

Дискретная математика
4-й семестр, РТ5 (2020-21 уч. год)
Модуль 2, рубежный контроль
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы
(8 баллов)

1. Дайте определения бинарной и n -арной операций на множестве. В каком случае бинарная операция называется ассоциативной, коммутативной, идемпотентной?
2. Дайте определения правого и левого нейтрального элемента относительно бинарной операции. Сформулируйте и докажите утверждение о совпадении правого и левого нейтральных элементов и их единственности.
3. Дайте определения элемента, правого и левого обратного к заданному элементу относительно бинарной операции. Сформулируйте и докажите утверждение о совпадении правого и левого обратных элементов и их единственности.
4. Дайте определения группоида, полугруппы, моноида, группы и абелевой группы.
5. Сформулируйте и докажите свойства группы.
6. Дайте определения группы подстановок, цикла длины k и транспозиции.
7. Дайте определения степени элемента группы, порядка элемента группы и циклической группы. Сформулируйте и докажите теорему о порядке циклической группы.
8. Дайте определения кольца, коммутативного кольца, мультипликативной группы кольца, тела и поля.
9. Дайте определение кольца вычетов по модулю k и напишите таблицы операций сложения и умножения для $k = 4$.
10. Сформулируйте и докажите свойства кольца.
11. Дайте определение делителей нуля и приведите пример делителей нуля в некотором кольце.
12. Дайте определение области целостности. Сформулируйте и докажите теорему о том, когда область целостности является полем.
13. Дайте определения полукольца, коммутативного полукольца и идемпотентного полукольца, а также естественного порядка идемпотентного полукольца.
14. Сформулируйте и докажите теорему о сумме элементов идемпотентного полукольца.
15. Дайте определение замкнутого полукольца. Сформулируйте и докажите теорему о замкнутости конечного идемпотентного полукольца.
16. Дайте определение итерации элемента в замкнутом полукольце. Сформулируйте и докажите теорему о решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.
17. Дайте определения неориентированного графа, степени его вершины, цепи, простой цепи и цикла. Сформулируйте и докажите теорему о существовании простой цепи.
18. Дайте определения ориентированного графа, степени его вершины, полустепени захода и исхода вершины, пути, простого пути и контура.
19. Дайте определения матрицы инциденций, матрицы смежности вершин и матрицы достижимости для неориентированного и ориентированного графа.
20. Дайте определения взвешенного ориентированного графа, матрицы меток дуг, метки пути и стоимости прохождения из одной вершины в другую.
21. Сформулируйте и докажите лемму о свойствах k -й степени матрицы меток дуг. Сформулируйте и докажите теорему о связи матрицы меток дуг и матрицы стоимостей взвешенного ориентированного графа.

22. Дайте определения подграфа, остовного подграфа, связного графа и компоненты связности.
23. Дайте определения неориентированного дерева, неориентированного леса и остовного леса. Сформулируйте и докажите теорему о существовании максимального остовного леса.
24. Дайте определения связного орграфа (ориентированного графа), сильно связного орграфа, слабо связного орграфа, компоненты связности, бикомпоненты и слабой компоненты.
25. Дайте определения ориентированного дерева, ориентированного леса, высоты ориентированного дерева, а также глубины, высоты и уровня для вершины ориентированного дерева.
26. Дайте определения бинарного ориентированного дерева и полного бинарного ориентированного дерева. Сформулируйте и докажите теорему о высоте бинарного ориентированного дерева.
27. Сформулируйте задачу сортировки n -элементного множества. Получите формулу для оценки трудоёмкости задачи сортировки.
28. Опишите разницу между такими структурами данных, как стек и очередь, а также между алгоритмами обхода вершин графа в глубину и в ширину.
29. Опишите классификацию рёбер неориентированного графа и дуг ориентированного графа при поиске глубинного остовного леса. Приведите алгоритм распознавания класса дуги ориентированного графа по D -номерам и текущему состоянию стека.
30. Дайте определения алфавита, слова в алфавите, языка в алфавите, а также операций объединения, соединения и итерации языков.
31. Дайте определения порождающей грамматики, правила вывода, выводимости слова u из слова x в данной грамматике и языка, порождаемого грамматикой.
32. Дайте определения регулярной грамматики и регулярного языка. Приведите пример регулярной и нерегулярной грамматики.
33. Дайте определение полукольца $\mathcal{R}(V)$, конечного автомата, его функции переходов и языка конечного автомата.
34. Дайте определения полностью определённого, детерминированного и квазидетерминированного конечного автомата.
35. Опишите, как по конечному автомату построить эквивалентную ему регулярную грамматику и как по регулярной грамматике построить эквивалентный ей конечный автомат.
36. Сформулируйте и докажите теорему Клини.
37. Опишите задачу анализа конечного автомата и алгоритм её решения.
38. Дайте определение эквивалентных конечных автоматов. Сформулируйте теорему о детерминизации конечного автомата и опишите алгоритм построения детерминированного конечного автомата, эквивалентного заданному.
39. Сформулируйте и докажите теорему о дополнении регулярного языка. Сформулируйте и докажите следствие из этой теоремы (о пересечении, разности и симметрической разности регулярных языков).

Примеры задач

1. Бинарные операции, группы, кольца и поля (9 баллов)

- 1.1. На множестве M определена операция \circ по правилу $x \circ y = x$. Установите, является ли алгебра (M, \circ) полугруппой. Существуют ли в ней правые или левые нейтральные элементы?
- 1.2. Пусть на множестве M^2 , где M – некоторое множество, определена бинарная операция \circ по правилу $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$. Установите, является ли алгебра (M^2, \circ) полугруппой. Существуют ли в ней правые или левые нейтральные элементы?

- 1.3. На множестве целых чисел \mathbb{Z} определена операция \circ по правилу $a \circ b = a + b + ab$. Установите, является ли алгебра (\mathbb{Z}, \circ) коммутативным моноидом.
- 1.4. Установите, является ли моноидом алгебра $(2^A, \cap)$, где A – некоторое множество.
- 1.5. В аддитивной группе вычетов по модулю 7 решите уравнение $4 \oplus x = 2$.
- 1.6. В мультипликативной группе вычетов по модулю 7 решите уравнение $3^{2011} \otimes x = 2$.
- 1.7. В мультипликативной группе вычетов \mathbb{Z}_{31}^* решите уравнение $2 \otimes x \otimes 8 = 5$.
- 1.8. Установите, является ли алгебра $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \otimes)$, где $x \otimes y = 3xy$, группой, и если да, то решите в этой группе уравнение $2 \otimes x = 5$.
- 1.9. В группе подстановок S_4 решите уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ X \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 1.10. В группе подстановок S_7 решите уравнение

$$(1\ 3\ 6) \circ (5\ 6) \circ X \circ (1\ 4\ 2\ 7) = (1\ 3\ 5).$$

- 1.11. Установите, является ли кольцом алгебра $(2^A, \Delta, \cap)$, где A – некоторое множество.
- 1.12. Установите, являются ли полями следующие кольца вычетов $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{31}$. Существуют ли делители нуля в этих кольцах?
- 1.13. Какие из множеств матриц, элементы которых действительные числа, образуют кольцо относительно матричных операций сложения и умножения? Какие из колец являются полями?
- а) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$;
- б) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$.
- 1.14. В поле \mathbb{Z}_7 решите систему уравнений:

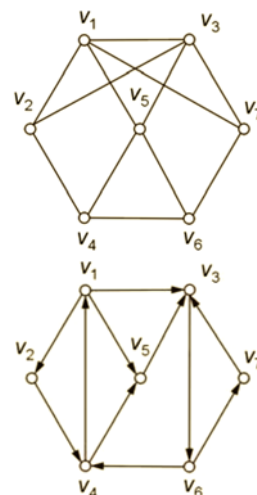
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - 6x_3 = 2. \end{cases}$$

- 1.15. Установите, разрешима ли в кольце \mathbb{Z}_{21} система уравнений:

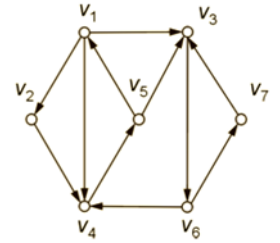
$$\begin{cases} 5x + 2y = 1, \\ y - 11x = 13. \end{cases}$$

2. Алгоритмы на графах и полукольца (9 баллов)

- 2.1. Выполните поиск в глубину в неориентированном графе из вершины V_1 . Запишите списки смежности. Вершины в списке смежности расположите в порядке возрастания номеров. Приведите протокол работы алгоритма, указав D -номера вершин. Постройте глубинное остовное дерево.
- 2.2. Выполните поиск в глубину в ориентированном графе из вершины V_5 . Запишите списки смежности. Вершины в списке смежности расположите в порядке возрастания номеров. Приведите протокол работы алгоритма, указав D -номера вершин. Постройте глубинное остовное дерево.



- 2.3. Выполните поиск в ширину в ориентированном графе из вершины V_5 . Запишите списки смежности. Вершины в списке смежности расположите в порядке возрастания номеров. Приведите протокол работы алгоритма, указав D -номера вершин. Отметьте на графе кратчайшие пути из стартовой вершины во все остальные, используя массив «предков», сформированный при работе алгоритма.



- 2.4. Решив систему уравнений в полукольце \mathcal{B} , найдите матрицу достижимости ориентированного графа. Матрица A смежности вершин графа задана таблицей. При нахождении решения следует пользоваться только формулой для решения линейного уравнения в замкнутом полукольце и методом исключения переменных.

0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0

- 2.5. Решив систему уравнений в полукольце \mathcal{R}^+ , найдите матрицу стоимостей ориентированного графа. Матрица меток дуг графа задана таблицей. При нахождении решения следует пользоваться только формулой для решения линейного уравнения в замкнутом полукольце и методом исключения переменных.

∞	2	∞	∞	6
∞	5	∞	∞	2
2	∞	∞	6	4
∞	∞	∞	3	3
3	∞	∞	∞	1

3. Регулярные языки и конечные автоматы (10 баллов)

- 3.1. Решив систему уравнений в полукольце регулярных языков, найдите язык, допускаемый конечным автоматом $M = \{\{a, b\}, \{q_1, q_2, q_3\}, q_1, \{q_3\}, \delta(q_1, a) = \{q_3\}, \delta(q_2, a) = \{q_1\}, \delta(q_2, b) = \{q_3\}, \delta(q_3, a) = \{q_2\}\}$.
- 3.2. По регулярному выражению $(ab + b)^*b$ постройте конечный автомат, опираясь на доказательство теоремы Клини. Удалите из полученного конечного автомата λ -переходы и детерминизируйте его.
- 3.3. Детерминизируйте конечный автомат $M = \{\{0, 1\}, \{q_1, q_2, q_3\}, q_1, \{q_3\}, \delta(q_1, 0) = \{q_1, q_3\}, \delta(q_1, 1) = \{q_2, q_3\}, \delta(q_2, 1) = \{q_1\}, \delta(q_3, 0) = \{q_2\}\}$. Установите, допускает ли конечный автомат цепочку 00110.
- 3.4. Найдите регулярное выражение для дополнения языка $L = (ab + b)^*b$. (Указание: построить КА по регулярному выражению, детерминизировать, построить КА для дополнения, найти язык построенного КА).
- 3.5. Постройте конечный автомат в алфавите $\{0, 1\}$, который допускает множество всех цепочек, не заканчивающихся подцепочкой 00.