

Подготовка к рубежному контролю №3 «Математическая статистика»  
по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»  
для специальности РТ2, 4-й семестр, 2021 г.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте две теоремы о неравенствах Чебышёва.
2. Дайте разные определения сходимости последовательности случайных величин: сходимость с вероятностью 1, по вероятности и по распределению.
3. Объясните, что понимают под законом больших чисел в форме Колмогорова, в форме Чебышёва и в форме Бернулли.
4. Дайте определение характеристической функции случайной величины и перечислите свойства характеристических функций.
5. Сформулируйте центральную предельную теорему и следствие из неё для испытаний Бернулли.
6. Дайте определения случайной выборки, вариационного ряда и статистического распределения и напишите формулы распределения крайних членов вариационного ряда.
7. Дайте определения теоретической, выборочной и эмпирической функций распределения.
8. Напишите формулы для вычисления выборочного среднего, выборочной дисперсии, начальных и центральных выборочных моментов, выборочного корреляционного момента и выборочного коэффициента корреляции.
9. Дайте определения точечной оценки параметра распределения, несмещённой оценки, состоятельной оценки и эффективной оценки.
10. Опишите метод моментов поиска точечных оценок параметров распределения.
11. Опишите метод максимального правдоподобия поиска точечных оценок и напишите уравнения правдоподобия.
12. Дайте определения интервальной оценки параметра распределения и центральной статистики и опишите метод построения интервальных оценок с помощью центральных статистик.
13. Напишите интервальные оценки математического ожидания с известной и неизвестной дисперсией.
14. Напишите интервальные оценки дисперсии с известным и неизвестным математическим ожиданием.
15. Напишите интервальные оценки параметра  $\lambda$  экспоненциального распределения и параметра  $p$  биномиального распределения.
16. Дайте определения статистической гипотезы, простой и сложной параметрической гипотезы, односторонней и двусторонней параметрической гипотезы.

17. Дайте определения статистического критерия для проверки статистических гипотез, ошибки I и II рода, уровня значимости и мощности критерия.
18. Сформулируйте критерий Неймана-Пирсона для проверки двух простых гипотез и объясните, в каком смысле этот критерий наилучший.
19. Дайте определение критерия согласия для проверки гипотез и сформулируйте критерий согласия Колмогорова.
20. Сформулируйте критерий согласия хи-квадрат (Пирсона).

### Задачи для подготовки

#### 1. Неравенства Чебышёва и предельные теоремы

- 1.1. Вероятность появления некоторого события в каждом из 800 независимых испытаний равна  $1/4$ . Оцените вероятность того, что число  $X$  появлений этого события заключено в пределах от 150 до 250, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
- 1.2. Вероятность случайного события равна 0,67. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью  $P \geq 0,98$  можно было ожидать, что наблюдаемая частота случайного события отклонится от его вероятности не более, чем на 0,01? Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
- 1.3. Для независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  известно, что  $MX = 10$ ,  $DX = 4$ ,  $MY = 20$ ,  $DY = 5$ . Оцените вероятность неравенства  $X + Y > 35$ . Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) предположение, что сумма  $X + Y$  имеет нормальное распределение.
- 1.4. Оцените вероятность того, что при 50 бросаниях игральной кости отклонение среднего арифметического всех выпавших значений от 3,5 не превысит 0,3 по абсолютной величине. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) центральную предельную теорему.

#### 2. Случайные выборки и точечные оценки

- 2.1. Найдите выборочное среднее и исправленное среднеквадратичное отклонение, а также постройте график эмпирической функции распределения для выборки:

$$\begin{aligned}x_1 &= 3, & x_2 &= 5, & x_3 &= 7, & x_4 &= 9; \\n_1 &= 10, & n_2 &= 9, & n_3 &= 8, & n_4 &= 7.\end{aligned}$$

- 2.2. Методом моментов по выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  найдите точечную оценку параметра  $\theta$  равномерного распределения на отрезке  $[0; \theta]$ , используя начальный момент 2-го порядка.

- 2.3. Методом максимального правдоподобия по выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  найдите точечную оценку параметра  $\theta$  для плотности:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\theta^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

### 3. Интервальные оценки и проверка гипотез

- 3.1. При измерении некоторой физической величины случайные ошибки распределены нормально с дисперсией  $\sigma^2 = 2$ . Сколько нужно провести экспериментов, чтобы определить истинное значение измеряемой величины с абсолютной погрешностью не более 1 с доверительной вероятностью 0,99?
- 3.2. Из нормальной генеральной совокупности получена выборка объёма  $n = 100$  и по ней найдено выборочное среднее  $\bar{x} = 15,45$  и исправленное среднеквадратичное отклонение  $S = 4,04$ . При уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверьте гипотезу  $H_0 : MX = 15$  против  $H_1 : MX > 15$ .
- 3.3. Для сравнения точности двух приборов проверяют равенство дисперсий в их показаниях. По результатам 15 замеров получены следующие выборочные оценки:  $\bar{x} = 10,5$ ,  $S_x^2 = 0,5$ ,  $\bar{y} = 12,2$ ,  $S_y^2 = 0,6$ . Используя двусторонний критерий, при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверьте гипотезу об одинаковой точности этих двух приборов.
- 3.4. В результате 10 экспериментов над случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение, получена следующая выборка:

3,1; 1,6; 2,0; 4,5; 2,4; 1,7; 2,2; 0,3; 1,1; 1,4.

- а) Оцените истинное значение параметра  $\lambda$  экспоненциального распределения с помощью доверительного интервала с надёжностью 0,8.
- б) Проверьте гипотезу  $H_0 : \lambda \leq 1$  против  $H_1 : \lambda > 1$  при уровне значимости  $\alpha = 0,1$ .