Теория вероятностей и математическая статистика
3-й семестр, РТ5 (2020-21 уч. год)
Вопросы и типовые задачи
для подготовки к экзамену

Теоретические вопросы
по теории вероятностей

1. Понятие пространства элементарных событий. Примеры. Случайные события. Классическое определение вероятности, свойства вероятностей событий.
2. Аксиоматическое определение вероятности. Доказать следствия из определения.
3. Условная вероятность. Теорема умножения. Независимые события. Доказать необходимое и достаточное условие независимости двух случайных событий.
4. Вывести формулу полной вероятности и формулы Байеса.
5. Вывести формулу Бернулли и следствия из неё.
6. Функция распределения СВ и её свойства.
7. Сформулировать определение дискретной случайной величины, обосновать вид её функции распределения. Дать определения биномиального закона распределения и закона распределения Пуассона. Установить связь между ними (теорема Пуассона).
8. Закон распределения Пуассона. Вывести вид распределения, пользуясь биномиальным законом распределения (теорема Пуассона).
9. Функция плотности вероятностей и её свойства.
10. Математическое ожидание и его свойства.
11. Функциональные преобразования СВ. Определения закона распределения функции по известному закону распределения аргумента. Рассмотреть частный случай: $X_2 = \varphi(X_1)$, где φ – монотонная функция.
12. Вывести формулы для композиции (свёртки) законов распределения.
13. Случайные векторы. Функция распределения случ. вектора и её свойства.
14. Плотность распределения непрерывного случайного вектора и её свойства ($n = 2$).
15. Корреляционный момент (ковариация) и его свойства.
16. Числовые характеристики случайного вектора. Коэффициент корреляции и его свойства.
17. Условные законы распределения. Найти выражение для условной плотности распределения $f(y|x)$.
18. Вывести неравенство Чебышёва и сформулировать закон больших чисел в форме Чебышёва.
19. Сформулировать закон больших чисел. Доказать теорему Чебышёва.
20. Доказать теорему Бернулли (как следствие из теоремы Чебышёва).
21. Сформулировать центральную предельную теорему и вывести (как следствие) теорему Муавра-Лапласа.

Теоретические вопросы
по математической статистике

22. Выборочная и эмпирическая функции распределения, их свойства.

23. Выборочная функция распределения, выборочная плотность распределения, их свойства.

24. Оценка параметров распределения. Точечные оценки. Требования, предъявляемые к точечным оценкам. Показать, что $\bar{X}$ является несмещённой, состоятельной и эффективной в классе линейных оценок.

25. Оценка параметров распределения. Точечные оценки. Требования, предъявляемые к точечным оценкам. Показать, что $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ является смещённой оценкой дисперсии.

26. Метод максимального правдоподобия. Найти этим методом оценку параметров нормального распределения.

27. Метод максимального правдоподобия. Найти этим методом оценку параметра экспоненциального распределения.

28. Метод максимального правдоподобия. Найти параметр биномиального распределения методом максимального правдоподобия.

29. Определение доверительного интервала (ДИ). Его вероятностный смысл. Построение ДИ для мат. ожидания нормально распределённой случайной величины при известном с.к.о.

30. Вывести выражение для ДИ (дов. интервала) среднего значения $M(X) = m$ нормально распределённой случайной величины при неизвестном с.к.о.

31. Вывести выражение для ДИ дисперсии σ^2 и с.к.о. σ нормально распределённой случайной величины.

32. Проверка статистических гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Понятие критерия проверки гипотез. Критическая область, уровень значимости.

33. Проверка статистических гипотез. Правило Неймана-Пирсона построения наилучшей критической области. Привести пример.

34. Построение оптимального критерия для математического ожидания нормально распределённой генеральной совокупности при известной дисперсии для случая двух простых гипотез.

35. Критерий проверки гипотезы о равенстве 2-х средних нормальных генеральных совокупностей (НГС) при известных с.к.о.

36. Проверка гипотезы о величине дисперсии НГС (нормальной генеральной совокупности) и о равенстве двух дисперсий НГС.

37. Понятие критерия согласия. Критерий согласия Пирсона и его применение.

38. Задача сглаживания экспериментальной зависимости. Метод наименьших квадратов оценки параметров линейной модели.

Типовые задачи

1. Случайные события и операции над событиями

1. Играя в спортлото, владелец одной карточки зачеркивает 6 номеров из 49 (6 номеров из 49 являются выигрышными). Найдите вероятность того, что он угадает:

   а) 3 номера; б) 4 номера; в) 6 номеров; г) не менее 3 номеров.

2. Среди 25 экзаменационных билетов имеется 5 «счастливых». Два студента по очереди берут билет. Кто из них, первый или второй, вытащит «счастливый» билет с большей вероятностью?

3. Какова вероятность того, что из трёх наудачу взятых отрезков можно составить треугольник, если длина каждого из них не превышает L и все его значения равновозможные?

4. Из полной колоды карт (52 карты) наудачу извлекается одна карта. Рассматриваются события: A – появление туза; B – появление карты красной масти; C – появление бубнового туза; D – появление десятки. Зависимы или независимы следующие пары событий:

   а) A и B; б) A и C; в) B и C; г) B и D; д) C и D?

5. Студент пришел на зачёт, зная из 30 вопросов только 24. Зачёт считается сданным, если студент отвечает на один вопрос, или после отказа отвечать на первый предложенный вопрос он отвечает на второй. Какова вероятность студенту сдать зачёт?

6. Из полной колоды карт (52 карты) наудачу одновременно вынимают 4 карты. Рассматриваются события:

   A – среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновая;

   B – среди вынутых карт будет хотя бы одна червовая.

   Найдите вероятность события $A \cup B$.

7. Имеется две урны: в первой 3 белых шара и 5 чёрных; во второй – 4 белых и 4 чёрных. Из первой урны во вторую наудачу перекладывают 2 шара. После этого из второй урны наудачу извлекают 1 шар. Найдите вероятность того, что этот шар будет белым.

8. Изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найдите вероятность того, что среди 5 взятых наугад изделий:

   а) будут два бракованных;

   б) нет ни одного бракованного.

9. Экзамен состоит из 6-ти вопросов. На каждый вопрос дано 3 ответа, среди которых один правильный. Какова вероятность того, что методом простого угадывания удаётся ответить по крайней мере на пять вопросов?

10. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найдите вероятность попадания в цель не менее двух пуль, если производится 5000 выстрелов.

2. Случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики, функции случайных величин, закон больших чисел и предельные теоремы теории вероятностей

11. Случайная величина X имеет функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

   Постройте график плотности распределения вероятностей и найдите $P(0{,}5 \le X < 1)$.

12. Двумерная случайная величина $(X; Y)$ имеет плотность распределения $p(x, y) = \frac{C}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}$. Найдите: а) величину C; б) функцию распределения $F(x, y)$; в) вероятность попадания случайной величины в квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ и $y = 1$.

13. Найдите плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины, функция распределения которой имеет вид:

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})(1 - e^{-bx}), & x \geq 0 \text{ и } y > 0, \\ 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0. \end{cases} \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

14. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Постройте ряды распределения случайных величин: а) $Y = X^2 + 1$; б) $Y = |X|$.

15. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет следующий закон распределения:

Y	X			
	-3	-1	2	3
-1	0,010	0,025	0,035	0,030
0	0,040	0,100	0,140	0,120
1	0,050	0,125	0,175	0,150

Найдите:

а) условную вероятность $P(X = -1 \mid Y = 0)$;

б) условный закон распределения случайной величины Y при условии $X = -1$.

16. Двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена в треугольнике с вершинами $O(0; 0)$, $A(3; 0)$ и $B(0; 2)$. Найдите: а) плотности распределения случайных величин X и Y; б) условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$. Зависимы ли случайные величины X и Y?

17. Число d частиц, достигающих счётчика в некотором опыте, является случайной величиной X, распределённой по следующему закону:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,021	0,081	0,156	0,201	0,195	0,097	0,097	0,054	0,026	0,011	0,007

Найдите:

а) математическое ожидание и дисперсию числа частиц, достигающих счётчика;

б) вероятность того, что число частиц, достигающих счётчика, не меньше четырёх.

18. Найдите MX и DX для случайной величины X с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

19. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X соответственно равны 2 и 10. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 2X + 5$.

20. Случайная точка на плоскости распределена по следующему закону:

Y	X	
	0	1
-1	0,10	0,15
0	0,15	0,25
1	0,20	0,15

Найдите математическое ожидание, матрицу ковариации и коэффициент корреляции двумерной случайной величины (X, Y).

21. Найдите математическое ожидание и ковариационную матрицу двумерной случайной величины (X, Y) с плотностью распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x, y > 0, \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

22. Двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена в квадрате, ограниченном прямыми: $x + y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$. Покажите, что случайные величины X и Y зависимы, но не коррелированны.

23. Двумерная случайная величина (X, Y) равномерно распределена внутри круга радиуса 1 с центром в начале координат. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = XY$.

24. Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X распределена по нормальному закону: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$. Случайная величина Y распределена равномерно в интервале $(0; 2)$. Найдите: $M(X+Y)$, $D(X+Y)$, $M(X-Y)$, $D(X-Y)$, $M(XY)$.

25. Случайный вектор (X, Y) имеет нормальный закон распределения с вектором средних $(-3; 4)$ и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите:

    а) $M(Y \mid X = 1)$; б) $P(|Y| \leq 7 \mid X = 1)$; в) $P(|X| \leq 3)$.

26. Оцените вероятность того, что отклонение любой случайной величины от её математического ожидания будет по абсолютной величины не более трёх средних квадратичных отклонений этой величины (правило 3σ).

27. Математическое ожидание количества выпавших осадков в данной местности составляет 55 см. Оцените вероятность того, что в данной местности выпадает осадков $>$ 165 см.

28. Случайная величина X является средним арифметическим 3200 независимых одинаково распределённых случайных величин математических ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 2. Найдите вероятность того, что X примет значение в промежутке $(2{,}925; 3{,}075)$.

29. Производится обследование для вычисления удельного веса заболеваний гриппом среди всех заболеваний. Сколько амбулаторных карт должно войти в обследование, чтобы отклонение относительной частоты от вероятности $p = 0{,}5$ не превышало 0,06 с вероятностью 0,9972?