ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Ткачев С.Б., ФН-12, МГТУ им. Н.Э. Баумана

ИУ5 - 4 семестр, 2015 г.

Лекция 5. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

5.1. Понятие булевой функции. Булев куб

Конечной функцией называют **отображение** одного конечного множества в другое. Важный класс таких функций образуют булевы функции.

Булева функция (от n переменных) — это произвольное отображение вида

$$f\colon \{0,\,1\}^n \to \{0,\,1\}, \tag{5.1}$$

т.е. булева функция определена на множестве всех n-элементных (при $n \geq 0$) **последовательностей** (или n-компонентных **кортежей**) нулей и единиц и принимает два возможных значения: 0 и 1.

Можно задать булеву функцию (5.1) в виде

$$y = f(x_1, \ldots, x_n),$$

где каждое булево переменное x_i, $i = \overline{1,\, n}$, и функция f принимают два возможных значения: 0 и 1.
Понятию булевой функции можно придать содержательный смысл, рассматривая элементы множества $\{0,\, 1\}$ так: единицу —как „истину“, нуль — как „ложь“.

Булево переменное часто называют логическим переменным.

Булева функция от n переменных есть отображение n-й декартовой степени множества $\{0,\, 1\}$ в множество $\{0,\, 1\}$.

Обозначим через $\mathcal{P}_{2,n}$ множество всех булевых функций от n переменных (для фиксированного n),

а через $\mathcal{P}_2$ множество всех булевых функций (для всех возможных значений n числа переменных):

$$\mathcal{P}_2 = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_{2,n}.$$

Областью определения любой булевой функции от n переменных является множество $\{0, 1\}^n$, т.е. **булев куб размерности** n.

Элементы булева куба $\{0, 1\}^n$ называют n**-мерными булевыми векторами** (или **наборами**).

Число всех элементов булева куба $\{0, 1\}^n$ составляет 2^n.

Обозначение — $\mathbb{B}^n$.

Элементы булева куба будем также называть его вершинами.

Булев порядок

Для произвольных двух наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из $\mathbb{B}^n$ имеет место $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \leq \beta_i$ для каждого $i = \overline{1, n}$, т.е. $\alpha_i \vee \beta_i = \beta_i$.

Другими словами, $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i = \beta_i$ или $\alpha_i = 0$, а $\beta_i = 1$ для каждого $i = \overline{1, n}$.

Если существует хотя бы одно i, для которого выполняется $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, то имеет место строгое неравенство $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$.

В частности, если существует ровно одно такое i, то набор $\tilde{\beta}$ **доминирует** над набором $\tilde{\alpha}$, так как этом случае нельзя найти такой набор $\tilde{\gamma}$, что $\tilde{\alpha} < \tilde{\gamma} < \tilde{\beta}$.

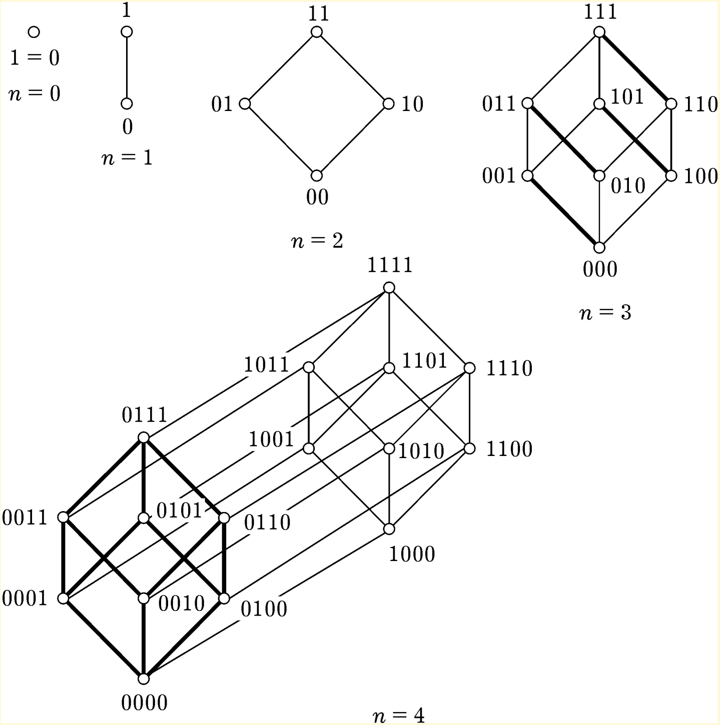

Рис. 1. Диаграммы Хассе для булевых кубов.

Пример 5.1. В булевом кубе $\mathbb{B}^4$

$$(0,\ 0,\ 1,\ 1) < (1,\ 0,\ 1,\ 1) < (1,\ 1,\ 1,\ 1),$$

второй из этих наборов доминирует над первым, а третий — над вторым (но, естественно, третий уже не доминирует над первым, а лишь строго больше его).

Наборы же $(0,\ 1,\ 0,\ 1)$ и $(1,\ 0,\ 1,\ 1)$ — **несравнимые элементы**, так как первая компонента второго набора больше первой компоненты первого набора, но зато вторая компонента первого набора больше второй компоненты второго набора.

Описанное сравнение наборов возможно только для фиксированной размерности и никак нельзя сравнивать наборы разных размерностей. #

5.2. Таблицы булевых функций

Задать булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных можно, указав значение функции на каждом из наборов значений переменных.

Поскольку каждое переменное может принимать только два значения — 0 и 1, имеется 2^n попарно различных наборов.

Булева функция от n переменных может быть задана таблицей, состоящей из двух столбцов и 2^n строк.

В первом столбце перечисляют все наборы из $\mathbb{B}^n$, а во втором — значения функции на соответствующих наборах. В таблице применяют стандартное расположение наборов: каждый набор рассматривают как запись натурального числа в двоичном исчислении и располагают наборы в соответствии с естественным числовым порядком.

На каждом наборе булева функция может принимать только два значения — 0 и 1, следовательно число булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}.

Форма таблицы произвольной булевой функции:

Таблица 5.1

$x_1 \ldots x_n$	$f(x_1, \ldots, x_n)$
$0 \ldots 0$	$f(0, \ldots, 0)$
$\ldots$	$\ldots$
$(\alpha_{k,1} \ldots \alpha_{k,n})$	$f(\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,n})$
$\ldots$	$\ldots$
$1 \ldots 1$	$f(1, \ldots, 1)$

В $(k+1)$ -й строке таблицы расположен набор

$$\tilde{\alpha}_k = (\alpha_{k,1} \ldots \alpha_{k,n}),$$

являющийся двоичным кодом числа k (при $0 \leq k \leq 2^n - 1$).

Примеры булевых функций, заданных таблицами.

Для функции одного переменного ($n = 1$) можно задать четыре булевых функции

Таблица 5.2

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	1	0	1	0

Функцию f_1 называют **тождественной функцией**.

Функцию f_4 — **отрицанием**.

Функции f_2 и f_3 являются функциями (от одного переменного), принимающими постоянное значение (0 и 1 соответственно). Их также называют константой 0 и константой 1 .

Существуют 16 различных булевых функций от двух переменных. В таб. 5.3 указаны семь (из $2^{2^2} = 16$) наиболее часто употребляемых булевых функций от двух переменных.

Таблица 5.3

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Каждая булева функция от двух переменных есть одновременно и бинарная операция на множестве $\{0,\ 1\}$, для таких функций можно использовать запись, принятую для бинарных операций: $x\omega y$ вместо $\omega(x, y)$.

Для функций, записанных в табл. 5.3, принимаются следующие обозначения:

$$f_1(x_1,x_2)=x_1\vee x_2,\qquad f_2(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$$
$$(\text{или } f_2(x_1,x_2)=x_1\wedge x_2),$$
$$f_3(x_1,x_2)=x_1\oplus x_2,\qquad f_4(x_1,x_2)=x_1\longrightarrow x_2,$$
$$f_5(x_1,x_2)=x_1\sim x_2,\qquad f_6(x_1,x_2)=x_1\mid x_2,$$
$$f_7(x_1,x_2)=x_1\downarrow x_2.$$

Функцию f_1 называют **дизъюнкцией**,
f_2 — **конъюнкцией**,
f_3 — **сложением по модулю 2** (mod 2),
f_4 — **импликацией**;
f_5 — **эквивалентностью**,
f_6 — **штрихом Шеффера**,
f_7 — **стрелкой Пирса**.

Штрих Шеффера есть отрицание конъюнкции, а стрелка Пирса — отрицание дизъюнкции:

$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2}, \quad x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}.$$

В число булевых функций от двух переменных также входят две функции, принимающие постоянные значения 0 и 1.

Пример 5.2. Таблица булевой функции от трех переменных:

Таблица 5.4

Номер набора	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Эта функция называется **мажоритарной функцией** или **функцией голосования**.

Табличный способ задания булевых функций применяют ограниченно, поскольку, например, для задания некоторой функции от десяти переменных потребуется таблица из 1024 строк.

Даже все функции от пяти переменных практически невозможно задать таблицами, поскольку число таких функций равно $2^{2^5} = 4\ 294\ 967\ 296$.

Различных функций от трех переменных — 256.

Для задания функции от n переменных можно применять более экономные способы — достаточно записать вектор значений булевой функции на всех наборах в порядке их следования в таблице.
Например, мажоритарная функция f может быть задана в виде

$$f = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$$

Можно также перечислить номера тех наборов, на которых функция принимает значение 1:

$$f = \{3,\ 5,\ 6,\ 7\}.$$

5.3. Фиктивные переменные. Равенство булевых функций

Две булевы функции от одного и того же числа переменных n равны, если совпадают таблицы этих функций.
Возможно ли равенство при различном количестве переменных?

Пример 5.3. Рассмотрим булевы функции
$f(x,y) = x \vee y$ и $g(x,y,z) = xz \vee x\overline{z} \vee yz \vee y\overline{z}$.
Используя тождества, запишем $g(x,y,z) = (x \vee y)(z \vee \overline{z})$.
Поскольку $z \vee \overline{z} = 1$, то $g(x,y,z) = (x \vee y) = f(x,y)$.
Функции f и g можно считать равными, хотя они формально зависят от разного числа переменных.
Значение переменного z не влияет на значение функции g.

Определение 5.1. Переменное x_i называют **фиктивным переменным** булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если значение функции не зависит от значения этого переменного, т.е. если для любых значений переменных x_1, …, x_{i-1}, x_{i+1}, …, x_n

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Переменное x, не являющееся фиктивным переменным функции f, называют **существенным переменным** данной функции.

Говорят, что функция f существенно зависит от переменного x.

Чтобы определить по таблице булевой функции, что переменное x_i является фиктивным, нужно проверить, что на всех парах наборов, у которых одинаковы все компоненты, кроме i-й, а i-я компонетна в одном наборе равна 0, а в другом — 1, функция принимает равные значения.

Пример 5.4. Для функции g переменное x_2 является фиктивным, остальные — существенны.

Таблица 5.5

	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Определение 5.2. Булевы функции f и g называют **равными**, если их существенные переменные соответственно равны и на каждом наборе значений этих переменных функции f и g принимают равные значения.

Возможно добавление к множеству переменных булевой функции одной или нескольких фиктивных переменных. Например

$$\hat{f}(x_1, \ldots, x_n, y) = f(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y \vee \overline{y}).$$

Понятие фиктивного переменного позволяет также произвольные две булевы функции рассматривать как функции от одного и того же числа переменных.

5.4. Формулы

Пусть даны некоторое счетное множество P, элементы которого будем называть булевыми переменными, и некоторое множество булевых функций F.

Элементы множества P будем обозначать символами $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Элементы множества F будем обозначать строчными латинскими буквами.

Константы 0 и 1 также могут включаться в F.

1. **Базис индукции.** Формулой над множеством F считают любую константу из F (если она там есть) и любое булево переменное из P.
2. **Индуктивный переход.** Если $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ ($n \geq 1$) — формулы над множеством F, а f — функция из F от n переменных, то выражение $f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ есть формула над множеством F.
3. **Замыкание.** Никаких других формул над множеством F, кроме определенных выше, не существует.

Промежуточные формулы, используемые при построении некоторой формулы, называют **подформулами** этой формулы.
При построении формул с использованием функций двух переменных будем применять традиционную форму записи функции как бинарной операции.

Множество $F = \{\vee, \cdot, \bar{\ }\}$, состоящее из функций дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, называют **стандартным базисом**.

Формулами над стандартным базисом будут любые переменные, например x_1, x_2, x_3.

Из переменных x_1, x_2 как формул и функции $\vee$ построим новую формулу

$$\Phi_1 = (x_1 \vee x_2).$$

Используя $\cdot$, Φ_1 и x_3, получим

$$\Phi_2 = \Phi_1 \cdot x_3 = (x_1 \vee x_2) \cdot x_3.$$

Каждому набору значений переменных, входящих в заданную формулу, сопоставляется значение этой формулы. Это значение вычисляется путем последовательного вычисления значений всех подформул, входящих в формулу. Процесс вычисления значения формулы повторяет процесс построения формулы из подформул.

Каждая формула, построенная по указанным выше правилам, однозначно определяет некоторую булеву функцию.

Если булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представляется формулой $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, то пишут $f = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Пример 5.5. Для основных функций от двух переменных мы можем записать следующие формулы над стандартным базисом:

$$x_1 \oplus x_2 = x_1 \cdot \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2,$$
$$x_1 \longrightarrow x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2,$$
$$x_1 \sim x_2 = (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_2 \vee x_1),$$
$$x_1 | x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2},$$
$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}.$$

Соответствие между формулами над фиксированным множеством и представляемыми ими функциями **не является взаимно однозначным**. Возможны различные разложения функции по одному и тому же базису.
Например, формулы

$$\overline{(x \vee y)} \quad \text{и} \quad \overline{x} \cdot \overline{y}$$

над стандартным базисом представляют одну и ту же функцию.

Эквивалентными называются формулы, которые представляют равные функции.

Эквивалентным (или **тождественным**) **преобразованием формулы** Φ называют переход (по определенным правилам) к любой формуле Ψ, эквивалентной формуле Φ.

Тождеством (над множеством $F \subseteq \mathcal{P}_2$) называют выражение

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Psi(x_1, \dots, x_m), \tag{5.2}$$

где формулы Φ и Ψ — эквивалентные формулы над F.

Правила тождественных преобразований.

Утверждение 5.1.
1. Если в тождестве некоторые переменные заменить произвольными формулами (над множеством F), то тождество сохранится, т.е. полученные в результате такой замены новые формулы останутся эквивалентными.

2. Если в формуле Φ произвольную ее подформулу заменить любой эквивалентной ей, то получится формула, эквивалентная формуле Φ. #

5.5. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы

Любая формула вида x или $\overline{x}$ над стандартным базисом, где x — произвольное переменное, называется **литералом**. Литерал есть обозначение либо самого переменного x, либо его отрицания.

Для $\sigma \in \{0, 1\}$ пишут x^σ, понимая под этим само переменное x, если $\sigma = 1$, и отрицание x, если $\sigma = 0$, т.е.

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \sigma = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Подставляя в (5.3) 0 и 1 вместо x, получаем

$$0^\sigma = \begin{cases} 0, & \sigma = 1; \\ 1, & \sigma = 0, \end{cases} \qquad 1^\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma = 1; \\ 0, & \sigma = 0. \end{cases}$$

Используют также обозначение $\tilde{x}$, понимая под этим любой из двух литералов — x или $\overline{x}$.

Формула вида $\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_m$, где все фигурирующие в ней переменные попарно различны, называется **элементарной конъюнкцией**.

Определение 5.3. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) от переменных $x_1, \ldots, x_n$ — это формула вида

$$K_1 \vee \ldots \vee K_m,$$

где K_i, $i = \overline{1, m}$, — элементарная конъюнкция, содержащая некоторые из литералов $x_1, \ldots, x_n$.

ДНФ называется **совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)**, если в каждую конъюнкцию K_i для каждого номера $j = \overline{1, n}$ входит в точности один из литералов $\tilde{x}_j$.

Формула вида $\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \ldots \vee \tilde{x}_m$, где все фигурирующие в ней переменные попарно различны, называется **элементарной дизъюнкцией**.

Определение 5.4. Конъюнктивная нормальная форма (**ДНФ**) от переменных $x_1, \ldots, x_n$ — это формула вида

$$D_1 \wedge \ldots \wedge D_m,$$

где D_i, $i = \overline{1, m}$, — элементарная дизъюнкция, содержащая некоторые из литералов $x_1, \ldots, x_n$.

КНФ называется **совершенной конъюктивной нормальной формой (СКНФ)**, если в каждую дизъюнкцию D_i для каждого номера $j = \overline{1, n}$ входит в точности один из литералов $\tilde{x}_j$.

Теорема 1. Любая булева функция, отличная от константы 0, представима в виде СДНФ.

◀ Для функции $f \in \mathcal{P}_{2,n}$, не равной тождественно 0, рассмотрим множество $C_f^1 = \{\tilde{\alpha}\colon f(\tilde{\alpha}) = 1\}$.
Это множество C_f^1 не пусто.
Каждый набор из C_f^1 называется **конституентой единицы** функции f.
Каждому набору $\tilde{\alpha} \in C_f^1$ поставим в соответствие элементарную конъюнкцию $K_{\tilde{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$.
$K_{\tilde{\alpha}}$ обращается в единицу только на наборе $\tilde{\alpha}$.
Тогда искомой СДНФ для функции f будет

$$f = \bigvee_{\tilde{\alpha} \in C_f^1} K_{\tilde{\alpha}}.$$

▶

Теорема 2. Любая булева функция, отличная от константы 1, представляется в виде СКНФ.

СКНФ функции f будет иметь вид

$$f = \bigwedge_{\tilde{\alpha} \in C_f^0} D_{\tilde{\alpha}},$$

где множество наборов $C_f^0 = \{\tilde{\alpha}\colon f(\tilde{\alpha}) = 0\}$, и каждый набор $\tilde{\alpha}$ из C_f^0 называют **конституентой нуля** функции f.

Таким образом любая булева функция может быть представлена в виде формулы над стандартным базисом (СДНФ или СКНФ).

Пример 5.6. Построим СДНФ и СКНФ для **мажоритатрной функции**

$$f = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1).$$

Конституентами единицы для нее служат наборы

$$\tilde{\alpha}_1 = (0,\ 1,\ 1)\,,\ \tilde{\alpha}_2 = (1,\ 0,\ 1)\,,$$
$$\tilde{\alpha}_3 = (1,\ 1,\ 0)\,,\ \tilde{\alpha}_4 = (1,\ 1,\ 1)\,.$$

Им соответствуют элементарные конъюнкции

$$K_{\tilde{\alpha}_1} = \overline{x}_1 x_2 x_3\,,\ K_{\tilde{\alpha}_2} = x_1 \overline{x}_2 x_3\,,$$
$$K_{\tilde{\alpha}_3} = x_1 x_2 \overline{x}_3\,,\ K_{\tilde{\alpha}_4} = x_1 x_2 x_3\,.$$

Тогда СДНФ, представляющая мажоритарную функцию, имеет вид

$$\overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3. \qquad (5.4)$$

Для получения СКНФ для той же функции выпишем все конституенты нуля данной функции:

$$(0,\,0,\,0)\,,\;(0,\,0,\,1)\,,\;(0,\,1,\,0)\,,\;(1,\,0,\,0)\,.$$

Сопоставим им элементарные дизъюнкции

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3\,,\; x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3\,,\; x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\,,\; \overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$$

соответственно.
СКНФ для мажоритарной функции:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3). \quad \textbf{(5.5)}$$

5.6. Минимизация булевых функций

Проблема минимизации

Задача: среди всех ДНФ, представляющих данную функцию, выбрать наиболее простую (минимальную) ДНФ в смысле некоторого критерия.

Критерии простоты: число литералов, число элементарных конъюнкций и число отрицаний, используемых для записи формулы.

Определение 5.5. Число входящих в ДНФ элементарных конъюнкций называют ее **длиной**.

Определение 5.6. ДНФ называют **кратчайшей**, если она имеет наименьшую длину среди всех ДНФ, представляющих функцию f.

ДНФ называют **минимальной**, если она содержит наименьшее число литералов среди всех ДНФ, представляющих функцию f.

Пример 5.7. ДНФ $x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2$ не является минимальной, так как ее можно преобразовать к эквивалентной ДНФ:

$$x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2 = (x_1 \vee \overline{x}_1)x_2 = x_2.$$

Полученная ДНФ не содержит ни одного из литералов $\tilde{x}_1$, т. е. x_1 или $\overline{x}_1$. Вместо четырех литералов в исходной ДНФ получаем ДНФ, состоящую из одного литерала. ▶

Возможен ли прямой перебор?

Теоретически можно перебрать все ДНФ от n переменных и среди них выбрать нужные.

В каждую элементарную конъюнкцию каждое переменное может входить, не входить или входить с отрицанием, число различных конъюнкций (включая пустую) равно 3^n.

Для проверки соответствия ДНФ функции придется выполнить не менее 2^{3^n} более мелких операций. При $n = 3$ получим 134 217 728 операций.

Практически метод прямого перебора неприменим.

Для функции f, принимающей хотя бы одно ненулевое значение, всегда строится СДНФ.

Идея: максимально сократить количество анализируемых вариантов, используя СДНФ, а затем выбрать среди найденных вариантов наилучший по заданным критериям.

Минимизация с использованием тождеств склейки и поглощения

Тождества простой склейки и тождество поглощения:

$$xK \vee \overline{x}K = K, \quad xK \vee K = K, \tag{5.6}$$

где
K — некоторая элементарная конъюнкция,
xK и $\overline{x}K$ — некоторые элементарные конъюнкции, присутствующие в СДНФ минимизируемой функции.

Тождество склейки позволяет получить элементарную конъюнкцию K, которая содержит на один литерал меньше, чем исходные конъюнкции.
Тождество поглощения позволяет удалить из формулы элементарные конъюнкции xK и $\overline{x}K$, заменив их на K.
Применение тождества поглощения уменьшает длину ДНФ на единицу.
К полученной ДНФ можно снова применить эти тождества.
Продолжать следует до тех пор, пока применение тождеств не станет невозможным.
Тождество склейки применяют к различным парам конъюнкций, входящих в ДНФ, результат применения тождества склейки дописывают в ДНФ без удаления „склеиваемых“ конъюнкций. Удаляют конъюнкции с использованием тождества поглощения после того, как все возможные склейки выполнены.

Пример 5.8. Рассмотрим функцию трех переменных, заданную в виде СДНФ:

$$f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3. \quad (5.7)$$

1. Применим тождество склейки к первой и второй, второй и третьей, а также к четвертой и пятой конъюнкциям. Результаты выполнения тождества склейки добавим к исходной СДНФ, такое добавление дает ДНФ, эквивалентную исходной. Получим

$$\begin{aligned}\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \\ \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_2x_3 \vee \\ \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2.\end{aligned}$$

После применения тождества поглощения запишем ДНФ

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2. \tag{5.8}$$

Дальнейшее упрощение формулы с использованием тождеств склейки и поглощения невозможно.

2. Вариант 1 преобразования не является единственным. Применим тождество склейки к первой и второй, третьей и пятой, четвертой и пятой конъюнкциям.
$(f = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3)$
Запишем

$$\begin{aligned}
&\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \\
&\qquad \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee \\
&\qquad\qquad \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2.
\end{aligned}$$

Получим ДНФ

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2, \tag{5.9}$$

отличную от ДНФ (5.8). Дальнейшее упрощение ДНФ (5.9) невозможно.

3. В исходной СДНФ применим тождество склейки ко всем возможным парам (первой и второй, второй и третьей, третьей и пятой, четвертой и пятой конъюнкциям), а затем применим тождество поглощения, получим ДНФ

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3, \tag{5.10}$$

которая содержит все конъюнкции, входящие в ДНФ (5.8) и (5.9). Других ДНФ, эквивалентных СДНФ (5.7), построить не удается.

Итог:

1. $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2$.
2. $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2$
3. $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_3$

Две первые ДНФ являются кратчайшими и минимальными, ДНФ 2 содержит на одно отрицание меньше.

Все три ДНФ содержат общую часть $D = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1 x_2$, ДНФ 1 и 2 образуются добавлением к D конъюнкций $\overline{x}_2 x_3$ и $x_1 x_3$ соответственно, добавляемые конъюнкции содержатся в (5.10).

Определение 5.7. Булеву функцию g называют **импликантой** булевой функции f, если для любых наборов значений переменных из $g = 1$ следует $f = 1$.

Простой импликантой булевой функции f называют такую элементарную конъюнкцию в составе некоторой ДНФ, представляющей функцию f, что удаление из нее любого литерала приводит к тому, что она перестает быть импликантой.

Например, конъюнкция $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ (см. пример 5.8) не является простой импликантой функции f, так как из нее можно удалить литерал $\overline{x}_3$ и получить конъюнкцию $\overline{x}_1\overline{x}_2$. Эта конъюнкция будет простой импликантой.

Сокращенная ДНФ функции f есть ДНФ, представляющая функцию f, в которую входят все простые импликанты булевой функции f.

Алгоритм минимизации

1) последовательно выполняя все возможные склейки, а затем применяя к результату тождество поглощения, получить сокращенную ДНФ, содержащую все конъюнкции, дальнейшее упрощение которых с помощью указанных тождеств невозможно;

2) выделить из сокращенной ДНФ общую часть, входящую в любую представляющую функцию f ДНФ, составленную из простых импликант, затем выписать все возможные ДНФ (тупиковые), состоящие из простых импликант и представляющие функцию f;

3) найти среди выписанных ДНФ кратчайшие (по количеству слагаемых);

4) выбрать из кратчайших минимальные (по количеству литералов).

Геометрическая интерпретация первого шага алгоритма.

Установим смысл простой склейки с точки зрения геометрии булева куба.

Каждому набору $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, для которого $f(\tilde{\alpha}) = 1$ в СДНФ соответствует элементарная конъюнкция $K_{\tilde{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, принимающая значение 1 только на наборе $\tilde{\alpha}$.

Простая склейка может быть применена лишь к таким двум элементарным конъюнкциям $K_{\tilde{\alpha}}$ и $K_{\tilde{\beta}}$, которые отличаются только одним литералом.

Соответствующие наборы $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ различаются значением всего одной компоненты, т. е. они образуют ребро булева куба $\mathbb{B}^n$.

Тождество простой склейки можно применить только к тем элементарным конъюнкциям исходной СДНФ, представляющей функцию f, которые соответствуют элементам какого-либо ребра булева куба, на котором функция f принимает единичное значение.
Применяя простую склейку к исходной СДНФ Φ, получаем новую ДНФ Φ_1. Если возможно, к ней также применяем простую склейку — получаем ДНФ Φ_2.

Геометрия повторения простой склейки состоит в дальнейшем склеивании каждой пары ребер, принадлежащих одной грани размерности 2 и не имеющих общей вершины (противолежащих), на которых значение функции равно 1, в грани размерности 2.

Два ребра, принадлежащие одной грани размерности 2 и имеющие общую вершину, не склеиваются.

Продолжаем выполнять эту операцию до тех пор, пока не окажется, что для некоторого k в ДНФ Φ_k уже нельзя склеить никакие две элементарные конъюнкции. В силу конечности булева куба такое k всегда найдется.

Пример 5.9. Функция f от трех переменных, задана СДНФ:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3. \tag{5.11}$$

Применим тождество простой склейки к первой и третьей, ко второй и четвертой элементарным конъюнкциям в (5.11): $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = \overline{x}_2\overline{x}_3, \quad \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_2 x_3 = \overline{x}_2 x_3.$
В результате получим

$$f = \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 x_3. \tag{5.12}$$

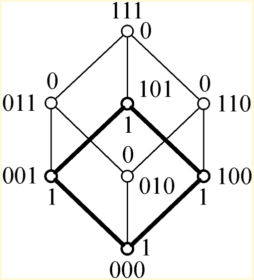

Рис. 2

С геометрической точки зрения склейка первой и третьей конъюнкций в формуле (5.11) означает, что функция f принимает единичное значение на ребре $[000, 100]$, а склейка второй и четвертой конъюнкций — на ребре $[001, 101]$.

Эти ребра являются соседними. Функция f принимает единичное значение и на другой паре соседних ребер: $[000, 001]$ и $[100, 101]$.

Если функция принимает единичное значение на двух соседних противолежащих ребрах булева куба, то она равна 1 в любой точке образуемой ими грани размерности 2. Применяя простую склейку к (5.12) (по переменному x_3), получаем $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2$.

Карты Карно

Для булевых функций от трех и четырех переменных процедура склейки наглядно и просто выполняется на **картах Карно**, представляющих собой прямоугольные таблицы.

В карте Карно для функции от трех переменных строки отмечены наборами значений переменного x_1, а столбцы — x_2, x_3. В клетках таблицы пишут 1 в том случае, если на соответствующем наборе исследуемая функция принимает значение 1. Карту Карно можно рассматривать как специальную таблицу, задающую булеву функцию.

Порядок следования наборов переменных в строках и столбцах определен так, чтобы двум соседним по горизонтали или вертикали клеткам соответствовали наборы, соединенные в булевом кубе ребром.

Пример 5.10. Рассмотрим функцию от трех переменных $f = \{0, 1, 2, 4, 5\}$.

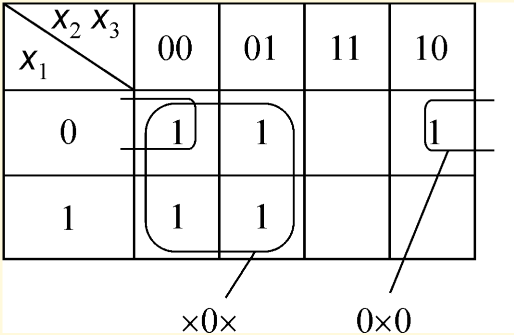

Рис. 3

Карта Карно функции и максимальные склейки показаны на рис. 3.

Отметим, что одна из склеек выполняется „через край“, а другая — сразу на четыре единицы. Сокращенная ДНФ имеет вид $\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$. ▶

Карта Карно для функции от четырех переменных есть табличное представление булева куба $\mathbb{B}^4$. Строки карты помечены наборами значений переменных x_1, x_2, а столбцы — x_3, x_4. На рис. 4 показана карта Карно для функции $f = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$. На карте обозначены максимальные склейки, соответствующие простым импликантам функции.

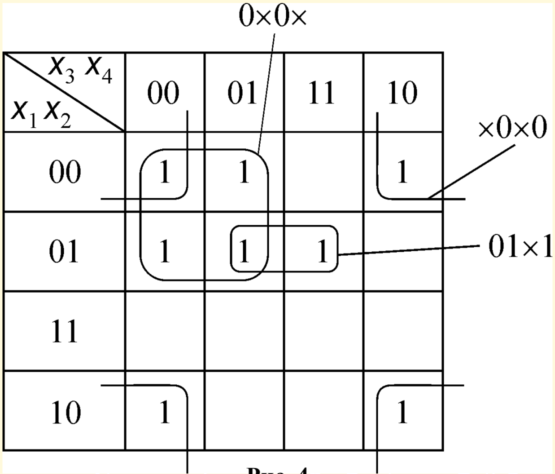

Рис. 4

Для карты, показанной на рис. 4, получим сокращенную ДНФ в виде $\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_4$.

Для функции от четырех переменных возможно получение склейки на восемь единиц, такая склейка отвечает грани куба размерности 3. В принципе, для функции четырех переменных возможна склейка шестнадцати единиц, однако это — тривиальный случай.

Определение ядра. ДНФ Квайна

С помощью карты Карно выписали все простые импликанты и получили сокращенную ДНФ.

Выделим общую часть, входящей во все представляющие заданную функцию ДНФ, которые можно получить из сокращенной ДНФ вычеркиванием некоторых конъюнкций.

Элементарная конъюнкция K покрывает элементарную конъюнкцию L ($K \succ L$), если любой литерал, входящий в K, входит в L.

$K \succ L \Rightarrow K \vee L = K$(согласно тождеству поглощения)

Например, $x_1x_2 \succ x_1x_2x_3, \quad x_1x_3 \succ x_1\overline{x}_2x_3$, но $x_1x_3 \not\succ x_1x_2\overline{x}_3$, т.к. вторая конъюнкция содержит литерал $\overline{x}_3$, отсутствующий в первой конъюнкции.

Каждая входящая в сокращенную ДНФ простая импликанта покрывает некоторую элементарную конъюнкцию исходной СДНФ. На карте Карно этому отвечает прямоугольник, закрывающий соответствующую единицу.

Простую импликанту называют **ядровой**, если она покрывает некоторую элементарную конъюнкцию исходной СДНФ, не покрываемую никакой другой простой импликантой.

На карте Карно прямоугольник, соответствующий ядровой импликанте — это такой прямоугольник, удалив который, получим единицу, не закрытую никаким другим прямоугольником.

Ни одна ядровая импликанта не может быть удалена из искомой минимальной ДНФ исходной функции.

Множество всех ядровых импликант (склеек) сокращенной ДНФ называют **ядром**.

Пример 5.11.

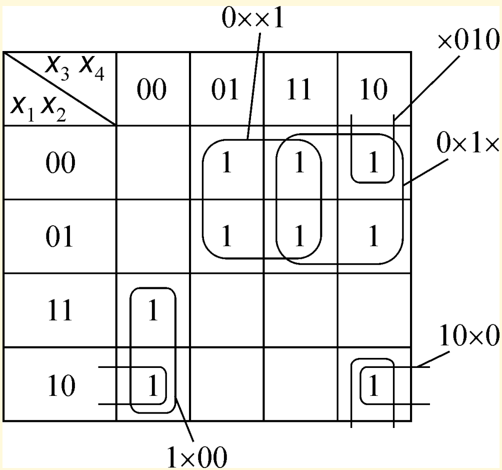

Рис. 5

На карте Карно (рис. 5) склейки $0\times\times1$, $0\times1\times$, 1×00, являются ядровыми. Две склейки 10×0 и $\times010$ не ядровые, поскольку удаление любого из изображающих их прямоугольников не приведет к появлению открытых единиц. ▶

На карте Карно могут быть склейки, не являющиеся ядровыми, но покрывающие только единицы, уже покрытые ядровыми склейками.

Такие склейки оказываются лишними, т. е. удаление соответствующих им простых импликант из сокращенной ДНФ не приводит к нарушению эквивалентности этой ДНФ с исходной СДНФ.

ДНФ, получающаяся из сокращенной ДНФ после удаления всех простых импликант, соответствующих максимальным склейкам, целиком покрываемых ядром, называют **ДНФ Квайна**.

Для любой булевой функции, отличной от константы 0, существует единственная ДНФ Квайна.

Перечисление тупиковых ДНФ

Выделить из сокращенной ДНФ ядро, входящее в любую ДНФ, которую можно получить из сокращенной, и перейти от сокращенной ДНФ к ДНФ Квайна.

Дальнейшая минимизация основана на переборе всех возможных ДНФ, представляющих исследуемую функцию, которые можно получить из ДНФ Квайна путем удаления некоторых конъюнкций.

Простую импликанту называют **избыточной** (относительно некоторой ДНФ, содержащей только простые импликанты и эквивалентной исходной СДНФ), если ее можно удалить из этой ДНФ без потери эквивалентности ее исходной СДНФ.

Можно пошагово удалить избыточные импликанты, начиная с сокращенной ДНФ. В результате получим ДНФ, не содержащую ни одной избыточной склейки.

Любую ДНФ, эквивалентную исходной СДНФ, содержащую все ядровые импликанты и не содержащую ни одной избыточной импликанты, называют **тупиковой**.

Для перечисления всех тупиковых ДНФ может быть использован алгоритм, основанный на построении вспомогательной КНФ, которую называют **функцией Патрика**.

Обозначим склейки на карте Карно (т. е. простые импликанты сокращенной ДНФ) через K_1, $K_2, \ldots,$ K_m.

Для каждой единицы карты Карно, не покрываемой ядром, запишем элементарную дизъюнкцию вида $K_i \vee K_j \ldots \vee K_l$, в которую включим только имена склеек, покрывающих данную единицу. Из полученных дизъюнкций составляем КНФ (**функцию Патрика**).

Пример 5.12.

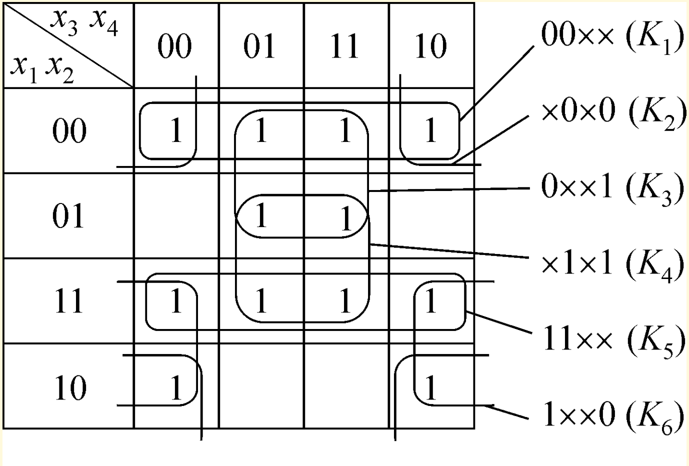

Рис. 6

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ представлена на карте Карно (рис. 6).

Ни одна склейка не является ядровой.

$$K_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2\ (00\times\times); \qquad K_2 = \overline{x}_2\overline{x}_4\ (\times 0\times 0);$$
$$K_3 = \overline{x}_1 x_4\ (0\times\times 1); \qquad K_4 = x_2 x_4\ (\times 1\times 1);$$
$$K_5 = x_1 x_2\ (11\times\times); \qquad K_6 = x_1\overline{x}_4\ (1\times\times 0).$$

Запишем функцию Патрика, просматривая единицы слева направо по строкам карты:

$$
\begin{gathered}
(K_1 \vee K_2) \wedge (K_1 \vee K_3) \wedge (K_1 \vee K_3) \wedge (K_1 \vee K_2) \wedge \\
\wedge (K_3 \vee K_4) \wedge (K_3 \vee K_4) \wedge (K_5 \vee K_6) \wedge (K_4 \vee K_5) \wedge \\
\wedge (K_4 \vee K_5) \wedge (K_5 \vee K_6) \wedge (K_2 \vee K_6) \wedge (K_2 \vee K_6).
\end{gathered}
$$

Применим тождество $K \wedge K = K$. Функцию можно упростить, удалив повторяющиеся дизъюнкции.

$$(K_1 \vee K_2) \wedge (K_1 \vee K_3) \wedge (K_3 \vee K_4) \wedge$$
$$\wedge (K_5 \vee K_6) \wedge (K_4 \vee K_5) \wedge (K_2 \vee K_6).$$

Скобки удобно раскрывать по парам, выбирая пары так, чтобы в них содержались одинаковые конъюнкции. Затем применить тождества поглощения $K_i \vee K_i K_j = K_i$

$$(K_1 \vee K_2) \wedge (K_1 \vee K_3) =$$
$$= K_1 \vee K_1 K_3 \vee K_1 K_2 \vee K_2 K_3 = K_1 \vee K_2 K_3.$$

Аналогично

$$(K_3 \vee K_4) \wedge (K_4 \vee K_5) = K_4 \vee K_3 K_5,$$
$$(K_5 \vee K_6) \wedge (K_2 \vee K_6) = K_6 \vee K_2 K_5.$$

$$
\begin{aligned}
&(K_1 \vee K_2K_3)(K_4 \vee K_3K_5)(K_6 \vee K_2K_5) = \\
&= (K_1K_4 \vee K_1K_3K_5 \vee K_2K_3K_4 \vee K_2K_3K_5)(K_6 \vee K_2K_5) \\
&= K_1K_4K_6 \vee K_1K_2K_4K_5 \vee K_1K_3K_5K_6 \vee K_1K_2K_3K_5 \vee \\
&\vee K_2K_3K_4K_6 \vee K_2K_3K_4K_5 \vee K_2K_3K_5K_6 \vee K_2K_3K_5.
\end{aligned}
$$

Упростим ДНФ, используя тождество поглощения.
$K_1K_2K_3K_5 \vee K_2K_3K_5 = K_2K_3K_5$,
$K_2K_3K_4K_5 \vee K_2K_3K_5 = K_2K_3K_5$,
$K_2K_3K_5K_6 \vee K_2K_3K_5 = K_2K_3K_5$.
В результате получим ДНФ

$$K_1K_4K_6 \vee K_1K_2K_4K_5 \vee K_1K_3K_5K_6 \vee \\ \vee K_2K_3K_4K_6 \vee K_2K_3K_5,$$

Каждая элементарная конъюнкция соответствует некоторой тупиковой ДНФ, каждой тупиковой ДНФ может быть сопоставлена одна из этих конъюнкций.

Тупиковые ДНФ можно получить на основе функции Патрика, заменив в каждой конъюнкции знаки $\wedge$ на знаки $\vee$.

$$\begin{aligned}
&1)\ K_1 \vee K_4 \vee K_6 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_2x_4 \vee x_1\overline{x}_4;\\
&2)\ K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2x_4 \vee x_1x_2;\\
&3)\ K_1 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_4 \vee x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_4;\\
&4)\ K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_6 = \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_4 \vee x_2x_4 \vee x_1\overline{x}_4;\\
&5)\ K_2 \vee K_3 \vee K_5 = \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_4 \vee x_1x_2.
\end{aligned}$$

Перечисление тупиковых ДНФ — самый трудоемкий этап всего алгоритма минимизации. ►

Отыскание кратчайших и минимальных ДНФ

Среди найденных тупиковых ДНФ находят кратчайшие и минимальные. Минимальная ДНФ всегда является кратчайшей, обратное неверно.

Для функции, рассмотренной в примере 5.12, первая и пятая ДНФ являются кратчайшими.

Количество литералов в обеих ДНФ совпадает, поэтому обе ДНФ минимальные. Количество отрицаний в этих ДНФ также одинаково, и по этому критерию они неразличимы.

На рис. 7 а) изображено покрытие всех единиц склейками, соответствующей первой ДНФ, а на рис. 7 б) — покрытие, соответствующее пятой ДНФ.

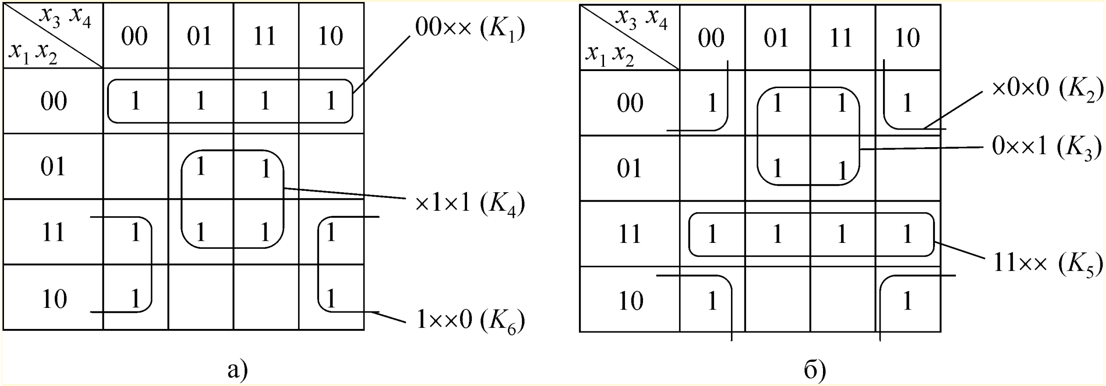

Рис. 7