# Дискретная математика
## 4-й семестр, РТ5, 2020-21 уч. год
## Подготовка к экзамену

## Теоретические вопросы

1. Отношение эквивалентности. Класс эквивалентности. Фактор-множество. Теорема о связи между отношением эквивалентности и разбиением множества (с доказательством).
2. Отношение порядка. Индуктивные упорядоченные множества. Теорема о монотонности непрерывного отображения (с доказательством). Пример монотонного отображения, не являющегося непрерывным.
3. Индуктивное упорядоченное множество. Неподвижная точка отображения множества в себя. Теорема о неподвижной точке (с доказательством).
4. Булевы функции. Суперпозиция булевых функций. Формулы. Процесс построения формулы. Функция, представляемая формулой.
5. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Теорема о представлении булевой функции в виде СДНФ (с доказательством). Построение СДНФ по таблице функции.
6. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Теорема о представлении булевой функции в виде СКНФ (с доказательством). Построение СКНФ по таблице функции.
7. Полное множество булевых функций. Стандартный базис. Доказательство полноты множества булевых функций с использованием заданного полного множества. Примеры полных множеств (с доказательством полноты).
8. Базис Жегалкина и его полнота (с доказательством). Полином Жегалкина. Теорема о единственности полинома Жегалкина для каждой булевой функции (с доказательством).
9. Булев порядок. Монотонные функции. Утверждение о возможности получить отрицание из немонотонной функции (с доказательством). Теорема Поста (формулировка).
10. Классы Поста. Утверждение о возможности получить конъюнкцию из нелинейной функции (с доказательством). Теорема Поста (формулировка).
11. Полное множество булевых функций. Классы Поста. Замкнутость классов Поста (с доказательством замкнутости класса $S$).
12. Полное множество булевых функций. Классы Поста. Замкнутость классов Поста (формулировка). Утверждения о несамодвойственной, немонотонной и нелинейной функциях (формулировки). Теорема Поста (с доказательством).
13. Группа. Решение уравнений $a \cdot x = b$ в группе $(G, \ \cdot)$ (с доказательством).
14. Кольцо. Тожества кольца (аннулирующее свойство нуля, свойство обратного по сложению при умножении, дистрибутивность умножения относительно вычитания) (с доказательством).
15. Кольца и поля. Область целостности. Теорема о конечной области целостности (с доказательством).
16. Естественный порядок идемпотентного полукольца. Точная верхняя грань множества. Теорема о точной верхней грани конечного подмножества носителя идемпотентного полукольца (с доказательством).
17. Замкнутое полукольцо. Теорема о замкнутости конечного идемпотентного полукольца (с доказательством).
18. Замкнутое полукольцо. Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце (формулировка). Теорема о наименьшем решении линейного уравнения $x = ax + b$ в замкнутом полукольце (с доказательством).

19. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения $x = ax + b$ в замкнутом полукольце (с доказательством). Решение систем линейных уравнений в замкнутых полукольцах.
20. Задача о путях во взвешенных графах. Вычисление стоимости прохождения по всем путям заданной длины (с доказательством). Матрица стоимости прохождения между парами вершин.
21. Алфавит. Слово и язык в алфавите. Полукольцо всех языков (с доказательством дистрибутивности).
22. Полукольцо языков в алфавите $V$. Замкнутость полукольца всех языков (с доказательством).
23. Регулярные языки и регулярные выражения. Полукольцо регулярных языков. Незамкнутость полукольца регулярных языков (с доказательством).
24. Конечные автоматы (КА). Представление автомата ориентированным графом, взвешенным над полукольцом регулярных языков. Нахождение языка, допускаемого КА.
25. Конечные автоматы и регулярные языки. Теорема Клини (с доказательством).
26. Детерминизация конечных автоматов. Теорема о детерминизации (без доказательства). Алгоритм детерминизации (описание и пример).
27. Регулярные языки. Теорема о регулярности дополнения регулярного языка (с доказательством). Регулярность пересечения, разности и симметрической разности регулярных языков.

## Примеры задач

1. **Множества и отношения**

   1.1. Для бинарного отношения $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in \{1, 2, 3, 4\},\ 1 \le xy \le 6\}$ исследовать свойства (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).

   1.2. На множестве упорядоченных пар $(x, y)$, $x,\ y \in \mathbb{R}$, задано отношение $\tau$ по правилу $(x_1, y_1)\ \tau\ (x_2, y_2) \iff x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2$. Покажите, что $\tau$ – отношение эквивалентности. Укажите классы эквивалентности. Для точки $(1, \sqrt{2})$ изобразите класс эквивалентности графически.

   1.3. На множестве упорядоченных пар $(x, y)$, $x,\ y \in \mathbb{R}$, задано отношение $\pi$ по правилу $(x_1, y_1)\ \pi\ (x_2, y_2) \iff x_1 \le x_2$ и $y_1 \le y_2$. Покажите, что $\pi$ – отношение порядка. Установите, является ли этот порядок линейным. Найдите множество нижних и верхних граней множества $\{A, B\}$, где $A = (1, 2)$ и $B = (2, 1)$. Укажите $\inf\{A, B\}$ и $\sup\{A, B\}$, если последние существуют. Приведите графическую иллюстрацию.

   1.4. Используя метод двух включений, для произвольных бинарных отношений $\rho$, $\tau$ и $\sigma$ выясните, справедливо ли тождество $(\rho^{-1} \circ \sigma^{-1}) \circ \tau^{-1} = \big(\tau \circ (\sigma \circ \rho)\big)^{-1}$.

2. **Элементы общей алгебры**

   2.1. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ определена операция $\circ$ по правилу $a \circ b = a + b + ab$. Установите, является ли алгебра $(\mathbb{Z},\ \circ)$ коммутативным моноидом.

   2.2. Установите, является ли алгебра $(\mathbb{R} \setminus \{0\},\ \otimes)$, где $x \otimes y = 3xy$, группой, и если да, то решите в этой группе уравнение $2 \otimes x = 5$.

   2.3. Установите, является ли кольцом алгебра $(2^A,\ \triangle,\ \cap)$, где $A$ – некоторое множество.

   2.4. В мультипликативной группе вычетов по модулю 7 решите уравнение $3^{2011} \otimes x = 2$.

   2.5. В группе подстановок $S_7$ решите уравнение $(1\ 3\ 6)^{2019} \circ X \circ (1\ 4\ 2\ 7) = (1\ 3\ 5)$.

2.6. В поле $\mathbb{Z}_7$ решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - 6x_3 = 2. \end{cases}$$

2.7. В полукольце $\mathcal{D}_{48} = (\text{Дел}(48),\ \oplus,\ \otimes)$, где $\text{Дел}(48)$ – множество делителей числа 48, $\oplus$ – операция вычисления наименьшего общего кратного, $\otimes$ – операция вычисления наибольшего общего делителя, найдите наименьшее решение уравнения $x = 6 \otimes x \oplus 2$.

2.8. В полукольце $\mathcal{S} = (2^M,\ \cap,\ \cup)$, где $M = [0; 1]$ – отрезок числовой прямой, решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = Ax_1 + Bx_2 + C, \\ x_2 = Dx_1 + Ex_2 + F. \end{cases}$$

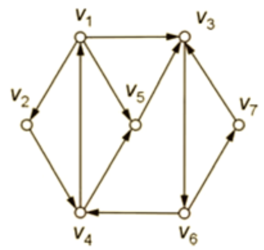
Здесь $A = [0; 0{,}5]$, $B = [0{,}25; 0{,}75]$, $C = [0; 0{,}75]$, $D = [0{,}75; 1]$, $E = [0{,}5; 0{,}75]$, $F = [0{,}5; 1]$.

2.9. В полукольце $\mathcal{S}_{[0;1]} = ([0; 1], \max, \min)$ решить систему уравнений

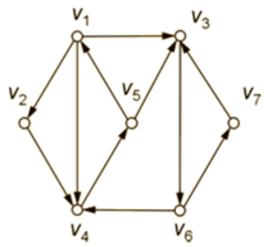
$$\begin{cases} x_1 = 0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2, \\ x_2 = 0{,}3x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}6. \end{cases}$$

## 3. Теория графов

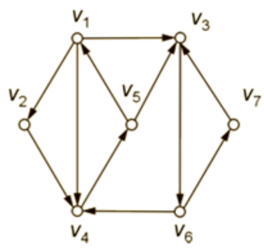
3.1. Выполните поиск в глубину в ориентированном графе из вершины $V_5$. Запишите списки смежности. Вершины в списке смежности расположите в порядке возрастания номеров. Приведите протокол работы алгоритма, указав $D$-номера вершин. Постройте глубинное остовное дерево.



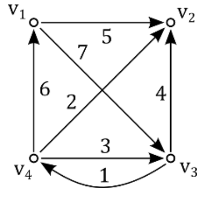

3.2. Выполните поиск в ширину в ориентированном графе из вершины $V_5$. Запишите списки смежности. Вершины в списке смежности расположите в порядке возрастания номеров. Приведите протокол работы алгоритма, указав $D$-номера вершин. Отметьте на графе кратчайшие пути из стартовой вершины во все остальные, используя массив «предков», сформированный при работе алгоритма.




3.3. Решив систему уравнений в полукольце $\mathcal{B}$, найти второй и третий столбцы матрицы достижимости ориентированного графа.




3.4. Решив систему уравнений в полукольце $\mathcal{R}^+$, найти второй столбец матрицы кратчайших расстояний для графа.




## 4. Регулярные языки и конечные автоматы

4.1. Решив систему уравнений в полукольце регулярных языков, найдите язык, допускаемый конечным автоматом $M = \{\{a, b\},\ \{q_1, q_2, q_3\},\ \{q_1\},\ \{q_3\},\ \delta(q_1, a) = \{q_3\},\ \delta(q_2, a) = \{q_1\},\ \delta(q_2, b) = \{q_3\},\ \delta(q_3, a) = \{q_2\}\}$.

4.2. Постройте конечный автомат в алфавите $\{0, 1\}$, который допускает множество всех цепочек, не заканчивающихся подцепочкой $00$.

4.3. Решить систему линейных уравнений и построить конечный автомат, допускающий язык, заданный регулярным выражением $x_1$.

$$\begin{cases} x_1 = ax_1 + bx_2, \\ x_2 = (a+b)x_1 + \lambda. \end{cases}$$

## 5. Минимизация булевых функций

5.1. С использованием карты Карно перечислить все тупиковые ДНФ и найти минимальные ДНФ для функции $f = \{0, 1, 2, 6, 7, 8, 9, 11, 14, 15\}$. Для функции $f$ указаны номера тех наборов, на которых функция принимает значение 1.

## 6. Теорема Поста

6.1. Исследуйте на полноту множество булевых функций $F = \{f_1, f_2\}$, где $f_1 = (0\ 1\ 0\ 1)$, $f_2 = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$. В случае, если множество $F$ не является полным, добавьте к нему функцию общего вида так, чтобы множество стало полным и выразите конъюнкцию формулой над этим полным множеством.