Теория вероятностей и математическая статистика
3-й семестр, РТ5 (2020-21 уч. год)
Модуль 2, домашнее задание

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 1

1. В здании главного корпуса МГТУ на 2-м этаже вошли в лифт 6 человек. От 3-го до 11-го этажа лифт может остановиться на любом этаже. Какова вероятность того, что все пассажиры вышли на разных этажах, если всевозможные варианты выхода пассажиров равновероятны?
2. На склад поступает продукция трёх заводов, причём от первого завода поступает 20% всей продукции, от второго – 46%, от третьего – 34%. Известно, что нестандартная продукция на каждом заводе составляет в среднем 3%, 2%, 1%. Найдите вероятность того, что наудачу взятое изделие, оказавшееся нестандартным, изготовлено на первом заводе.
3. Случайная величина X подчиняется распределению Релея:
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = \ln X$.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x < y < \sqrt{x}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} axy, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (0; 2)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1{,}5 \\ -1{,}5 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(\xi - \eta > -1)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 2

1. В урне 20 белых и 5 красных шаров. Одновременно из урны извлекаются 2 шара. Какова вероятность того, что хотя бы 1 шар из них белого цвета? Какова вероятность того, что оба они разного цвета?
2. Вероятность пробоя каждого из 4 конденсаторов в приборе равна 0,1. Вероятность выхода прибора из строя при пробое одного конденсатора равна 0,2; двух – 0,4; трёх – 0,6; четырёх – 0,9. Найдите вероятность выхода прибора из строя.
3. Случайная величина распределена по закону Коши:
$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$
Найдите плотность распределения случайной величины $Y = \operatorname{arctg} X$.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^3 < y < x. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x,y) = \begin{cases} ax^2, & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (3; 1)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}45 \\ 0{,}45 & 0{,}71 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(\xi - \eta > 1{,}1)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 3

1. На шести карточках написаны буквы Е, И, С, С, С, Я. Тщательно перемешав карточки, извлекают их одну за другой и кладут в порядке извлечения. Найдите вероятность того, что составится слово «сессия».

2. В группе из 20 человек имеются 5 отличных, 9 хороших и 6 посредственных стрелков. При одном выстреле отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9; хороший – с вероятностью 0,8; посредственный – с вероятностью 0,7. Наугад выбранный стрелок выстрелил дважды, в результате отмечено одно попадание и один промах. Какой вероятнее всего был стрелок: отличный, хороший или посредственный?

3. Значения острого угла ромба со стороной a распределены равномерно в интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите плотность распределения вероятностей площади ромба.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^3 < y < \sqrt[3]{x}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x,y) = \begin{cases} ax^3y, & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (-0{,}15; 0)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(\xi - \eta > 0)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 4

1. При подготовке к зачёту студент выучил 15 вопросов из 25, входящих в программу. Зачёт считается сданным, если студент ответил на 3 наудачу выбранных вопроса. Какова вероятность сдачи зачёта?
2. Производятся испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью 0,1. После первого выхода из строя прибор ремонтируется, после второго он признаётся негодным. Найдите вероятность того, что прибор будет признан негодным после 5 испытаний.
3. Случайная величина X имеет нормальное распределение:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$
Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^3$.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < 1. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} axy^3, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Система случайных величин (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (0{,}5; 0{,}5)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P\left(\xi - \eta > \sqrt{24}\right)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 5

1. В группе 30 студентов, 5 из них живут в общежитии. По списку наудачу выбрано 3 студента. Найдите вероятность того, что ровно один из них живёт в общежитии.
2. Предохранитель в электрической цепи выходит из строя в четырёх случаях: 1) при коротком замыкании в лампе (событие A) с вероятностью $P_1 = 0{,}6$; 2) при коротком замыкании в обмотке трансформатора (событие B) с вероятностью $P_2 = 0{,}7$; 3) при пробое конденсатора (событие C) с вероятностью $P_3 = 0{,}9$; 4) при выходе напряжения сети за допустимые нормы (событие D) с вероятностью $P_4 = 0{,}4$. Все события попарно несовместны и их вероятности равны: $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}1$; $P(C) = 0{,}4$; $P(D) = 0{,}3$. Определить наиболее вероятную причину отказа предохранителя после того, как произошло это событие.
3. Случайная величина X распределена по закону
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4a}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right), & |x| \le a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$
Найдите плотность распределения случайной величины $Y = b^2 - X^2$, где $b > a$.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt{x^3} < y < x. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x,y) = \begin{cases} axy, & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (0; 5)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(\xi - \eta > -1)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 6

1. В барабане продавца билетов книжной лотереи 200 билетов, из них с выигрышами 20. Покупатель берёт наудачу 3 билета. Какова вероятность того, что один билет окажется выигрышным?
2. Производится стрельба по цели тремя снарядами. Каждый снаряд попадает в цель с вероятностью 0,7 независимо от других. Цель поражается с вероятностью 0,5 при попадании одного снаряда, с вероятностью 0,7 – двух снарядов и с вероятностью 0,9 – трёх снарядов. Найдите полную вероятность поражения цели.
3. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределённому равномерно в промежутке $[0,1]$, чтобы получить случайную величину Y, распределённую по показательному закону $f(y)=\lambda e^{-\lambda y}$, $y \geq 0$?
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0<x<1; \\ \sqrt{x}<y<1. \end{cases}$ Система случайных величин (X,Y) имеет совместную плотность распределения $p(x,y)=\begin{cases} ax^3y, & (x,y)\in G, \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X,Y) в область $x>1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Двумерная случайная величина (ξ,η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu=(4;3)$ и ковариационной матрицей $\Sigma=\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(0<\xi<2 \mid \eta=2)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 7

1. В урне A белых и B чёрных шаров. Из урны вынимают два шара. Найдите вероятность того, что оба шара будут белыми. Рассмотреть два случая: 1) первый шар возвращается в урну; 2) первый шар не возвращается в урну.

2. Передача информации о состоянии процесса управления осуществляется с помощью двоичного кода $0, 1$. Из-за помех искажается в среднем $2/3$ сигналов 0 и $1/3$ сигналов 1. Отношение сигналов 0 к сигналам 1 во всей информации составляет $5:3$. Определить вероятность того, что принятые сигналы действительно являются таковыми.

3. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 50 и дисперсией $0{,}25$. Найдите закон распределения случайной величины $Y = X^2$ и её математическое ожидание.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < x. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x,y) = \begin{cases} axy^3, & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Система случайных величин (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (1{,}5; 1{,}5)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(0 < \xi < 2 \mid \eta = 2)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 8

1. В турпоходе участвуют A студентов одной группы и B другой. Какова вероятность того, что двое случайно оказавшихся рядом студентов окажутся из разных групп? Предполагается, что студенты идут в один ряд.
2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. С какой вероятностью цель будет поражена при 5 выстрелах, если для поражения необходимо не менее 2 попаданий?
3. Найдите плотность распределения вероятностей объёма шара, если его радиус – случайная величина, имеющая равномерное распределение с математическим ожиданием 3 и дисперсией 3.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < x. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y^4, \ (x, y) \in G, \\ 0, \ (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (1; 1{,}5)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 5/3 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(1 < \xi < 2 \mid \eta = 0{,}5)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 9

1. На 10 карточках записаны буквы, составляющие слово «астрономия». Какова вероятность того, что, выбрав наудачу пять из них, мы получим слово «мотор»? Рассмотреть два случая: а) карточки расположены в порядке извлечения; б) вынутые карточки можно переставлять.

2. Для продукции, выпускаемой заводом, установлено, что в среднем на 100 изделий 4 не соответствуют техническим условиям. Таким образом, вероятность того, что изделие стандартное, равна $0{,}96$. Для проверки изделия на соответствие техническим условиям на заводе проводится упрощённое испытание. Как показал опыт, «хорошие» изделия проходят это испытание с вероятностью $0{,}98$, а «плохие» – с вероятностью $0{,}05$. Какова вероятность того, что изделие, дважды прошедшее испытание, является стандартным?

3. Найдите плотность распределения вероятностей объёма куба, ребро которого – случайная величина X, распределённая равномерно на отрезке $[0, a]$.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x < y < 1. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^2, \ (x, y) \in G, \\ 0, \ (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (0; 0)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 4 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P\left(-1 < \xi < 1 \,\middle|\, \eta = \sqrt{3}\right)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 10

1. Компания из 10 человек садится за круглый стол. С какой вероятностью 3 определённых лица окажутся рядом, если всего мест за столом 10?
2. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов нужно произвести, чтобы поразить цель с вероятностью 0,99?
3. Пусть X и Y – независимые случайные величины, имеющие плотности распределения вероятностей
$$p_X(x) = \frac{1}{2}\,e^{-x/2},\ \ x \geq 0, \qquad p_Y(y) = \frac{1}{3}\,e^{-y/3},\ \ y \geq 0.$$
Найдите плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^2 < y < \sqrt{x}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y,\ (x, y) \in G, \\ 0,\ (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (4; 0)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(0 < \xi < 9 \mid \eta = 2)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 11

1. Слово «тройка» составлено из букв разрезной азбуки. Затем карточки с буквами перемешиваются и из них извлекаются по очереди четыре карточки. Какова вероятность того, что эти четыре карточки в порядке выхода составят слово «крот»?

2. По линии связи посылаются сигналы 0 и 1 с вероятностями $P_0 = 0{,}4$ и $P_1 = 0{,}6$. Если посылается сигнал 1, то из-за наличия помех принимаются соответственно сигналы 1 и 0 с вероятностями $P_{11} = 0{,}9$ и $P_{10} = 0{,}1$ соответственно. Если посылается сигнал 0, принимаются сигналы 1 и 0 с вероятностями $P_{01} = 0{,}3$ и $P_{00} = 0{,}7$ соответственно. Какова условная вероятность того, что посылается сигнал 1, если на выходе принимается сигнал 1?

3. Цилиндрический вал имеет погрешность изготовления и поэтому измеренное значение его диаметра – случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[a, b]$. Найдите плотность распределения вероятностей площади поперечного сечения вала.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < \sqrt[4]{x}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Система случайных величин (ξ, η) распределена по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (2; 1)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 3/4 & -3/4 \\ -3/4 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(\eta > 2\xi)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 12

1. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришёл их получать, вспомнил лишь, что в коде было число 23. Какова вероятность того, что он с первой попытки наберёт нужный четырёхзначный номер?
2. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью 0,01 может иметь дефект. Каков должен быть объём случайной выборки, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно дефектное изделие была не менее 0,95?
3. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат случайным образом выбирается точка. Найдите плотность распределения абсциссы этой точки, если положение точки на окружности – равномерно распределённая случайная величина.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < x^2. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (6; 10)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(\eta > 2\xi)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 13

1. В урне один белый и пять чёрных шаров. Два игрока по очереди вынимают из урны шар и возвращают его обратно, после чего шары в урне перемешиваются. Выигрывает тот, кто первый извлекает белый шар. Какова вероятность того, что выигрывает игрок, начинающий игру?

2. По каналу связи, подверженному воздействию помех, передаётся одна из команд управления в виде кодовых комбинаций 11111 или 00000, причём априорные вероятности передачи этих команд соответственно равны 0,8 и 0,2. Из-за наличия помех вероятность правильного приёма каждого из символов (1 и 0) равна 0,6. Предполагается, что символы кодовых комбинаций искажаются независимо друг от друга. На выходе приёмного устройства зарегистрирована комбинация 10110. Спрашивается, как команда была передана?

3. На окружность радиуса R брошены две точки. Считая, что длина хорды, соединяющей эти точки – случайная величина с равномерным распределением, найдите плотность распределения вероятностей длины дуги между брошенными точками.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt[4]{x} < y < 1. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} axy^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (0{,}6; 0{,}3)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}81 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(\eta > 2\xi)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 14

1. Из урны, содержащей 20 белых и 10 чёрных шаров, извлекаются 3 шара (вынутый шар в урну не возвращается). Определите вероятность того, что среди вынутых шаров будет: а) 2 белых; б) не меньше, чем 2 белых; в) не больше, чем 2 белых шара.
2. При параллельном включении реле надёжность блока из реле повышается. Сколько реле нужно взять, чтобы надёжность блока, т. е. вероятность его безотказной работы, была равной 0,999, если надёжность отдельного реле равна 0,9?
3. Угол сноса самолёта определяется формулой $\lambda = \arcsin\left(\frac{u}{v}\sin\varepsilon\right)$, где ε – угол направления ветра, u – скорость ветра, v – скорость самолёта в воздухе. Угол направления ветра распределён равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. Найдите плотность распределения вероятностей угла сноса при $u = 20$ м/с и $v = 720$ км/ч.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x < y < \sqrt[3]{x^2}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ay^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (2; 1)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(\eta > 2\xi)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 15

1. В урне один белый и пять чёрных шаров. Два игрока по очереди вынимают из урны шар, не возвращая его обратно. Выигрывает тот, кто первый извлекает белый шар. Какова вероятность того, что выигрывает игрок, начинающий игру?
2. В трёх ящиках находятся соответственно: 2 белых и 3 чёрных шара; 4 белых и 3 чёрных шара; 6 белых и 2 чёрных шара. Предполагается, что вероятности извлечения шаров из каждого ящика соответственно равны: $P_1 = 0{,}1$; $P_2 = 0{,}7$; $P_3 = 0{,}2$. Извлечён белый шар. Спрашивается, из какого ящика (по критерию вероятности) извлечён шар?
3. У центробежного регулятора стороны равны и составляют так называемый «параллелограмм» регулятора, острый угол φ которого – случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[\pi/6\,, \pi/4]$. Найдите плотность распределения диагоналей параллелограмма регулятора, если его сторона равна a.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < \sqrt[3]{x}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^3, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (2; 7)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(\eta > 2\xi)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 16

1. На 8 карточках записаны буквы слова «интеграл». Какова вероятность того, что, выбрав наудачу четыре из них, мы получим слово «тигр»? Рассмотреть два случая: а) карточки располагаются в порядке их извлечения; б) вынутые карточки можно переставлять.

2. Вероятность попадания стрелком в десятку равна 0,7, а в девятку – 0,3. Определите вероятность того, что данный стрелок, трижды выстрелив, наберёт 29 очков.

3. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найдите функцию распределения случайной величины $Y = kX$, где $k > 0$.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt[3]{x} < y < 1. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x,y) = \begin{cases} ax^3, & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (0; 2)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(|\eta| < 3 \mid \xi = 0)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 17

1. В группе из 30 студентов 25 спортсменов-разрядников. Наугад выбирают 5 студентов для сдачи норм ГТО. Какова вероятность того, что среди них не окажется ни одного спортсмена-разрядника?

2. Имеются две одинаковые урны: в первой 2 белых шара и 3 чёрных, во второй 3 белых и 1 чёрный. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую два шара, а затем из второй урны наугад вынимают один шар. Этот шар оказался белым. Какой состав переложенных шаров является наиболее вероятным?

3. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределённую равномерно на отрезке $[0; \pi]$, чтобы получить случайную величину Y, распределённую по закону Коши: $p(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$?

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < x. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} axy, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (5; 2)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(|\eta| < 5,5 \mid \xi = 1)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 18

1. Для сдачи экзамена нужно правильно ответить не менее, чем на 2 вопроса билета (в билете 3 вопроса). Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если из 30 вопросов он не выучил 13?

2. Студент для сдачи экзамена на машине-экзаменаторе должен на каждый из вопросов выбрать ответ «Да» или «Нет». На первом экзаменаторе для сдачи экзамена нужно правильно ответить на 3 из 4 вопросов, на втором экзаменаторе – на 5 из 8 вопросов. Какой экзаменатор предпочтительнее для студента, который не знает материал?

3. Измеренное значение стороны квадрата – случайная величина X, распределённая по закону

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin x, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей площади квадрата.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < x^3. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Система случайных величин (ξ, η) распределена по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (10; 0)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 40 & -8\sqrt{10} \\ -8\sqrt{10} & 48 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P\left(|\eta| < \frac{8\sqrt{2}}{3} \,\middle|\, \xi = 10\right)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 19

1. Из 33 карточек с буквами русского алфавита наудачу выбираются 4 карточки. Какова вероятность того, что эти карточки в порядке извлечения составят слово «небо»?

2. При исследовании больного имеется подозрение на одно из трёх заболеваний: A_1, A_2, A_3. Для больного вероятность заболевания каждой болезнью в данных условиях составит соответственно $P_1 = 1/2$, $P_2 = 1/6$, $P_3 = 1/3$. Для уточнения диагноза назначен некоторый анализ, дающий положительный результат с вероятностью 0,1 в случае заболевания A_1, с вероятностью 0,2 в случае заболевания A_2 и с вероятностью 0,9 в случае заболевания A_3. Анализ был проведён пять раз и дал четыре раза положительный результат и один раз отрицательный. Требуется определить вероятность каждого заболевания после анализа (пятикратного).

3. Абсолютное значение случайной величины v – скорости молекул массы газа при абсолютной температуре T – подчиняется закону Максвелла-Больцмана $f(v) = \lambda v^2 e^{-\beta v^2}$, $v \geq 0$, где $\beta = \frac{m}{2kT}$, k – константа Больцмана, λ – нормирующий множитель. Найдите плотность распределения вероятностей кинетической энергии $E = \gamma v^2$, где $\gamma = \frac{1}{2} m$. Покажите, что $\lambda = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \beta^{3/2}$.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < x^4. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ay^2, \ (x, y) \in G, \\ 0, \ (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (1; 1{,}5)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 1{,}08 & -0{,}54 \\ -0{,}54 & 1{,}08 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(|\eta| < 0{,}6 \mid \xi = 4)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 20

1. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются 3 карты. Определите вероятность того, что это будет тройка, семёрка и туз.

2. Счётчик регистрирует частицы трёх типов: A, B и C. Вероятность появления этих частиц такова: $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$, $P(C) = 0{,}3$. Частицы каждого из этих типов счётчик улавливает с вероятностью: $P_1 = 0{,}8$, $P_2 = 0{,}2$, $P_3 = 0{,}4$. Счётчик отметил частицу. По критерию наибольшей вероятности определите, какая это была частица.

3. На смежных сторонах прямоугольника со сторонами a и b выбраны наудачу две точки. Найдите математическое ожидание квадрата расстояния между этими точками, а также его дисперсию.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x < y < \sqrt[4]{x}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} axy^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (4; -3)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(5 < \xi < 14 \mid \eta = 1)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 21

1. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условие непригодности всей партии – наличие хотя бы одной бракованной детали из 5 проверенных. Какова вероятность принять данную партию, если она содержит 5% неисправных деталей?

2. При проверке качества зёрен пшеницы было установлено, что все зёрна могут быть разделены на четыре группы. К первой группе относятся 96% зёрен, ко второй – 2%, к третьей – 1%, к четвёртой – 1%. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, в котором будет не менее 50 зёрен, составляет для семян первой группы 0,5; второй 0,2; третьей 0,18; четвёртой 0,02. Определите вероятность того, что: а) из наудачу взятого зерна вырастет колос, в котором будет не менее 50 зёрен; б) при условии, что выросший колос содержит 50 зёрен, зерно было взято из первой группы.

3. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0;20]$, а случайная величина Y имеет плотность распределения $p_Y(y) = 0{,}5e^{-0{,}5y}$, $y \geq 0$. Найдите математические ожидания и корреляционную матрицу случайных величин $U = 2X - 3Y + 5$ и $V = Y - 3X + 1$, если коэффициент корреляции между X и Y равен $\rho_{XY} = -0{,}8$.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^3 < y < 1. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x,y) = \begin{cases} ax^3y^4, & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Система случайных величин (ξ, η) распределена по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (3;3)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(3\eta - \xi > 0)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 22

1. По каналу связи передаются 10 сигналов, вероятность искажения каждого из них одинакова. Из-за помех 4 из переданных сигналов при приёме искажаются. Какова вероятность того, что из 4 любых принятых сигналов хотя бы один – искажённый?
2. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 0,1. Сколько билетов нужно приобрести, чтобы выигрыш был гарантирован с вероятностью 0,9?
3. По сторонам прямого угла XOY скользит линейка AB длиной $l = 1$, занимая случайное положение, причём все значения X одинаково вероятны от 0 до 1. Найдите математическое ожидание и дисперсию расстояния R от начала координат до линейки.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < \sqrt{x^3}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (1; 1)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1/3 \\ -1/3 & 1/9 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(3\eta - \xi > 0)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 23

1. Большое количество партий, в 10 изделий каждая, проверяется следующим образом: партия принимается, если из 3 выбранных по случайному принципу изделий каждое отвечает стандарту. Если же хотя бы одно изделие из контролируемых нестандартное, то партия бракуется. Какова вероятность того, что будет принята партия, в которой два нестандартных изделия?

2. Вероятности попадания для трёх стрелков при каждом выстреле равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6. При единовременном выстреле всех трёх стрелков обнаружено одно попадание. По критерию максимальной апостериорной вероятности определите, какому стрелку принадлежит пробоина.

3. Затраты C на обслуживание приборов обратно пропорциональны сроку их службы t, т. е. $C = \frac{1}{t}$. Найдите закон распределения случайной величины C, если закон распределения t нормальный: $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{4/\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^3 < y < \sqrt{x}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^3, \ (x, y) \in G, \\ 0, \ (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Система случайных величин (ξ, η) распределена по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (0; -0{,}3)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 1/6 & 0{,}09 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(3\eta - \xi > 0)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 24

1. Для уменьшения общего количества игр 20 команд спортсменов по жребию разбивают на две группы. Определите вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в разных подгруппах.

2. Экзаменационные билеты содержат 50 различных вопросов. В каждом билете 2 вопроса. Чтобы сдать экзамен, студент должен ответить на оба вопроса билета. Сколько вопросов студент может позволить себе не знать, чтобы надеяться сдать экзамен с вероятностью 0,98?

3. Имеются две случайные величины X и Y, связанные соотношением: $Y = 4 - 3X$. Величина X распределена равномерно на отрезке $[-1; 3]$. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины Y, корреляционный момент величин X и Y и их коэффициент корреляции.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^4 < y < 1. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (4; 2)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 4/3 \\ 4/3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(3\eta - \xi > 0)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 25

1. Имеются 12 приборов, из них 9 приборов проверенные и 3 непроверенные. Выбирается случайным образом 3 прибора. Определите вероятность того, что все выбранные приборы проверены.

2. По воздушной цели ведут огонь две ракетные установки. Вероятность поражения цели первой установкой равна 0,85, второй 0,9. Вероятность поражения цели обеими установками равна 0,99. Найдите вероятность поражения цели, если известно, что первая установка срабатывает с вероятностью 0,8, а вторая – с вероятностью 0,7.

3. Случайные величины U и V связаны со случайными величинами X и Y соотношениями: $U = X + 3Y - 2,\ V = 2X - Y + 1$. Известно, что $MX = 1,\ DX = 5,\ MY = -2,\ DY = 4,\ \operatorname{cov}(X, Y) = 3$. Найдите математическое ожидание величин U и V и их корреляционную матрицу.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^2 < y < 1. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y^2,\ (x, y) \in G, \\ 0,\ (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (0; 1)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 16 & -2/3 \\ -2/3 & 16/9 \end{pmatrix}$. Найдите вероятность $P(3\eta - \xi > 0)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 26

1. Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на 2 из 3 вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответов на 8 вопросов из 45, которые могут быть предложены. Какова вероятность того, что студент сдаст коллоквиум?
2. По самолёту производится 4 независимых выстрела, в каждом из которых вероятность попадания снаряда равна 0,3. Самолёт поражается с вероятностью 1, если в него попало не менее двух снарядов, и с вероятностью 0,6, если попал только один снаряд. Определите вероятность поражения самолёта.
3. Случайная величина X равномерно распределена на промежутке $[0; 2\pi]$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = -4X,\ Z = X - Y$ и $V = X + 2Y - 3Z - 1$.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < \sqrt{x}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^3y, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (1; 0{,}2)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(|\eta| < 1 \mid \xi = 3)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 27

1. Какова вероятность угадать в спортлото 5 чисел? В розыгрыше из 49 чисел выбираются случайным образом 6 чисел.
2. Противник может применить ракеты трёх типов A, B и C с такой вероятностью: $P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}6$; $P(C) = 0{,}1$. Вероятность сбить ракеты этих типов равны соответственно 0,6, 0,8 и 0,9. Известно, что противник применил ракету одного из трёх типов. Определите вероятность того, что ракета будет сбита. Если ракета сбита, то определите наиболее вероятный её тип.
3. Имеется случайная величина X, распределённая по экспоненциальному закону $p(x) = 2e^{-2x}, x \geq 0$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = -2X$, $Z = X + Y - 1$ и $V = X - 2Y - Z + 1$.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt{x} < y < 1. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ay^3, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (1; 4{,}5)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 5/3 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(1 < \xi < 3 \mid \eta = 0{,}5)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 28

1. В секретном замке на общей оси имеется 4 диска, каждый из которых разделён на 5 секторов с написанными на них цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что их цифры образуют определённое четырёхзначное число. Определите вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть с первого раза.

2. На ракетной установке ПВО имеется боезапас в 10 ракет. Вероятность поражения самолёта противника одной ракетой равна 0,6. Чему равна вероятность уничтожения трёх самолётов противника, если каждый может быть сбит независимо от других и каждая ракета может попасть лишь в один из самолётов?

3. Точка находится на окружности радиуса R с центром в полюсе полярной системы координат. Радиус-вектор точки на окружности проецируется на полярную ось, и на этой проекции, как на стороне, строится квадрат. Определите математическое ожидание и дисперсию площади квадрата, если положение точки на окружности – равномерно распределённая случайная величина.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^2 < y < x. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ax^2y^2, \ (x, y) \in G, \\ 0, \ (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Система случайных величин (ξ, η) распределена по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (15; 15)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(0 < \eta < 2 \mid \xi = 2)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 29

1. На карточках представлены буквы Т, Т, Т, И, И, Н, С, У. Какова вероятность того, что при последовательном извлечении карточек получится слово «институт»?
2. В группе 20 студентов, пришедших на экзамен. Из них 8 подготовлены отлично, 6 хорошо, 4 посредственно и 2 плохо. В экзаменационных билетах имеется 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, может ответить на все вопросы; подготовленный хорошо – на 35 вопросов; посредственно – на 25; плохо – на 10. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найдите вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) хорошо; в) посредственно; г) плохо.
3. На плоскости XOY дана случайная точка (X, Y), причём $MX = 2,\ DX = 16,\ MY = 4,\ DY = 64,\ \operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Определите математическое ожидание и дисперсию расстояния от начала координат до проекции точки на ось OA в рассматриваемой плоскости, которая образует с осью OX угол $\alpha = 30°$.
4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ \sqrt{x} < y < \sqrt[3]{x}. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} ay^5,\ (x, y) \in G, \\ 0,\ (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.
5. Случайный вектор (ξ, η) распределён по нормальному закону с вектором математических ожиданий $\mu = (0; 0)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{4\sqrt{3}}{3} & 4 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P\left(-1 < \eta < 1 \,\middle|\, \xi = \sqrt{3}\right)$.

№	1	2	3	4	5	**min**
Баллы	1	1	2	2	2	**5**

ВАРИАНТ 30

1. Для уменьшения общего количества игр 20 команд спортсменов по жребию разбиваются на две равные подгруппы. Определите вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в одной подгруппе.

2. В продукции завода брак из-за дефекта A составляет 5%, причём среди забракованной по этому дефекту продукции в 6% случаев встречается дефект B, а в продукции, свободной от дефекта A, дефект B встречается в 2% случаев. Какова вероятность обнаружения дефекта B в произвольно выбранном изделии? Какова вероятность наличия дефекта A в изделии, в котором установлено наличие дефекта B?

3. Через точку $B(0; b)$ проводится прямая BA под углом α к оси ординат, пересекающая ось абсцисс в точке $A(a; 0)$. Угол α – случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Найдите плотность распределения вероятностей абсциссы a точки A.

4. Множество G на плоскости задано неравенствами $\begin{cases} 0 < x < 1; \\ 0 < y < x^2. \end{cases}$ Система случайных величин (X, Y) имеет совместную плотность распределения $p(x, y) = \begin{cases} axy^2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$ Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти частные плотности распределения величин X и Y; в) найти условные плотности распределения $p(x|y)$ и $p(y|x)$; г) найти вероятность попадания двумерной случайной величины (X, Y) в область $x > 1/2$; д) найти ковариацию K_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}; е) выяснить, являются ли величины X и Y независимыми.

5. Двумерная случайная величина (ξ, η) распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = (4; 0)$ и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} 48 & -24 \\ -24 & 48 \end{pmatrix}$. Найдите условную вероятность $P(0 < \eta < 9 \mid \xi = 2)$.