэтому мы будем, как правило, рассматривать только их.

Леволинейное уравнение (10.2) может быть проанализировано аналогично.

Разработаем технику поиска решений матричных уравнений в матричном полукольце над замкнутым полукольцом.

Пусть X^j — j -й столбец матрицы X , B^j — j -й столбец матрицы B .

Перепишем уравнение (10.1) как систему уравнений относительно неизвестных столбцов матрицы X :

$$X^j = AX^j + B^j, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{10.5}$$

Наименьшее решение этой системы, как следует из (10.3), есть

$$X^j = A^* B^j. \quad 1 \leq j \leq n. \tag{10.6}$$

Каждая система вида (10.5) есть матричная форма записи системы линейных уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n, \end{cases} \tag{10.7}$$

где все элементы a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, b_i, $1 \leq i \leq n$, есть элементы некоторого **замкнутого полукольца**.

Для поиска решения системы вида 10.7 можно воспользоваться **методом последовательного исключения неизвестных**, аналогичным классическому **методу Гаусса**.

Процедура решения системы уравнений (10.7). Запишем первое уравнение системы так:

$$x_1 = a_{11}x_1 + (a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1).$$

Из первого уравнения системы выразим x_1 через остальные неизвестные, воспользовавшись формулой $x = a^*b$:

$$x_1 = a_{11}^*(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1). \tag{10.8}$$

В формуле (10.8) выражение в скобках не содержит неизвестного x_1.

Подставляя (10.8) вместо x_1 в остальные уравнения, получаем систему из $n-1$ уравнений, которая уже не содержит x_1 :

$$\begin{cases} x_2 = a_{21}a_{11}^*(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1) + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2, \\ x_3 = a_{31}a_{11}^*(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1) + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n + b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}a_{11}^*(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1) + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n. \end{cases} \tag{10.9}$$

Приведем подобные члены в каждом уравнении системы и получим:

$$\left\{\begin{aligned} x_2 &= (a_{21}a_{11}^* a_{12} + a_{22})x_2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (a_{21}a_{11}^* a_{1n} + a_{2n})x_n + a_{21}a_{11}^* b_1 + b_2, \\ x_3 &= (a_{31}a_{11}^* a_{12} + a_{32})x_2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (a_{31}a_{11}^* a_{1n} + a_{3n})x_n + a_{31}a_{11}^* b_1 + b_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (a_{n1}a_{11}^* a_{12} + a_{n2})x_2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (a_{n1}a_{11}^* a_{1n} + a_{nn})x_n + a_{n1}a_{11}^* b_1 + b_n. \end{aligned}\right. \tag{10.10}$$

Перепишем первое уравнение этой системы:
$x_2 = (a_{21}a_{11}^*a_{12} + a_{22})x_2 + \gamma_2,$
где $\gamma_2 = a_{21}a_{11}^*(a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1) + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2.$
γ_2 не содержит x_1 и x_2.
Выразим x_2 через остальные неизвестные, воспользовавшись формулой $x = a^*b$:

$$x_2 = \alpha_2^*\gamma_2, \tag{10.11}$$

где $\alpha_2 = a_{21}a_{11}^*a_{12} + a_{22}$ не содержит неизвестных. Исключаем x_2 из остальных уравнений.

Действуя подобным образом, на i -м шаге ($1 \leq i \leq n$) получаем

$$x_i = \alpha_i^* \gamma_i, \tag{10.12}$$

где выражение α_i^* не содержит неизвестных, а выражение γ_i может содержать только неизвестные, начиная с $(i+1)$ -го, т.е. $x_{i+1}, \ldots, x_n$.

При $i = n$ имеем

$$x_n = \alpha_n^* \gamma_n, \tag{10.13}$$

где выражения α_n^* и γ_n не содержат неизвестных.

Таким образом, исходная система (10.7) преобразована к „треугольному“ виду: правая часть уравнения (10.13) не содержит неизвестных, уравнение (10.12) при $i = n - 1$ в правой части содержит только одно неизвестное x_{n-1} и каждое следующее уравнение при просмотре „снизу вверх“ на одно неизвестное больше, чем предыдущее.

Первое уравнение системы — уравнение (10.8) — в правой части содержит все неизвестные от x_2 до x_n.

На этом завершается первый этап алгоритма, который называют **прямым ходом метода Гаусса**.

Обратный ход метода Гаусса

Второй этап алгоритма состоит в последовательном нахождении значения всех неизвестных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, начиная с x_{n-1}.

Найдем x_{n-1}, подставив в выражение для x_{n-1} вместо x_n правую часть (10.13).

Затем определим x_{n-2}, подставив полученные значения x_n и x_{n-1} в правую часть выражения (10.12) при $i = n - 2$, и так далее до тех пор, пока не найдем x_1.

Положив $B = E$ в уравнении (10.1), получим $X = A^*E = A^*$. ∎

Таким образом, чтобы вычислить итерацию матрицы A, достаточно решить матричное уравнение (10.5) для всех $j = \overline{1, n}$ при β_j, равном j-му столбцу единичной матрицы E. ∎

Утверждение 10.1. Если A — матрица, все элементы которой принадлежат некоторому полукольцу с итерацией, то все элементы ее **итерации** A^* также принадлежат этому полукольцу с итерацией.

Лемма 1. Элемент $a_{ij}^{(l)}$ матрицы A^l, $l \geq 0$, равен стоимости прохождения из вершины v_i в вершину v_j по всем путям длины l. ▮

◀ Доказательство проведем индукцией по l.
При $l = 0$ получаем $A^0 = E$, где E — единичная матрица, которая будет матрицей стоимости прохождения по всем путям длины 0. Это согласуется с определением 10.3. ▮
При $l = 1$ получаем $A^1 = A$. Матрица меток дуг A — матрица стоимости прохождения по всем путям длины 1.

Согласно предположению индукции, элемент $a_{ik}^{(l-1)}$ равен стоимости прохождения из вершины v_i в вершину v_k по всем путям длины $l-1$.

Множество всех путей длины l из вершины v_i в вершину v_j, проходящих через фиксированную k-ю вершину так, что вершина v_k связана дугой с вершиной v_j $(v_k \to v_j,)$ образуется путем присоединения дуги $(v_k,\ v_j)$ к каждому из путей, ведущих из v_i в v_k и имеющих длину $l-1$.

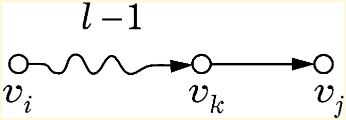

Рис. 1

$a_{ij}^{(l)} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l-1)} a_{kj}$. Выражение для элемента $a_{ij}^{(l)}$ дает стоимость прохождения из вершины v_i в вершину v_j по всем путям длины l ▶

Стоимость прохождения между парой вершин (v_i, v_j) равна сумме меток всех путей, ведущих из первой вершины во вторую, указанную сумму можно можно получить, суммируя последовательно метки путей длины 0, длины 1, длины 2 и т.д.

Матрица стоимостей взвешенного ориентированного графа с учетом леммы 1 (лекция 15) может быть представлена в виде

$$C = A^0 + A^1 + A^2 + \ldots + A^n + \ldots = \sum_{n \geq 0} A^n = A^*.$$

До сих пор мы рассматривали матрицы над замкнутым полукольцом.

Однако, если элементы матрицы A принадлежат некоторому полукольцу с итерацией, из утверждения 1(лекция 15) следует, что и все элементы матрицы стоимостей $C = A^*$ останутся в этом же полукольце. Таким образом, полученные результаты можно перенести на произвольное полукольцо с итерацией.■

Теорема 2. Матрица стоимостей ориентированного графа G, размеченного над полукольцом с итерацией $\mathcal{R}$ (в частности, над замкнутым полукольцом), равна итерации матрицы A меток дуг ориентированного графа G.

Для вычисления $C = A^*$ достаточно решить (т.е. найти наименьшее решение) в $\mathcal{R}$ при всех $j = \overline{1, n}$ систему уравнений

$$X^j = AX^j + E^j,$$

где $E^j \in \mathcal{R}^n$ — j -й единичный вектор, т.е. вектор, все элементы которого, кроме j -го, равны $\mathbf{0}$, а j -й равен единице полукольца $\mathcal{R}$, j -й столбец матрицы E .
Наименьшее решение имеет вид $X^j = A^*E^j$.
Тогда столбец $X^j = A^*E^j$ есть j -й столбец матрицы A^* .

Смысл матрицы стоимостей $C = A^*$ для полуколец $\mathcal{B}$ и $\mathcal{R}^+$.

В полукольце $\mathcal{B}$ метка отдельного пути всегда равна 1 (так как метка дуги в размеченном над полукольцом графе не может, согласно определению, быть нулем полукольца).
Следовательно, стоимость $c_{ij} = 1$, если существует хотя бы один путь из i-й вершины в j-ю, и $c_{ij} = 0$, если иначе.

Для полукольца $\mathcal{B}$ матрица стоимостей совпадает с матрицей достижимости ориентированного графа.

В полукольце $\mathcal{R}^+$ метка пути — это арифметическая сумма меток его дуг, так как умножение в $\mathcal{R}^+$ — это обычное арифметическое сложение. ▮

Поскольку сложение в $\mathcal{R}^+$ — это взятие наименьшего из слагаемых, то стоимость c_{ij} — это наименьшая из меток пути среди всех путей, ведущих из i-й вершины в j-ю, т.е. это и есть наименьшая длина пути между указанными вершинами. ▮

Таким образом, в полукольце $\mathcal{R}^+$ матрица стоимостей является матрицей кратчайших расстояний, т.е. наименьших длин путей между всеми парами вершин ориентированного графа.

Пример 10.1.

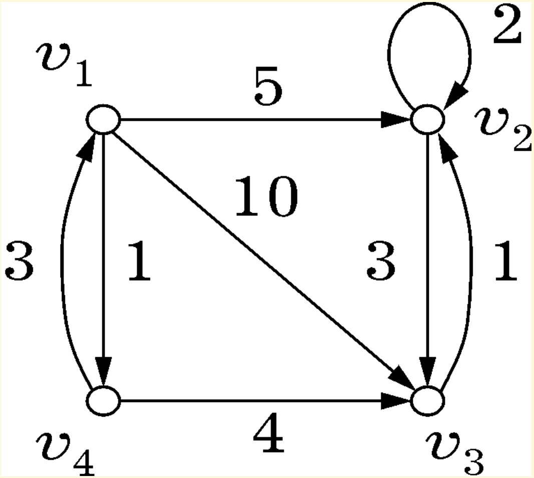

Рис. 2

Вычислим матрицу достижимости изображенного на рисунке графа в полукольце $\mathcal{R}^+$.

1. Вычислим матрицу достижимости в полукольце $\mathcal{B}$. Считаем, что ориентированный граф размечен над полукольцом $\mathcal{B}$ и метка каждой дуги равна 1 (на числовые метки дуг внимания пока не обращаем).

Ориентированный граф задан матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Запишем систему уравнений в полукольце $\mathcal{B}$ для определения первого столбца матрицы A^* :

$$\begin{cases} x_1 = \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 + x_4 + 1, \\ x_2 = \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4} + 0, \\ x_3 = \phantom{x_1 +{}} x_2 \phantom{{}+ x_3 + x_4} + 0, \\ x_4 = x_1 \phantom{{}+ x_2} + x_3 \phantom{{}+ x_4} + 0. \end{cases} \qquad (10.14)$$

Часто нулевые слагаемые не записывают, как и в системах уравнений в поле действительных чисел.

Для вычисления матрицы достижимости воспользуемся **методом последовательного исключения неизвестных**.

В правой части первого уравнения нет переменной x_1, исключим эту переменную из системы, подставив в остальные уравнения (в 4-ое).
С учетом идемпотентности сложения $(x_3 + x_3 = x_3)$, получим

$$\begin{cases} x_2 = x_2 + x_3 + 0, \\ x_3 = x_2 + 0, \\ x_4 = x_2 + x_3 + x_4 + 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x_2 = 1^*(x_3 + 0)$.
В полукольце $\mathcal{B}$ итерация любого элемента равна единице полукольца. Поэтому $x_2 = x_3 + 0$.
Исключим x_2 из системы, получим

$$\begin{cases} x_3 = x_3 + 0, \\ x_4 = x_3 + x_4 + 1 \qquad (*). \end{cases}$$

$x_3 = 1^*0 = 1 \cdot 0 = 0$. Подставим $x_3 = 0$ в $(*)$, $x_4 = 1^*1 = 1$.

Далее подставляем $x_3 = 0$ в выражение $x_2 = x_3 + 0$, $x_2 = 0$, затем полученные значения x_2, x_3 и x_4 подставим в первое уравнение $x_1 = x_2+x_3+x_4+1 = 0+0+1+1;\ x_1 = 1.$ ▮

Первый столбец A^* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Второй столбец A^* определим из системы

$$\begin{cases} x_1 = & x_2 + x_3 + x_4 + 0, \\ x_2 = & x_2 + x_3 \qquad + 1, \\ x_3 = & x_2 \qquad\qquad + 0, \\ x_4 = x_1 & \quad + x_3 \qquad + 0. \end{cases}$$

Исключим x_1 .
$$\begin{cases} x_2 = x_2 + x_3 \qquad + 1, & \qquad (*) \\ x_3 = x_2 \qquad\qquad + 0, & \\ x_4 = x_2 + x_3 + x_4 + 0. & \end{cases}$$

Из $(*)$ получим $x_2 = 1^*(x_3 + 1) = x_3 + 1$.

$$\begin{cases} x_3 = (x_3+1)+0, & (**) \\ x_4 = x_3 + x_4 + 1. \end{cases}$$

Из $(**)$ получим $x_3 = x_3 + 1; \Rightarrow x_3 = 1^*1 = 1$ $x_4 = 1 + x_4 + 1 \Rightarrow x_4 = 1^*1 = 1;$ $x_2 = 1 + 1 = 1;$ $x_1 = 1 + 1 + 1 + 0 = 1\,.$

Второй столбец A^* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Аналогично вычисляем третий и четвертый столбцы и в результате получаем матрицу A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Анализ этой матрицы показывает , что данный граф связен и имеет две бикомпоненты: $\{v_1,\ v_4\}$ и $\{v_2,\ v_3\}$.

В полукольце $\mathcal{B}$ можно упростить решение систем уравнений, воспользовавшись свойствами полукольца.

Наименьшее решение уравнения

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + 1$$

есть $x_k = 1$ и не зависит от значений переменных в правой части уравнения.

С учетом этого решение системы (10.14) упростится.

Так, из первого уравнения сразу получаем $x_1 = 1$.

Тогда четвертое уравнение принимает вид $x_4 = x_3 + 1$, откуда $x_4 = 1$. Поскольку x_1 и x_4 не входят в оставшиеся два уравнения, их решение нужно искать, используя метод исключения.

2. Вычислим матрицу достижимости в полукольце $\mathcal{R}^+$.

Для упрощения записи ∞ здесь будем понимать как $+\infty$. Взвешенный ориентированный граф задан матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 10 & 1 \\ \infty & 2 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty \\ 3 & \infty & 4 & \infty \end{pmatrix}. \qquad (10.15)$$

В полукольце $\mathcal{R}^+$:

элементы 1 и 0 не являются **единицей** и **нулем полукольца**, т.е. $x \neq x + 0$ и $x \neq 1 \cdot x$ в общем случае;

сложение ($\oplus$) — **взятие наименьшего** из двух чисел, **умножение** ($\odot$) — обычное **арифметическое сложение**;

наличие слагаемого 0 в любой сумме означает, что вся сумма равна 0; слагаемое $+\infty$ можно не записывать (как нуль полукольца);

итерация любого элемента равна единице полукольца.

Система для вычисления первого столбца матрицы A^* имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \phantom{3 \odot x_1 \oplus{}} 5 \odot x_2 \oplus 10 \odot x_3 \oplus 1 \odot x_4 \oplus 0, \\ x_2 = \phantom{3 \odot x_1 \oplus{}} 2 \odot x_2 \oplus 3 \odot x_3 \oplus \infty, \\ x_3 = \phantom{3 \odot x_1 \oplus{}} 1 \odot x_2 \oplus \infty, \\ x_4 = 3 \odot x_1 \oplus 4 \odot x_3 \oplus \infty. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $x_1 = 0$, так как одно из слагаемых в правой части есть элемент 0.

Из второго уравнения получаем

$x_2 = 2^* \odot (3 \odot x_3 \oplus \infty) = 3 \odot x_3 \oplus \infty$.

Исключая x_2 из остальных уравнений системы и учитывая, что $x_1 = 0$, получаем

$$\begin{cases} x_2 = 3 \odot x_3 \oplus \infty, \\ x_3 = 1 \odot (3 \odot x_3) \oplus \infty, \\ x_4 = 3 \odot 0 \oplus 4 \odot x_3 \oplus \infty. \end{cases}$$

Далее, из второго уравнения имеем

$$x_3 = (1 \odot 3) \odot x_3 \oplus \infty = 4 \odot x_3 \oplus \infty,$$

откуда $x_3 = 4^* \odot \infty = \infty$, и поэтому

$$x_4 = 3 \odot 0 \oplus 4 \odot \infty \oplus \infty = 3 \oplus \infty = 3.$$

Подставляя найденное значение x_3 в выражение для x_2, получаем $x_2 = \infty$.
Первый столбец матрицы A^*:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \infty \\ \infty \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Этот столбец содержит кратчайшие расстояния от всех вершин графа до вершины v_1. Наличие в нем нулей полукольца во второй и третьей строках говорит о том, что вершина v_1 не достижима из вершин v_2 и v_3.
Аналогично вычисляются остальные столбцы матрицы A^*.

Результат: $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 1 \\ \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & 1 & 0 & \infty \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Для данного простого ориентированного графа легко сопоставить полученный алгебраический результат с результатом „визуального“ анализа ориентированного графа.

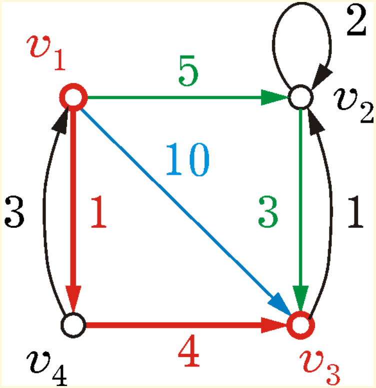

Рис. 3

Рассмотрим вершины $(v_1,\ v_3)$. Из вершины v_1 в вершину v_3 есть различные пути.

Пути, содержащие контуры и петли рассматривать не будем.

Вычислим метки по **простым путям**. По пути $v_1 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_3$ сумма меток равна 5, по пути $v_1 \longrightarrow v_3$ — 10, по пути $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3$ — 8.

Кратчайшее расстояние — 5, совпадает с ответом, полученным алгебраически: элемент a^*_{13} также равен 5.