# Теория вероятностей и математическая статистика, РТ4
# Модуль 1 «Операционное исчисление и случайные события»

## Теоретические вопросы

1. Дайте определения события, сложения событий, умножения событий и противоположного события.
2. Перечислите свойства операций над событиями.
3. Дайте определения сочетания и размещения и напишите формулы для вычисления количества всех размещений, размещений с повторениями, сочетаний и сочетаний с повторениями.
4. Дайте определения перестановки и перестановки с повторениями и напишите формулы для вычисления количества всех таких комбинаций.
5. Опишите гипергеометрическую схему и напишите формулу для вычисления количества всех комбинаций в этой схеме.
6. Дайте классическое определение вероятности и перечислите его свойства.
7. Дайте статистическое и геометрическое определения вероятности.
8. Дайте определения алгебры множеств и $\sigma$-алгебры и укажите свойства алгебры.
9. Дайте аксиоматическое определение вероятности.
10. Напишите формулу сложения вероятностей для двух и $n$ событий.
11. Дайте определение несовместных событий и напишите формулу сложения вероятностей для них.
12. Дайте определение несовместных в совокупности событий и объясните, как это понятие связано с попарной несовместностью.
13. Дайте определение условной вероятности и напишите формулу для её вычисления.
14. Напишите формулу умножения вероятностей для двух и $n$ событий.
15. Дайте определение независимых событий и напишите формулы сложения и умножения вероятностей для них.
16. Дайте определение независимых в совокупности событий и объясните, как это понятие связано с попарной независимостью.
17. Дайте определение полной группы событий, гипотез и сформулируйте теорему о полной вероятности.
18. Сформулируйте теорему Байеса и объясните, что такое априорная и апостериорная вероятности.
19. Дайте определение биноминальной схемы испытаний (схемы Бернулли) и сформулируйте теорему Бернулли и два следствия из неё.
20. Напишите приближённые формулы для схемы Бернулли (формулу Пуассона, локальную и интегральную формулы Муавра-Лапласа).

# Задачи для подготовки

## 1. Задача на классическую вероятность

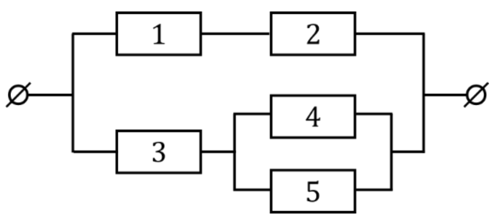
1.1. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них случайным образом может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найдите вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на разных этажах; б) на каком-то одном этаже выйдут два пассажира и на другом один.

1.2. На Поле Чудес в Стране Дураков выросло дерево, на котором вместо листьев – 50 монет, 5 из которых золотые, остальные – серебряные. Слепой кот Базилио не может отличить золотые монеты от серебряных и срывает наудачу 10 монет. Какова вероятность того, что среди сорванных монет не более одной золотой?

1.3. В 6 расположенных по кругу корзин случайным образом помещают 6 шаров, занумерованных числами от 1 до 6, по одному шару в корзину. Найдите вероятность того, что шары с номерами 1 и 2 окажутся в соседних корзинах. Как изменится ответ, если корзины расположить вдоль прямой?

## 2. Задача на формулы сложения и умножения вероятностей

2.1. Дана электрическая схема, соединяющая $n = 5$ элементов. Через отказавший элемент ток не проходит. Пусть $A$ – событие, означающее отказ схемы, $A_i$ – событие, означающее отказ $i$-го элемента, $i = \overline{1,4}$. Выразить через $A_i$ и $\bar{A}_i$ события $A$ и $\bar{A}$ и найти $P(A)$, если $P(A_1) = 0{,}5$, $P(A_2) = 0{,}6$, $P(A_3) = 0{,}7$, $P(A_4) = 0{,}8$, $P(A_5) = 0{,}9$ и события $A_i$ независимы.




2.2. В корзине 1 белый и 3 чёрных шара. Два игрока по очереди вынимают из корзины шар, после чего возвращают его обратно в корзину. Выигрывает тот, кто первым извлекает белый шар. Какова вероятность, что игрок, начинающий игру, выиграет на втором ходу?

2.3. В ящике 5 белых и несколько чёрных шаров. Сколько в ящике чёрных шаров, если вероятность вытащить из ящика два белых шара равна $\frac{5}{14}$?

## 3. Задача на формулу полной вероятности и формулу Байеса

3.1. Щенок желает узнать, кто сказал “МЯУ”. С этой целью Щенок может пойти во двор, в сад или к пруду. Встретить того, кто сказал “МЯУ”, в указанных местах можно с вероятностями $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}1$, $p_3 = 0{,}1$ соответственно. Щенок идёт в наудачу выбранное место и встречает там того, кто сказал “МЯУ”. Какова апостериорная вероятность того, что Щенок пошёл во двор?

3.2. Вероятность выигрыша в первую лотерею равна 0,1, во вторую – 0,2, в третью – 0,3. Наугад была выбрана лотерея и куплено три билета, из которых ровно один оказался выигрышным. Какая лотерея вероятнее всего была выбрана?

3.3. Производится стрельба по цели четырьмя снарядами. Каждый снаряд попадает в цель с вероятностью 0,7 независимо от других. При попадании одного снаряда цель поражается с вероятностью 0,8, а при попадании двух и более снарядов цель поражается с вероятностью 1. Найдите полную вероятность поражения цели.

## 4. Задача на схему Бернулли

4.1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки равна 0,3. Произведено 6 выстрелов. Найти вероятность того, что произошло: а) три попадания в цель; б) пять попаданий; в) не менее пяти попаданий.

4.2. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,05. Сколько билетов нужно купить, чтобы вероятность выигрыша хотя бы одного из купленных билетов была не менее 0,9?

## 5. Решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений методами операционного исчисления

5.1. Методами операционного исчисления найдите решение следующей задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}, \qquad t > 0,$$
$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

5.2. Методами операционного исчисления найдите решение задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \qquad t > 0,$$
$$x(0) = x_0,$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ e^t \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.