Вопросы для подготовки к экзамену
по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения»
для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ*

1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для неопределённого интеграла. [*Л. 1,2.*]

2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей. [*Л. 3.*]

3. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции. [*Л. 5–6.*]

4. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла. [*Л. 5–6.*]

5. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла. [*Л. 5–6.*]

6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла. [*Л. 5–6.*]

7. Дать определение интеграла с переменным верхним пределом. Сформулировать и доказать теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом. [*Л. 7.*]

8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона — Лейбница. [*Л. 5–7.*]

9. Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла. [*Л. 5–7.*]

10. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат. [*Л. 5–7.*]

11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла. [*Л. 7.*]

12. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода. [*Л. 8–10.*]

13. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода. [*Л. 8–10.*]

14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода. [*Л. 8–10.*]

15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода. [*Л. 8–10.*]

16. Фигура ограничена кривой $y = f(x) \geqslant 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ $(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры. [*Л. 11.*]

17. Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ — полярные координаты точки, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$, где r и φ — полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры. [*Л. 11.*]

18. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geqslant 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ $(a < b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения. [*Л. 12–13.*]

---

*В квадратных скобках после текста вопроса указаны номера лекций согласно календарному плану учебного курса (см. также: Интегралы и дифференциальные уравнения (1-й курс, 2-й семестр): конспект лекций / П.Л. Иванков. Электронный ресурс http://fn.bmstu.ru/educational-work-fs-12/lecture-notes-fs-12).

19. Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где x и y — декартовые координаты точки, $a \leqslant x \leqslant b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой. [*Л. 12–13.*]

20. Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geqslant 0$, где r и φ — полярные координаты точки, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой. [*Л. 12–13.*]

21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод “$u \cdot v$”) и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной). [*Л. 15.*]

22. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка. [*Л. 17.*]

23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. [*Л. 18–19.*]

24. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций. [*Л. 18–19.*]

25. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. [*Л. 18–19.*]

26. Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. [*Л. 18–19.*]

27. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. [*Л. 18–19.*]

28. Вывести формулу Остроградского — Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. [*Л. 18–19.*]

29. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении. [*Л. 18–19.*]

30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка. [*Л. 20–21.*]

31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения. [*Л. 20–21.*]

32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения. [*Л. 20–21.*]

33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений. [*Л. 20–21.*]

34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных. [*Л. 20–21.*]

При ответе на теоретические вопросы билета формулировки теорем должны сопровождаться определениями используемых в них понятий. Знание остальных теорем, определений и понятий из программы курса может потребоваться при ответе на дополнительные вопросы экзаменатора.

Задачи для подготовки к экзамену
по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения»
для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ

В экзаменационный билет входят два теоретических вопроса (по двум модулям дисциплины) и две задачи (указаны номера комплектов задач). Каждая из задач относится к одной из следующих тем:

- неопределенные интегралы;
- приложения определенного интеграла;
- несобственные интегралы;
- дифференциальные уравнения (ОДУ), допускающие понижение порядка;
- линейные ОДУ с правой частью специального вида;
- линейные ОДУ с правой частью общего вида.

При подготовке к экзамену рекомендуется прорешать следующие задачи.

Модуль 1

1. Неопределенные интегралы.

1.1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{5+\ln x}}{x}\,dx.$ **1.2.** $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^6-1}.$ **1.3.** $\displaystyle\int x^2\cos 2x\,dx.$ **1.4.** $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x\,dx.$

1.5. $\displaystyle\int \ln x\,dx.$ **1.6.** $\displaystyle\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+4x-x^2}}\,dx.$ **1.7.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$ **1.8.** $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx.$

1.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin^2 x+3\cos^2 x}.$ **1.10.** $\displaystyle\int (\sqrt{\cos x}+\sin x)^2\,dx.$ **1.11.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$

1.12. $\displaystyle\int \frac{dx}{5-2\sin x+5\cos x}.$ **1.13.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$ **1.14.** $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx.$

2. Приложения определенного интеграла.

2.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{x+4}$, $y=-\sqrt{x}+2$ и осью Ox. Сделать чертёж.

2.2. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. Сделать чертёж.

2.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho=2(1+\cos\varphi)$ и лучами $\varphi=0$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$. Сделать чертёж.

2.4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=e^{-2x}-1$, $y=e^{-x}+1$ и $x=0$. Сделать чертёж.

2.5. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{x^2}{2}+2x+2$ и $y=2$. Сделать чертёж.

2.6. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $x=at^2$, $y=a\ln t$ $(a>0)$ и осями координат, вокруг оси Ox. Сделать чертёж.

2.7. Найти объём тела, образованного вращением кривой $r=a\sin^2\phi$ вокруг полярной оси. Сделать чертёж.

2.8. Найти длину дуги кривой $y=x^2$ от точки $(-1,\,1)$ до точки $(1,\,1)$. Сделать чертёж.

2.9. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $x=2\cos t$, $y=4\sin t$. Сделать чертёж.

3. Исследование несобственных интегралов на сходимость.

3.1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}}{x+3}\,dx.$ **3.2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}}\,dx.$ **3.3.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sin x^3}\,dx.$

Модуль 2

4. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

4.1. $xy'' + y' + x = 0.$

4.2. $1 + yy'' + (y')^2 = 0$ при начальных условиях $y\big|_{x=1} = 1$, $y'\big|_{x=1} = 1.$

5. Вид общего решения линейного ОДУ.

5.1. $y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x\sin x - e^x \sin x.$

5.2. $y^V - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x}\cos 3x.$

6. Линейные ОДУ с правой частью общего вида.

6.1. $y'' + y = \operatorname{tg} x \sec x.$

6.2. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x}.$

6.3. Решить уравнение $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, если известно его частное решение соответствующего однородного уравнения: $y_1 = x$.

Образец билета

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ **0**.

Интегралы и дифференциальные уравнения

2-й сем., ИУ-РЛ-БМТ (2019-20)

1. (*6 баллов*) Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона — Лейбница.

2. (*6 баллов*) Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

3. (*6 баллов*) Задача из комплекта №1.

4. (*6 баллов*) Задача из комплекта №5.

5. (*6 баллов*) Дополнительные вопросы экзаменатора.

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 26.04.2021.