

# Теория вероятностей и математическая статистика

5-й семестр, ИУ10 (2017-18 уч.г.)

Экзамен

## Вопросы для подготовки

### *Теоретические вопросы*

1. Что называют: а) случайным испытанием; б) исходом случайного испытания? (4 балла)
2. Дайте определение: а) элементарного события; б) пространства элементарных событий. (4 балла)
3. Что называют: а) случайным событием; б) характеристическим множеством случайного события? (4 балла)
4. Сформулируйте комбинаторное определение вероятности (определение Лапласа) и укажите основные свойства. (4 балла)
5. Дайте геометрическое определение вероятности. С чем связано проявление парадокса нулевой вероятности и какой общий недостаток в определении вероятности по Лапласу и геометрическом определении Вы можете указать? (4 балла)
6. Дайте аксиоматическое определение вероятности (определение Колмогорова). (4 балла)
7. Дайте определение условной вероятности и сформулируйте теорему умножения вероятностей. (4 балла)
8. Дайте определение независимых случайных событий и запишите формулу произведения вероятностей. (4 балла)
9. Дайте определение полной группы случайных событий. (4 балла)
10. В каких случаях испытания называют: а) независимыми; б) повторными? (4 балла)
11. Что понимают под биномиальной схемой испытаний? (4 балла)
12. Сформулируйте следствия из теоремы Бернулли. (4 балла)
13. Дайте определение скалярной случайной величины. (4 балла)
14. Дайте определение непрерывной скалярной случайной величины. Какими свойствами обладает ее плотность распределения вероятностей? (4 балла)
15. Дайте определение ковариации двух случайных величин и сформулируйте ее основные свойства. (4 балла)
16. Сформулируйте закон больших чисел. Что является его основным содержанием? (4 балла)
17. Сформулируйте центральную предельную теорему (в форме Леви). Как следует понимать термин «асимптотическая нормальность»? (4 балла)
18. Сформулируйте основную задачу математической статистики. (4 балла)
19. Что называют случайной выборкой  $\overline{\xi_n(\omega)}$  и какой вид имеет её функция распределения вероятностей? (4 балла)
20. Что называют выборкой объёма  $n$  для случайной величины  $\xi(\omega)$ ? Что называют выборочным пространством и каким основным свойством оно обладает? (4 балла)
21. Дайте определение статистики (выборочной характеристики). Что понимают под: а) выборочным средним; б) выборочной дисперсией? (4 балла)
22. Что понимают под точечной оценкой неизвестного параметра известного закона распределения наблюдаемой случайной величины? (4 балла)
23. Изложите идею метода максимального правдоподобия построения точечных оценок. (4 балла)
24. Дайте определение интервальной оценки для параметра  $\beta$  известного закона распределения наблюдаемой случайной величины. Как определяется вероятность совершения ошибки при нахождении интервальной оценки. (4 балла)

25. Изложите принципиальную схему построения интервальных оценок. (4 балла)
26. Что называют статистической гипотезой? В каких случаях статистическую гипотезу называют: а) параметрической; б) простой; в) нулевой; г) альтернативной? (4 балла)
27. Что называют критерием проверки статистических гипотез, и как он задается? (4 балла)
28. Какие две принципиально различные ошибки возможны при проверке статистических гипотез, и что называют: а) уровнем значимости критерия; б) мощностью критерия? (4 балла)
29. Сформулируйте замечания к аксиоматическому определению вероятности и докажите, что  $P(\emptyset) = 0$ . (8 баллов)
30. Используя аксиоматическое определение вероятности, докажите соотношения: а)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ; б)  $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ . (8 баллов)
31. Запишите формулу полной вероятности и докажите ее. (8 баллов)
32. Запишите формулу Байеса и докажите ее. (8 баллов)
33. Сформулируйте и докажите теорему Бернулли. (8 баллов)
34. Какими свойствами обладает функция распределения вероятностей  $F_\xi(x)$  скалярной случайной величины  $\xi$ ? Докажите, что: а)  $P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$ ; б)  $F_\xi(x) = F_\xi(x - 0)$ . (8 баллов)
35. Дайте определение дискретной скалярной случайной величины и докажите теорему о виде ее функции распределения вероятностей. (8 баллов)
36. Дайте определение непрерывного случайного вектора. Сформулируйте и докажите основные свойства его плотности распределения вероятностей. (8 баллов)
37. Что называют математическим ожиданием скалярной случайной величины и какими свойствами она обладает? Докажите линейность оператора  $M$  нахождения математического ожидания. (8 баллов)
38. Что называют дисперсией скалярной случайной величины и какими свойствами она обладает? Докажите равенство  $D[\xi + \eta] = D[\xi] + D[\eta]$ , верное в случае независимых случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ . (8 баллов)
39. Что называют коэффициентом корреляции двух скалярных случайных величин? Какими основными свойствами он обладает? Докажите, что  $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$ . (8 баллов)
40. Что понимают под ковариационной матрицей случайного вектора? Докажите, что ковариационная матрица неотрицательно определена. (8 баллов)
41. Докажите первое неравенство Чебышева. (8 баллов)
42. Докажите второе неравенство Чебышева. (8 баллов)
43. Сформулируйте и докажите теорему Чебышева. (8 баллов)
44. Сформулируйте и докажите теорему Бернулли. (8 баллов)
45. Сформулируйте и докажите теорему Муавра — Лапласа. (8 баллов)
46. Дайте определение несмещенной точечной оценки и докажите, что выборочное среднее является несмещенной оценкой для математического ожидания наблюдаемой случайной величины. (8 баллов)
47. Что понимают под эффективностью точечной оценки? Докажите эффективность выборочного среднего в классе линейных несмещенных оценок. (8 баллов)
48. Что понимают под состоятельностью точечной оценки? Докажите, что выборочное среднее является состоятельной оценкой для математического ожидания наблюдаемой случайной величины. (8 баллов)
49. Сформулируйте и докажите теорему Рао. (8 баллов)
50. Сформулируйте следствие из теоремы Рао (условие существования эффективной оценки) и дайте его обоснование. (8 баллов)

## **Типы задач**

1. Задачи на комбинаторную вероятность.
2. Задачи на формулу полной вероятности и формулу Байеса.
3. Задачи на законы распределения случайных величин и случайных векторов.
4. Задачи на подсчет числовых характеристик по свойствам.
5. Задачи на функции случайных величин (законы распределения, характеристики, подсчет вероятности).

### **Типовой вариант билета (14–22 балла)**

1. Дайте геометрическое определение вероятности. С чем связано проявление парадокса нулевой вероятности и какой общий недостаток в определении вероятности по Лапласу и геометрическом определении Вы можете указать? (4 балла)
2. Дайте определение непрерывного случайного вектора. Сформулируйте и докажите основные свойства его плотности распределения вероятностей. (8 баллов)
3. Производитель телевизоров изготавливает продукцию на трех заводах, доля которых в общем объеме продукции 50%, 30% и 20%. Доля брака в продукции первого завода 2%, второго 4% и третьего 5%. Наудачу выбранный телевизор оказался бракованным. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе? (6 баллов)
4. Скалярная случайная величина  $\xi$  распределена равномерно на интервале  $[0, 2]$ , а  $\eta = e^\xi$ . Найдите  $f_\eta(y)$  и  $M[\eta]$ . (6 баллов)