Подготовка к рубежному контролю №2
по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»
для специальности РТ4, 4-й семестр, 2021 г.

Теоретические вопросы

1. Дайте определения случайной величины и её функции распределения.
2. Дайте определения дискретной случайной величины, её математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения.
3. Дайте определения начальных и центральных моментов, квантилей, квартилей и медианы дискретной случайной величины.
4. Напишите формулы для вычисления вероятностей биномиального распределения, а также его математического ожидания и дисперсии.
5. Напишите формулы для вычисления вероятностей распределения Пуассона, а также его математического ожидания и дисперсии.
6. Напишите формулы для вычисления вероятностей геометрического распределения (оба варианта такого распределения), а также его математического ожидания и дисперсии.
7. Дайте определения непрерывной случайной величины, её плотности распределения, математического ожидания, дисперсии и квантилей.
8. Дайте определение функции от случайной величины и напишите формулы для математического ожидания случайной величины Y, которая является функцией от случайной величины X (в дискретном и непрерывном случаях).
9. Напишите формулу, связывающую функции распределения непрерывных случайных величин X и $Y = \varphi(X)$, а также частные случаи этой формулы, когда функция φ возрастает и когда убывает.
10. Напишите формулы, связывающие плотности распределения непрерывных случайных величин X и $Y = \varphi(X)$, если функция φ непрерывно дифференцируема и монотонна или кусочно-монотонна.
11. Дайте определения n-мерного случайного вектора и его функции распределения и перечислите свойства функции распределения для $n = 2$.
12. Дайте определения непрерывного n-мерного случайного вектора и его плотности распределения и перечислите свойства плотности распределения для $n = 2$.
13. Дайте определение ковариации и коэффициента корреляции двух случайных величин и перечислите свойства коэффициента корреляции.
14. Напишите формулы для вычисления условной функции распределения и условной плотности распределения для непрерывной двумерной случайной величины.

15. Дайте определения n-мерного нормального распределения и n-мерного стандартного нормального распределения и перечислите свойства нормально распределённого случайного вектора.
16. Дайте разные определения сходимости последовательности случайных величин: сходимость с вероятностью 1, по вероятности и по распределению.
17. Объясните, что понимают под законом больших чисел в форме Колмогорова, в форме Чебышёва и в форме Бернулли.
18. Сформулируйте центральную предельную теорему и следствие из неё для испытаний Бернулли.
19. Дайте определения случайной выборки, её реализации, вариационного ряда выборки и случайной выборки и напишите формулы распределения крайних членов вариационного ряда.
20. Дайте определения теоретической, выборочной и эмпирической функций распределения.
21. Напишите формулы для вычисления выборочного среднего, выборочной дисперсии, начальных и центральных выборочных моментов, выборочного корреляционного момента и выборочного коэффициента корреляции.
22. Дайте определения точечной оценки, несмещённой оценки, состоятельной оценки и эффективной оценки.
23. Опишите метод моментов и метод максимального правдоподобия поиска точечных оценок.
24. Дайте определение информации Фишера в одном наблюдении и в n наблюдениях и сформулируйте теорему Рао-Крамера и следствие из неё.
25. Дайте определения интервальной оценки и центральной статистики и опишите метод построения интервальных оценок с помощью центральных статистик.
26. Напишите интервальные оценки математического ожидания с известной и неизвестной дисперсией.
27. Напишите интервальные оценки дисперсии с известным и неизвестным математическим ожиданием.
28. Напишите интервальные оценки параметра λ экспоненциального распределения и параметра p биномиального распределения.
29. Дайте определения статистической гипотезы, простой и сложной параметрической гипотезы, односторонней и двусторонней параметрической гипотезы.
30. Дайте определения статистического критерия для проверки статистических гипотез, ошибки I и II рода, уровня значимости и мощности критерия.
31. Дайте определение критерия согласия для проверки гипотез и сформулируйте критерий согласия Колмогорова.
32. Сформулируйте критерий согласия хи-квадрат (Пирсона).

Теоретические вопросы с доказательством

1. Сформулируйте и докажите свойства функции распределения случайной величины.
2. Сформулируйте и докажите свойства математического ожидания для дискретных случайных величин.
3. Сформулируйте и докажите свойства дисперсии.
4. Сформулируйте и докажите свойства плотности распределения непрерывной случайной величины.
5. Напишите формулы плотности и функции равномерного распределения на отрезке $[a, b]$, а также вывод формул для его математического ожидания и дисперсии.
6. Напишите формулы плотности и функции экспоненциального распределения, а также вывод формул для его математического ожидания и дисперсии.
7. Напишите вывод формул, связывающих функцию нормального распределения с произвольными параметрами, функцию стандартного нормального распределения и нормированную функцию Лапласа.
8. Напишите формулу плотности нормального распределения, а также вывод формул для его математического ожидания и дисперсии.
9. Сформулируйте и докажите свойства математического ожидания для непрерывных случайных величин.
10. Дайте определение независимых случайных величин, сформулируйте критерии независимости для дискретного и непрерывного случаев и докажите критерий для непрерывного случая.
11. Дайте определение свёртки (композиции) законов распределения случайных величин и напишите вывод формулы свёртки.
12. Сформулируйте и докажите свойства математического ожидания и дисперсии для независимых случайных величин.
13. Сформулируйте и докажите свойства ковариации двух случайных величин.
14. Напишите и докажите первое и второе неравенства Чебышёва.
15. Сформулируйте и докажите теорему Чебышёва (о законе больших чисел).
16. Сформулируйте и докажите теорему о том, что выборочное среднее даёт несмещённую, состоятельную и эффективную оценку математического ожидания.

Задачи для подготовки

1. Законы и функции распределения случайных величин, их числовые характеристики и функции от случайных величин

1.1. Дан ряд распределения случайной величины ξ:

ξ	1	2	3	4	5
P	0,1	0,3	0,2	0,3	?

Найдите: а) недостающую вероятность; б) функцию распределения $F_\xi(x)$ и постройте её график; в) вероятность того, что ξ примет чётное значение; г) математическое ожидание и дисперсию величины $\eta = 2\xi - 6$.

1.2. Вероятность приёма самолётом радиосигнала при каждой передаче равна $0{,}7$. Найдите: а) ряд распределения случайной величины X – числа принятых сигналов при шестикратной передаче; б) функцию распределения случайной величины X; в) математическое ожидание и дисперсию X; г) вероятность того, что число принятых сигналов будет не меньше 3.

1.3. Из партии в 10 деталей, среди которых две бракованные, наудачу выбирают три детали. Найдите: а) закон распределения случайной величины X – числа бракованных деталей среди выбранных; б) функцию распределения случайной величины X; в) математическое ожидание и дисперсию X; г) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше, чем её математическое ожидание.

1.4. Непрерывная случайная величина X имеет следующую плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ a/x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Найдите: а) коэффициент a; б) функцию распределения случайной величины X; в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(2,3)$; г) вероятность того, что при четырёх независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадёт в интервал $(2,3)$.

1.5. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 2 и дисперсией 1. Найдите вероятность того, что в двух независимых испытаниях случайная величина X хотя бы раз попадёт в интервал $(1,5)$.

1.6. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найдите: а) плотность и функцию распределения случайной величины $Y = e^{-X}$; б) математическое ожидание и дисперсию величины Y.

2. Случайные векторы

2.1. Закон распределения случайного вектора (X, Y) задан таблицей. Требуется: а) найти недостающую вероятность; б) найти вероятность попадания случайного вектора в прямоугольник $\{4 \le X \le 6,\ 0 \le Y \le 1\}$;

X	Y		
	0	1	2
5	4/27	2/9	?
10	2/27	1/9	4/27

в) найти вектор математических ожиданий; г) найти условное распределение величины Y при $X = 5$; д) установить, являются ли величины X и Y независимыми.

2.2. Совместная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0; \\ Ce^{-4x-2y}, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдите: а) постоянную C; б) совместную функцию распределения; в) частные плотности распределения случайных величин X и Y; г) вероятность попадания в случайного вектора (X, Y) в область, ограниченную прямыми $y = x$, $x + y = 2$ и $x = 0$; д) проверьте, являются ли X и Y независимыми.

2.3. Случайные величины X и Y имеют коэффициент корреляции $\rho_{XY} = -0{,}5$. Величина X распределена равномерно в интервале $(-2, 10)$, а величина Y распределена по нормальному закону $p(y) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \cdot e^{-y^2/18}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = X - 2Y$.

2.4. Для случайных величин X и Y известно, что $MX = 2$, $DX = 4$, $MY = -1$, $DY = 1$, $\rho_{XY} = 0{,}5$. Найдите математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции случайных величин $U = 3X - 2Y$ и $V = 5Y - X$.

2.5. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена равномерно в квадрате $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию площади Y прямоугольника со сторонами X_1 и X_2.

2.6. Двумерный случайный вектор (X, Y) распределён равномерно в области, ограниченной кривыми $y = 0$ и $x^2 + y = 1$. Найдите: а) совместную плотность распределения величин X и Y; б) условные плотности $p(x|y)$ и $p(y|x)$; в) коэффициент корреляции ρ_{XY}.

2.7. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) имеет вид:

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \le 0 \text{ или } x_2 \le 0; \\ 4x_1x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)}, & x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0. \end{cases}$$

Найдите математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную и корреляционную матрицы случайных величин X_1 и X_2.

3. Неравенства Чебышёва и предельные теоремы

3.1. Вероятность появления некоторого события в каждом из 800 независимых испытаний равна $1/4$. Оцените вероятность того, что число X появлений этого события заключено в пределах от 150 до 250, используя: а) второе неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.

3.2. Вероятность случайного события равна $0{,}67$. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью $P \geq 0{,}98$ можно было ожидать, что наблюдаемая частота случайного события отклонится от его вероятности не более, чем на $0{,}01$? Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.

3.3. Для независимых случайных величин X и Y известно, что $MX = 10$, $DX = 4$, $MY = 20$, $DY = 5$. Оцените вероятность неравенства $X + Y > 35$. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) предположение, что сумма $X + Y$ имеет нормальное распределение.

3.4. Оцените вероятность того, что при 50 бросаниях игральной кости отклонение среднего арифметического всех выпавших значений от $3{,}5$ не превысит $0{,}3$ по абсолютной величине. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) центральную предельную теорему.

4. Интервальные оценки и проверка гипотез

4.1. При измерении некоторой физической величины случайные ошибки распределены нормально с дисперсией $\sigma^2 = 2$. Сколько нужно провести экспериментов, чтобы определить истинное значение измеряемой величины с абсолютной погрешностью не более 1 с доверительной вероятностью $0{,}99$?

4.2. Из нормальной генеральной совокупности получена выборка объёма $n = 100$ и по ней найдено выборочное среднее $\bar{x} = 15{,}45$ и исправленное среднеквадратичное отклонение $S = 4{,}04$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу $H_0 : MX = 15$ против $H_1 : MX > 15$.

4.3. Для сравнения точности двух приборов проверяют равенство дисперсий в их показаниях. По результатам 15 замеров получены следующие выборочные оценки: $\bar{x} = 10{,}5$, $S_X^2 = 0{,}5$, $\bar{y} = 12{,}2$, $S_Y^2 = 0{,}6$. Используя двусторонний критерий, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу об одинаковой точности этих двух приборов.

4.4. В результате 10 экспериментов над случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение, получена следующая выборка:

$$3{,}1;\quad 1{,}6;\quad 2{,}0;\quad 4{,}5;\quad 2{,}4;\quad 1{,}7;\quad 2{,}2;\quad 0{,}3;\quad 1{,}1;\quad 1{,}4.$$

а) Оцените истинное значение параметра λ экспоненциального распределения с помощью доверительного интервала с надёжностью $0{,}8$.

б) Проверьте гипотезу $H_0 : \lambda \leq 1$ против $H_1 : \lambda > 1$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$.