

Домашнее задание «Случайные величины и математическая статистика»  
по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»  
для специальности РТ4, 4-й семестр, 2021 г.

№	1	2	3	4	min
Баллы	1	2	2	1	4

ВАРИАНТ 1

1. Случайная величина  $X$  подчиняется распределению Релея:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = \ln X$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x < y < \sqrt{x}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} axy, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Математическое ожидание числа солнечных дней в году для определённой местности равно 150 дням. Найдите вероятность того, что в данном году здесь будет не менее 200 солнечных дней. Как изменится искомая вероятность, если будет известно, что среднее квадратичное отклонение числа солнечных дней равно 10?
4. Давление в камере контролируется по двум манометрам. Для сравнения точности этих приборов одновременно фиксируются их показания. По результатам 10 замеров выборочные оценки (в единицах шкалы приборов) оказались следующими:  $\bar{X} = 1573$ ,  $\bar{Y} = 1671$ ,  $S_X^2 = 0,72$ ,  $S_Y^2 = 0,15$ . Используя односторонний критерий, проверить при  $\alpha = 0,1$  гипотезу о равенстве дисперсий. Распределение контролируемого признака нормальное.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

## ВАРИАНТ 2

1. Случайная величина распределена по закону Коши:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = \operatorname{arctg} X$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^3 < y < x. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Математическое ожидание годового количества осадков для данной местности равно 600 мм. Какое количество осадков за год можно ожидать с вероятностью не менее 0,8? Как изменится ответ задачи, если будет известно, что среднеквадратичное отклонение годового количества осадков равно 50 мм?
4. Точность станка-автомата, производящего некоторые детали, характеризуется дисперсией длины деталей. Если эта величина будет больше 400 мкм<sup>2</sup>, станок останавливается для наладки. Выборочная дисперсия длины 15 случайно отобранных деталей из продукции станка оказалась равной  $S^2 = 680$  мкм<sup>2</sup>. Нужно ли производить наладку станка, если  $\alpha = 0,01$ ? Распределение контролируемого признака нормальное.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 3

1. Значения острого угла ромба со стороной  $a$  распределены равномерно в интервале  $(0; \frac{\pi}{2})$ . Найдите плотность распределения вероятностей площади ромба.
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^3 < y < \sqrt[3]{x}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Математическое ожидание скорости ветра у земли в данной местности составляет 8 км/ч. Найдите вероятность того, что скорость ветра превысит 20 км/ч и что она будет меньше 50 км/ч. Как изменятся искомые вероятности, если будет известно, что среднее квадратичное отклонение скорости ветра равно 2 км/ч?
4. До наладки станка была проверена точность изготовления 10 втулок и оценено значение дисперсии диаметра втулок  $\hat{\sigma}_1^2 = 5,7 \text{ мк}^2$ , которое характеризует точность станка. После наладки станка контролировались ещё 25 втулок и получено новое значение оценки дисперсии  $\hat{\sigma}_2^2 = 9,6 \text{ мк}^2$ . Есть ли основания считать, что в результате наладки станка точность изготовления деталей на нём не изменилась? Проверку гипотезы осуществлять на уровне значимости  $\alpha = 0,1$  в предположении, что ошибка изготовления распределена по нормальному закону.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 4

1. Случайная величина  $X$  имеет стандартное нормальное распределение. Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = X^3$ .
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < 1. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} axy^3, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Ежедневная потребность предприятия в электроэнергии составляет в среднем 100 кВт·ч. Какой расход электроэнергии можно наблюдать в любой день с вероятностью не менее 0,75? Как изменится ответ задачи, если будет известно, что значение среднеквадратичного отклонения ежедневного расхода электроэнергии составляет 10 кВт·ч?
4. В соответствии с техническими условиями среднее время безотказной работы для приборов из большой партии должно составлять не менее 1000 ч. Выборочное среднее времени безотказной работы для случайно отобранных 25 приборов оказалось равным 970 ч, а  $S^2 = 100$ . Предположим, что среднее квадратичное времени безотказной работы для приборов в выборке совпадает со средним квадратичным во всей партии. Можно ли считать при уровне доверия  $\alpha = 0,01$ , что вся партия приборов не удовлетворяет техническим условиям? Контролируемый признак имеет нормальный закон распределения.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

## ВАРИАНТ 5

1. Случайная величина  $X$  распределена по закону

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = 1 - X^2$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt{x^3} < y < x. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} axy, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Математическое ожидание скорости ветра на высоте 10 км равно 30 км/ч, а среднее квадратичное отклонение 5 км/ч. Какую скорость ветра на этой высоте можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,85? Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) предположение, что скорость ветра имеет нормальное распределение.
4. Из большой партии резисторов одного типа и номинала случайным образом отобраны 36 штук. Выборочное среднее величины сопротивления при этом оказалось равным 9,3 кОм. Используя двусторонний критерий при  $\alpha = 0,05$  проверить гипотезу о том, что выборка взята из партии с номинальным значением 10 кОм, если дисперсия значения сопротивления известна и равна 4 кОм. Распределение контролируемого признака нормальное.

№	1	2	3	4	min
Баллы	1	2	2	1	4

## ВАРИАНТ 6

1. Случайная величина  $X$  распределена по закону

$$p(x) = \begin{cases} 2(x+2)/25, & x \in (-2; 3), \\ 0, & x \notin (-2; 3). \end{cases}$$

Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = X^2$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt{x} < y < 1. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные

плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.

3. Генератор обеспечивает выходное напряжение, которое может отклоняться от номинального на значение, не превышающее 1 В, с вероятностью 0,95. Какие значения дисперсии выходного напряжения можно ожидать? Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) предположение, что выходное напряжение имеет нормальное распределение.
4. Из большой партии резисторов одного типа и номинала случайным образом отобраны 36 штук. Выборочное среднее величины сопротивления при этом оказалось равным 9,3 кОм. Используя двусторонний критерий при  $\alpha = 0,05$  проверить гипотезу о том, что выборка взята из партии с номинальным значением 10 кОм, если дисперсия значения сопротивления неизвестна, а выборочная дисперсия равна 6,25 кОм<sup>2</sup>. Распределение контролируемой величины нормальное.

№	1	2	3	4	min
Баллы	1	2	2	1	4

### ВАРИАНТ 7

- Найдите плотность распределения вероятностей площади круга, если его радиус – случайная величина, имеющая равномерное распределение с математическим ожиданием  $5/2$  и дисперсией  $3/4$ .
- Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < x. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} axy^3, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
- Математическое ожидание суточного расхода воды в лаборатории составляет  $10 \text{ м}^3$ . Оцените вероятность того, что в некоторый день расход воды будет находиться в интервале  $8 \dots 12 \text{ м}^3$ , если среднее квадратичное отклонение суточного расхода составляет  $1 \text{ м}^3$ . Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) предположение, что суточный расход воды имеет нормальное распределение.
- При обработке втулок на станке-автомате для проверки стабильности его работы через определённые промежутки времени проводятся измерения результатов работы. Даны результаты двух выборок.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	2,060	2,063	2,068	2,060	2,067	2,063	2,059	2,062	2,062	2,060
$y_i$	2,063	2,060	2,057	2,056	2,059	2,058	2,062	2,059	2,059	2,057

Проверить, является ли работа станка стабильной, если стабильность оцениваемой по неизменности математического ожидания результатов работы. Распределение контролируемого признака предполагается нормальным. Так как обе выборки извлечены из продукции одного и того же станка, то можно считать, что дисперсии обеих выборок равны:  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . Уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 8

- Случайная величина  $X$  распределена экспоненциально с параметром  $\lambda = 2$ . Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = e^X$ .
- Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < x. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y^4, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
- Найдите вероятность того, что частота появления грани с номером 6 при бросании правильной игральной кости 200 раз отклонится от вероятности её появления по абсолютной величине не более, чем на 0,05. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
- До замены кварца в радиопередатчике произведено 10 замеров несущей частоты, в результате чего была найдена оценка среднего квадратичного отклонения  $\hat{\sigma}_1 = 0,045$  кГц. После замены кварца произведено ещё 8 замеров частоты и вычислена оценка среднего квадратичного отклонения  $\hat{\sigma}_2 = 0,02$  кГц. Есть ли основания полагать, что смена кварца привела к уменьшению разброса несущей частоты? Гипотезу проверить при уровне значимости  $\alpha = 0,1$  в предположении, что несущая частота распределена по нормальному закону.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 9

1. Найдите плотность распределения вероятностей объёма куба, ребро которого – случайная величина  $X$ , распределённая равномерно на отрезке  $[0, a]$ .
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x < y < 1. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Оцените вероятность того, что при 1000 бросаниях правильной игральной кости частота появления грани с чётным номером отклонится от вероятности её появления по абсолютной величине не более, чем на 0,01. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. По выборке из 50 электроламп завода  $A$  установили среднюю продолжительность работы лампы 1288 ч со средним квадратичным отклонением 80 ч, а по аналогичной выборке ламп с завода  $B$  – среднюю продолжительность работы 1208 ч со средним квадратичным отклонением 94 ч. Проверить гипотезу о том, что средний срок службы лампы с обоих заводов одинаков при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ . Принять, что продолжительность работы лампы распределена по нормальному закону и дисперсии продолжительности работы ламп для обоих заводов равны.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 10

1. Случайная величина распределена по закону Коши:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = |X|$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^2 < y < \sqrt{x}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Произведены измерения 200 случайных величин. Известно, что дисперсии случайных величин не превышают 4. Оцените вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих измерений от среднего арифметического математических ожиданий случайных величин не превысит 0,2. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) центральную предельную теорему.
4. Для уменьшения жёсткости воды в неё добавляются специальные вещества. Жёсткость воды измеряется до и после добавления специальных веществ в 40 и 50 пробах соответственно. Получены средние значения жёсткости (в стандартных единицах), равные 4 и 0,8. Дисперсия измерений в обоих случаях равна 0,25. Подтверждают ли эти результаты ожидаемый эффект, если контролируемая величина имеет нормальное распределение? Принять  $\alpha = 0,05$ .

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

## ВАРИАНТ 11

1. Цилиндрический вал имеет погрешность изготовления и поэтому измеренное значение его диаметра – случайная величина, равномерно распределённая на отрезке  $[a, b]$ . Найдите плотность распределения вероятностей площади поперечного сечения вала.
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < \sqrt[4]{x}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Чтобы определить среднее сопротивление  $(n-p)$ -перехода транзистора, в каждой коробке партии из 50 коробок проверено по одному транзистору. Оцените вероятность того, что отклонение среднего арифметического значения сопротивления  $(n-p)$ -перехода в выбранной совокупности от среднего значения во всей партии не превысит 10 Ом, если среднее квадратичное отклонение сопротивления не превышает 6 Ом. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) центральную предельную теорему.
4. На двух токарных станках изготавливают детали по одному чертежу. Из продукции первого станка было отобрано  $n_1 = 9$  деталей, а из продукции второго –  $n_2 = 11$  деталей. Выборочные дисперсии контрольного размера, определённые по этим выборкам, равны  $S_1^2 = 5,9$  мкм<sup>2</sup> и  $S_2^2 = 23,3$  мкм<sup>2</sup> соответственно. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и конкурирующей гипотезе, утверждающей, что дисперсии не равны.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

## ВАРИАНТ 12

1. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат случайным образом выбирается точка. Найдите плотность распределения абсциссы этой точки, если положение точки на окружности – равномерно распределённая случайная величина.
  
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < x^2. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
  
3. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое 500 измерений. Предполагая, что среднее квадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превышает 0,5, оцените вероятность того, что отклонение найденного таким образом значения величины от истинного не превысит 0,2. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) центральную предельную теорему.
  
4. При 50 подбрасываниях монеты герб появился 20 раз. Можно ли считать, что процент появления герба не равен 50? Принять  $\alpha = 0,1$ .

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 13

1. На окружность радиуса  $R$  брошены две точки. Считая, что длина хорды, соединяющей эти точки – случайная величина с равномерным распределением, найдите плотность распределения вероятностей длины дуги между брошенными точками.
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt[4]{x} < y < 1. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} axy^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. При каждой передаче сигнала по каналу связи вероятность искажения сигнала равна 0,05. Передано 100 сигналов. Найдите границы, в которых с вероятностью 0,9 заключено число переданных без искажения сигналов. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. Для исследования стабильности температуры в термостате, в который помещается кварцевый генератор, с интервалом в 15 часов проведены две серии замеров температуры  $t$  со следующими результатами.  
Первая серия: 17,85; 17,98; 18,01; 18,2; 17,9; 18,0.  
Вторая серия: 18,01; 17,98; 18,05; 17,9; 18,0.  
Проверить гипотезу о неизменности температуры в термостате, если точность измерения температуры характеризуется средним квадратичным отклонением  $\sigma = 0,1^\circ\text{C}$ , случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения, а уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 14

1. Случайная величина  $X$  распределена по закону

$$p(x) = \begin{cases} 2(x+2)/9, & x \in (-2; 1), \\ 0, & x \notin (-2; 1). \end{cases}$$

Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = X^2$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x < y < \sqrt[3]{x^2}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ay^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные

плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.

3. В конденсаторе с вероятностью 0,01 возможен дефект диэлектрика и, независимо от этого, с вероятностью 0,005 дефект корпуса. Проверена партия в 1000 конденсаторов. В каких границах с вероятностью 0,997 заключено число бракованных конденсаторов? Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. Две партии стальной проволоки изготовлены в разные смены. По результатам испытаний на разрыв 10 образцов первой партии и 6 образцов второй получены выборочные значения средней прочности соответственно 234 Н и 247 Н. Можно ли считать, что средняя прочность проволоки второй партии выше, если среднее квадратичное отклонение прочности для обеих партий равно 10 Н, а закон распределения прочности принимается нормальным? Уровень значимости  $\alpha = 0,1$ .

№	1	2	3	4	min
Баллы	1	2	2	1	4

### ВАРИАНТ 15

- Случайная величина  $X$  распределена равномерно на промежутке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .  
Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = \cos X$ .
- Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < \sqrt[3]{x}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
- В Москве рождается каждый день в среднем 335 детей, т. е. в год около 122 500 детей. Считая вероятность рождения мальчика 0,51, оцените вероятность того, что число мальчиков, которые родятся в Москве в текущем году, превысит число девочек не менее, чем на 3000. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
- Для классификации электроизмерительного прибора произведено 9 замеров эталонного источника напряжения, в результате чего получена оценка среднего квадратичного отклонения измеряемой величины  $\hat{\sigma}_1 = 0,1$  В. Измерение этого же напряжения стандартным прибором 15 раз дало оценку среднего квадратичного отклонения  $\hat{\sigma}_2 = 0,09$  В. Считая, что систематические ошибки измерения отсутствуют, а случайные ошибки подчинены нормальному закону распределения, проверить гипотезу о принадлежности обоих приборов к одному классу точности, который характеризуется величиной среднего квадратичного отклонения (принять уровень значимости  $\alpha = 0,1$ ).

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 16

1. Случайная величина  $X$  распределена экспоненциально с параметром  $\lambda = 2$ . Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = -2X$ .
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt[3]{x} < y < 1. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Пусть  $\xi_1$  – число выпадений герба при 10 подбрасываниях монеты, а  $\xi_2$  – число выпавших очков на грани тетраэдра (грани перенумерованы числами 1, 2, 3, 4) при его однократном подбрасывании. Оцените вероятность осуществления неравенства  $\xi_1 + \xi_2 < 10$ . Решите задачу, используя первое и второе неравенства Чебышёва.
4. На двух токарных станках изготавливают детали по одному чертежу. Из продукции первого станка было отобрано  $n_1 = 9$  деталей, а из продукции второго –  $n_2 = 11$  деталей. Выборочные дисперсии контрольного размера, определённые по этим выборкам, равны  $S_1^2 = 5,9$  мкм<sup>2</sup> и  $S_2^2 = 23,3$  мкм<sup>2</sup> соответственно. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и конкурирующей гипотезе, утверждающей, что дисперсия контрольного размера для второго станка больше, чем для первого.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 17

1. Найдите плотность распределения вероятностей объёма шара, если его радиус – случайная величина, имеющая равномерное распределение с математическим ожиданием 3 и дисперсией 3.
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < x. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} axy, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,9. Оцените вероятность того, что при 100 выстрелах число попаданий будет не менее 85 и не более 95. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. До наладки станка была проверена точность изготовления 10 втулок и оценено значение дисперсии диаметра втулок  $\hat{\sigma}_1^2 = 9,6 \text{ мк}^2$ , которое характеризует точность станка. После наладки станка контролировались ещё 15 втулок и получено новое значение оценки дисперсии  $\hat{\sigma}_2^2 = 5,7 \text{ мк}^2$ . Можно ли считать, что в результате наладки станка точность изготовления деталей увеличилась? Проверку гипотезы осуществлять на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  в предположении, что контролируемый размер имеет нормальный закон распределения.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 18

1. Измеренное значение стороны квадрата – случайная величина  $X$  с плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей площади квадрата.

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < x^3. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Найдите вероятность того, что частота выпадения больше 4 очков при бросании правильной игральной кости 300 раз отклонится от вероятности этого события по абсолютной величине не более, чем на 0,03. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. Произведён запуск 5 однотипных ракет, в результате которого получены такие значения дальности их полёта (в км):

692,9; 695,7; 691,3; 693,6; 649,4.

После доработки одного из блоков двигательной установки этого типа ракет запущены ещё 4 ракеты, при этом получены следующие значения дальности полёта (в км):

691,2; 696,2; 693,7; 695,4.

Проверить гипотезу (с уровнем значимости  $\alpha = 0,1$ ) о том, что доработка двигательной установки не привела к увеличению средней дальности полёта ракет, предполагая, что рассеяние дальности не изменилось после доработки.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 19

- Случайная величина  $X$  распределена равномерно на промежутке  $[-1; 2]$ . Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = X^2$ .
- Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < x^4. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ay^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
- Произведены измерения 100 случайных величин. Известно, что дисперсии случайных величин не превышают 9. Оцените вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих измерений от среднего арифметического математических ожиданий случайных величин не превысит 0,1. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) центральную предельную теорему.
- Расстояние между двумя объектами определяется с помощью гамма-дальномера, точность которого характеризуется средним квадратичным отклонением 10 м. С интервалом 12 минут проведено две серии измерений. В первой серии при 5 измерениях получено среднее значение 832 м, во второй серии при 3 измерениях получено среднее значение 840 м. Предполагается, что ошибка измерения подчиняется нормальному закону. Можно ли объявить при уровне доверия  $\alpha = 0,05$ , что расхождение между средними результатами измерений каждой серии объясняется малым числом измерений, или есть основания полагать, что за время между сеансами дистанция между объектами увеличилась?

№	1	2	3	4	min
Баллы	1	2	2	1	4

## ВАРИАНТ 20

1. Случайная величина  $X$  распределена равномерно на промежутке  $[0; \pi]$ . Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = \sin X$ .
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x < y < \sqrt[4]{x}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} axy^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Вероятность появления бракованной детали в партии из 1000 деталей равна 0,05. Найдите с вероятностью 0,9 нижнюю и верхнюю границы числа дефектных деталей в этой партии. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. В соответствии с техническими условиями среднее время безотказной работы для приборов из большой партии должно составлять не менее 1000 ч со средним квадратичным отклонением 100 ч. Выборочное среднее времени безотказной работы для случайно отобранных 25 приборов оказалось равным 970 ч. Можно ли с уровнем значимости  $\alpha = 0,01$  считать, что вся партия приборов не удовлетворяет техническим условиям? Контролируемый признак имеет нормальный закон распределения.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

## ВАРИАНТ 21

1. Случайная величина  $X$  распределена по закону

$$p(x) = \begin{cases} x^{-2}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = \frac{1}{x}$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^3 < y < 1. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y^4, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Правильная монета подбрасывается 1000 раз. Определите такое число  $\varepsilon$ , чтобы количество попыток, когда монета ляжет гербом вверх, с вероятностью 0,85 заключалось в промежутке  $(500 - \varepsilon; 500 + \varepsilon)$ . Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. Из партии ракет с известной характеристикой рассеяния по дальности действия  $\sigma = 1,6$  км испытывается 10 образцов, хранившихся длительный срок в полевых условиях. Есть ли основания полагать, что в результате хранения у этих ракет рассеяние по дальности действия возросло, если в результате испытаний получена оценка  $\hat{\sigma} = 3,4$  км. Принять уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

## ВАРИАНТ 22

1. Случайная величина  $X$  распределена по закону

$$p(x) = \begin{cases} (2-x)/2, & x \in (0; 2), \\ 0, & x \notin (0; 2). \end{cases}$$

Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = 2 - X$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < \sqrt{x^3}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Из электроламп, изготовленных заводом, 80% выдерживают гарантийный срок службы. Найдите вероятность того, что в партии из 500 электроламп число выдержавших гарантийный срок службы находится в пределах 380 ... 420. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. При 120 бросаниях кости шестёрка выпала 40 раз. Согласуется ли этот результат с утверждением, что кость «правильная» при уровне значимости  $\alpha = 0,01$ ?

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 23

1. Затраты  $C$  на обслуживание приборов обратно пропорциональны сроку их службы  $t$ , т. е.  $C = \frac{1}{t}$ . Найдите плотность распределения случайной величины  $C$ , если закон распределения  $t$  экспоненциальный с параметром  $\lambda = 3$ .
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^3 < y < \sqrt{x}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Вероятность случайного события равна 0,9. Проведено 6400 испытаний. Какова вероятность того, что наблюдаемая частота случайных событий лежит в интервале  $0,9 \pm 0,01$ ? Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. Утверждается, что шарики, изготовленные станком-автоматом, имеют средний диаметр  $d_0 = 10$  мм. Используя односторонний критерий при  $\alpha = 0,05$ , проверить эту гипотезу, если в выборке из  $n = 16$  шариков средний диаметр оказался равным 10,3 мм, а дисперсия известна и равна  $\sigma^2 = 1$  мм<sup>2</sup>. Контролируемый размер имеет нормальное распределение.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

## ВАРИАНТ 24

1. Случайная величина распределена по закону Коши:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = X^2 + 1$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < 1. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Вероятность случайного события равна 0,81. Проведено 5000 испытаний. В каком интервале с вероятностью  $P \geq 0,97$  лежит наблюдаемая частота случайного события? Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. Давление в камере контролируется по двум манометрам. Для сравнения точности этих приборов одновременно фиксируются их показания. По результатам 10 замеров выборочные оценки (в единицах шкалы приборов) оказались следующими:  $\bar{X} = 1573$ ,  $\bar{Y} = 1671$ ,  $S_X^2 = 0,72$ ,  $S_Y^2 = 0,15$ . Используя односторонний критерий, проверить при уровне значимости  $\alpha = 0,1$  гипотезу о равенстве дисперсий.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

## ВАРИАНТ 25

1. Случайная величина  $X$  распределена по закону

$$p(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} x^2, & x \in (-1; 1), \\ 0, & x \notin (-1; 1). \end{cases}$$

Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = |X|$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^2 < y < 1. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Вероятность случайного события равна 0,67. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью  $P \geq 0,98$  можно было ожидать, что наблюдаемая частота случайного события отклонится от его вероятности не более, чем на 0,01? Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. Утверждается, что шарики, изготовленные станком-автоматом, имеют средний диаметр  $d_0 = 10$  мм. Используя односторонний критерий при  $\alpha = 0,05$ , проверить эту гипотезу, если в выборке из  $n = 16$  шариков средний диаметр оказался равным 10,3 мм, а оценка дисперсии, определённая по выборке, равна  $S^2 = 1,21$  мм<sup>2</sup>. Контролируемый размер имеет нормальное распределение.

№	1	2	3	4	min
Баллы	1	2	2	1	4

### ВАРИАНТ 26

- Случайная величина  $X$  распределена экспоненциально с параметром  $\lambda = 1$ . Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = X^2$ .
- Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < \sqrt{x}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
- При каждой передаче сигнала по каналу связи вероятность искажения сигнала равна  $0,1$ . Передано 200 сигналов. Оцените вероятность того, что число переданных без искажения сигналов меньше 165. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
- В соответствии с техническими условиями среднее время безотказной работы для приборов из большой партии должно составлять не менее 1000 ч со средним квадратичным отклонением 100 ч. Выборочное среднее времени безотказной работы для случайно отобранных 20 приборов оказалось равным 970 ч. Можно ли с уровнем значимости  $\alpha = 0,01$  считать, что вся партия приборов не удовлетворяет техническим условиям? Контролируемый признак имеет нормальный закон распределения.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

## ВАРИАНТ 27

1. Случайная величина  $X$  распределена по закону

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x \notin (0; \pi). \end{cases}$$

Найдите плотность распределения случайной величины  $Y = \cos X$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt{x} < y < 1. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ay^3, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Стрельба по цели ведётся поочерёдно из трёх орудий, причём вероятности попадания в цель равны соответственно 0,2; 0,3 и 0,5. Произведено 300 выстрелов. Оцените снизу вероятность того, что при этих данных частота попаданий отличается от средней вероятности попадания по абсолютной величине не более чем на 0,1? Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. Давление в камере контролируется двумя манометрами. Для сравнения точности этих приборов одновременно фиксируются их показания. По результатам 10 замеров выборочные оценки (в единицах шкалы приборов) оказались следующими:  $\bar{X} = 1573$ ,  $\bar{Y} = 1671$ ,  $S_X^2 = 0,72$ ,  $S_Y^2 = 0,15$ . Используя двусторонний критерий, проверить при  $\alpha = 0,1$  гипотезу о равенстве средних. Предполагается, что точность измерения давления двумя манометрами одинакова и контролируемый признак имеет нормальный закон распределения.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 28

1. Случайная величина  $X$  распределена равномерно на отрезке  $[1; 4]$ . Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = \sqrt{X}$ .
2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^2 < y < x. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ax^2y^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Игральный кубик подбрасывается 360 раз. Оцените вероятность того, что 6 очков выпадет не меньше 75 раз. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
4. В соответствии с техническими условиями среднее время безотказной работы для приборов из большой партии должно составлять не менее 1000 ч. Выборочное среднее и оценка среднего квадратичного отклонения для времени безотказной работы, найденные по случайно отобраным 25 приборам, оказались равными  $\bar{x} = 970$  ч,  $S = 115$  ч. Можно ли на уровне значимости  $\alpha = 0,01$  считать, что вся партия приборов не удовлетворяет техническим условиям? Контролируемый признак имеет нормальный закон распределения.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

## ВАРИАНТ 29

1. Случайная величина  $X$  подчиняется распределению Релея:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = \frac{x^2}{2\sigma^2}$ .

2. Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt{x} < y < \sqrt[3]{x}. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} ay^5, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
3. Пусть  $\xi_1$  – число выпадений герба при 10 подбрасываниях монеты, а  $\xi_2$  – число выпавших очков при однократном бросании игральной кости. Оцените вероятность осуществления неравенства  $\xi_1 + \xi_2 < 14$ . Решите задачу, используя первое и второе неравенство Чебышёва.
4. Точность станка-автомата, производящего некоторые детали, характеризуется дисперсией длины деталей. Если эта величина будет больше  $400 \text{ мкм}^2$ , станок останавливается для наладки. Выборочная дисперсия длины 15 случайно отобранных деталей из продукции станка оказалась равной  $S^2 = 680 \text{ мкм}^2$ . При уровне значимости  $\alpha = 0,1$  выясните, нужно ли производить наладку станка. Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

№	1	2	3	4	<b>min</b>
Баллы	1	2	2	1	<b>4</b>

### ВАРИАНТ 30

- Случайная величина  $X$  имеет стандартное нормальное распределение. Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины  $Y = X^4$ .
- Множество  $G$  на плоскости задано неравенствами  $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < x^2. \end{cases}$  Система случайных величин  $(X, Y)$  имеет совместную плотность распределения  $p(x, y) = \begin{cases} axy^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$  Требуется: а) определить коэффициент  $a$ ; б) найти частные плотности распределения величин  $X$  и  $Y$ ; в) найти условные плотности распределения  $p(x|y)$  и  $p(y|x)$ ; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины  $(X, Y)$  в область  $x > 1/2$ ; д) найти ковариацию  $K_{XY}$  и коэффициент корреляции  $r_{XY}$ ; е) выяснить, являются ли величины  $X$  и  $Y$  независимыми.
- Пусть вероятность того, что покупателю обувного магазина необходимы туфли размера 41, равна 0,15. Определите среди 2000 покупателей магазина в % с вероятностью 0,98 верхнюю и нижнюю границы предполагаемого количества покупателей, которым нужны такие туфли. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.
- Точность манометра характеризуется средним квадратичным отклонением 1 Па. В результате пяти измерений давления в пневмосистеме ракеты было определено среднее арифметическое значение давления, равное 150 Па. После шестимесячного хранения ракеты давление в пневмосистеме вновь трижды замерялось, в результате чего было определено среднее арифметическое значение, равное 148 Па. Проверить гипотезу о неизменности давления в пневмосистеме ракеты за время её хранения. Считать, что случайные погрешности подчиняются нормальному закону распределения. Уровень значимости  $\alpha = 0,05$ .