Дискретная математика
4-й семестр, РТ5 (2020-21 уч. год)
Модуль 1, рубежный контроль
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы
(3 балла)

1. Как определяются операции объединения, пересечения, разности, симметрической разности и дополнения множеств?
2. Что такое кортеж? Что называют декартовым произведением множеств? Перечислите свойства декартова произведения множеств.
3. Что называют отображением из множества A в множество B? Какое отображение называют инъективным, сюръективным и биективным?
4. Что называют соответствием из множества A в множество B? Как строится график и граф соответствия?
5. Что такое область определения и область значения соответствия? Что такое сечение соответствия по элементу x? В каком случае соответствие называют функциональным по компоненте?
6. Что называют бинарным отношением на множестве? Что называют n-арным отношением на множестве? Что называют рефлексивно-транзитивным замыканием бинарного отношения на множестве?
7. Какое бинарное отношение на множестве называют рефлексивным, иррефлексивным, симметричным, антисимметричным и транзитивным?
8. Какое бинарное отношение на множестве называют толерантностью и какое эквивалентностью?
9. Какое бинарное отношение на множестве называют порядком, предпорядком, линейным порядком и частичным порядком?
10. Как на упорядоченном множестве определяется строгий порядок, двойственный порядок и отношение доминирования?
11. Какой элемент множества называют наибольшим, наименьшим, максимальным и минимальным? Что такое точная верхняя грань и точная нижняя грань множества?
12. Что такое булева функция и булев куб? Как определяется булев порядок и лексикографический порядок на булевом кубе?
13. Что называют фиктивной переменной булевой функции? Какие булевы функции называют равными?
14. Как определяется композиция булевых функций? Определите понятие формулы над заданным множеством F булевых функций. Как определяется функция, представляемая формулой?
15. Что такое дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ), конъюнктивная нормальная форма (КНФ) и совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)?
16. Какая ДНФ называется минимальной и какая кратчайшей? В чём состоит задача минимизации булевых функций в классе ДНФ?
17. Что такое импликанта для заданной булевой функции, простая импликанта и ядровая импликанта?

18. Какая ДНФ называется сокращённой? Какие импликанты в сокращённой ДНФ называются избыточными? Какая ДНФ называется тупиковой?
19. Какое множество булевых функций называют базисом Жегалкина? Что такое полином Жегалкина? В чём заключается метод неопределённых коэффициентов построения полинома Жегалкина по таблице булевой функции?
20. Какая булева функция называется самодвойственной, какая монотонной и какая линейной?

Теоретические вопросы
(4 балла)

1. Перечислите свойства операций объединения, пересечения, разности и симметрической разности множеств.
2. Что называют характеристической функцией множества? В чём заключается метод характеристических функций доказательства теоретико-множественных тождеств? Напишите характеристические функции для пересечения, объединения, дополнения, разности и симметрической разности.
3. Как определяется композиция соответствий и обратное соответствие? Перечислите свойства композиции соответствий и обратного соответствия.
4. Сформулируйте необходимые и достаточные условия рефлексивности, иррефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности бинарного отношения.
5. Что называют матрицей бинарного отношения? Сформулируйте теорему о матрице объединения, пересечения и композиции бинарных отношений, а также о матрице обратного отношения.
6. Сформулируйте теорему о том, как проверить рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность и транзитивность бинарного отношения по его матрице.
7. Что называют классом эквивалентности, фактор-множеством по заданному отношению эквивалентности и разбиением множества?
8. Сформулируйте определение индуктивного упорядоченного множества. Какое отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое называют непрерывным и какое монотонным?
9. Назовите основные этапы алгоритма Квайна–Мак-Клоски.
10. Перечислите классы Поста с описанием того, из каких функций состоит каждый класс. Что означает утверждение о том, что каждый класс Поста замкнут?

Теоретические вопросы
(5 баллов)

1. В чём заключаются метод двух включений и метод эквивалентных преобразований доказательства теоретико-множественных тождеств? Докажите дистрибутивность пересечения относительно объединения методом двух включений.
2. Сформулируйте и докажите теорему о связи между отношением эквивалентности и разбиением множества.
3. Сформулируйте и докажите теорему о связи монотонности и непрерывности отображения одного индуктивного упорядоченного множества в другое.
4. Что называют неподвижной точкой отображения? Сформулируйте и докажите теорему о неподвижной точке отображения индуктивного упорядоченного множества в себя.
5. Сформулируйте и докажите теорему о представлении булевой функции в виде СДНФ и СКНФ.

6. Сформулируйте и докажите утверждение о немонотонной булевой функции.
7. Сформулируйте и докажите утверждение о реализации констант 0 и 1 с помощью несамодвойственной булевой функции и отрицания.
8. Сформулируйте и докажите утверждение о реализации конъюнкции с помощью нелинейной булевой функции, констант и отрицания.
9. Сформулируйте и докажите утверждение о замкнутости классов Поста.
10. Сформулируйте и докажите критерий Поста о полноте множества булевых функций.

Примеры задач

1. **Метод двух включений (3 балла)**

   1.1. Используя метод двух включений, для произвольных бинарных отношений ρ, τ и σ выясните, справедливо ли тождество $(\rho^{-1} \circ \sigma^{-1}) \circ \tau^{-1} = \big(\tau \circ (\sigma \circ \rho)\big)^{-1}$.

   1.2. Покажите, что для произвольных бинарных отношений ρ_1 и ρ_2 на множестве A справедливо тождество $(\rho_1 \cap \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \cap \rho_1^{-1}$.

2. **Свойства бинарных отношений (3 балла)**

   2.1. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана плоскость $ax + by + cz = 0$. Точки с радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ связаны бинарным отношением τ, если $\big((\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \vec{n}\,\big) = 0$, где $\vec{n}$ – нормаль к указанной плоскости, а $(\,\cdot\,,\ \cdot\,)$ – скалярное произведение векторов. Покажите, что τ есть отношение эквивалентности. Что будет классом эквивалентности точки из $\mathbb{R}^3$?

   2.2. На множестве упорядоченных пар (x, y), $x,\ y \in \mathbb{R}$, задано отношение τ по правилу $(x_1, y_1)\ \tau\ (x_2, y_2) \ \Leftrightarrow\ x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2$. Покажите, что τ – отношение эквивалентности. Укажите классы эквивалентности. Для точки $\big(1, \sqrt{2}\big)$ изобразите класс эквивалентности графически.

   2.3. Пусть A – конечное множество. Какое отношение эквивалентности на нём даёт наибольшее число эквивалентных классов? Сколько? Сколькими способами можно задать отношение эквивалентности, разбивающее A на два класса?

   2.4. Пусть F – множество функций, непрерывных на $[a, b]$, и на множестве F задано бинарное отношение τ: $f(x)\ \tau\ g(x)$, если $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$. Установите, будет ли отношение τ отношением толерантности или эквивалентности. Если отношение является эквивалентностью, опишите классы эквивалентности по этому отношению.

   2.5. Пусть F – множество функций, непрерывных на $[a, b]$, и на множестве F задано бинарное отношение τ: $f(x)\ \tau\ g(x)$, если и только если $\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$. Установите, является ли τ отношением предпорядка или порядка.

   2.6. Пусть τ – бинарное отношение на множестве $\mathbb{N}^2$: $(a, b)\ \tau\ (c, d)$, если и только если $a \le c$ и $b \ge d$. Является ли τ отношением порядка? Если да, установите, является ли этот порядок линейным и существует ли наименьший элемент по отношению τ.

   2.7. Пусть на множестве неотрицательных рациональных чисел определено бинарное отношение v: $(a/b)\ v\ (c/d)$, если и только если $ad \le bc$. Покажите, что v является отношением порядка. Существует ли наименьший элемент? Является ли этот порядок линейным?

2.8. Пусть на множестве P последовательностей длины 3, элементами которых являются натуральные числа, задано бинарное отношение τ: $a_1a_2a_3 \ \tau \ b_1b_2b_3$, если и только если a_i делит b_i нацело, $i = 1, 2, 3$. Установите, является ли τ отношением порядка. Является ли этот порядок линейным? Существует ли наименьший элемент?

2.9. Пусть на множестве P последовательностей длины 2, элементами которых являются целые числа (кроме нуля), задано бинарное отношение τ: $a_1a_2 \ \tau \ b_1b_2$, если и только если a_i делит b_i нацело, $i = 1, 2$. Установите, является ли τ отношением предпорядка, порядка.

2.10. Пусть $\preccurlyeq_a$ есть отношение порядка на множестве A, а $\preccurlyeq_b$ – на множестве B. На множестве $A \times B$ зададим бинарное отношение $\preccurlyeq$: $(a_1, b_1) \preccurlyeq (a_2, b_2)$, если и только если $a_1 \preccurlyeq_a a_2$ и $b_1 \preccurlyeq_b b_2$. Докажите, что $\preccurlyeq$ есть отношение порядка на $A \times B$. Является ли этот порядок линейным, если линейными являются порядки на множествах A и B?

2.11. На множестве упорядоченных пар (x, y), $x, \ y \in \mathbb{R}$, задано отношение π по правилу $(x_1, y_1) \ \pi \ (x_2, y_2) \ \Leftrightarrow \ x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$. Покажите, что π – отношение порядка. Установите, является ли этот порядок линейным. Найдите множество нижних и верхних граней множества $\{A, B\}$, где $A = (1, 2)$ и $B = (2, 1)$. Укажите $\inf\{A, B\}$ и $\sup\{A, B\}$, если последние существуют. Приведите графическую иллюстрацию.

3. Минимизация булевой функции (4 балла)

3.1. Минимизируйте функцию $f = (0\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,0)$ с использованием карты Карно.

3.2. Минимизируйте функцию $f = (1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,1)$ с использованием карты Карно.

4. Проверка самодвойственности, монотонности и линейности булевой функции (4 балла)

4.1. Покажите, что функция $f = (0\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,1)$ не является самодвойственной. С использованием отрицания реализуйте константы 0 и 1, т. е. задайте их формулами над $\{f, ^{-}\}$.

4.2. Покажите, что функция $f = (0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,0)$ не является монотонной. Указать все соседние наборы, на которых нарушается монотонность. С использованием констант 0 и 1 реализуйте отрицание, т. е. задайте отрицание формулой над $\{f, 0, 1\}$.

4.3. Покажите, что функция $f = (1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1)$ не является линейной. С использованием констант 0, 1 и отрицания реализуйте конъюнкцию, т. е. задайте её формулой над $\{f, 0, 1, ^{-}\}$.

5. Исследование полноты множества булевых функций (6 баллов)

5.1. Исследуйте на полноту множество булевых функций $F = \{f_1, f_2\}$, где $f_1 = (0\,1\,0\,1)$, $f_2 = (0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,0)$. В случае, если множество F не является полным, добавьте к нему функцию общего вида так, чтобы множество стало полным.

5.2. Исследуйте на полноту множество булевых функций $F = \{\Rightarrow, f_1\}$, где $f_1 = (1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0)$. В случае, если множество F не является полным, добавьте к нему функцию общего вида так, чтобы множество стало полным.