

Теория вероятностей и математическая статистика
3-й семестр, РТ5 (2020-21 уч. год)
Модуль 2, рубежный контроль
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы
(2 балла)

1. Дайте определения события, сложения событий, умножения событий и противоположного события.
2. Перечислите свойства операций над событиями.
3. Дайте определения сочетания и размещения и напишите формулы для вычисления количества всех размещений, размещений с повторениями, сочетаний и сочетаний с повторениями.
4. Дайте определения перестановки и перестановки с повторениями и напишите формулы для вычисления количества всех таких комбинаций.
5. Опишите гипергеометрическую схему и напишите формулу для вычисления количества всех комбинаций в этой схеме.
6. Дайте классическое определение вероятности и перечислите его свойства.
7. Дайте статистическое и геометрическое определения вероятности.
8. Дайте определения алгебры множеств и σ -алгебры и укажите свойства алгебры.
9. Дайте аксиоматическое определение вероятности.
10. Напишите формулу сложения вероятностей для двух и n событий.
11. Дайте определение несовместных событий и напишите формулу сложения вероятностей для них.
12. Дайте определение несовместных в совокупности событий и объясните, как это понятие связано с попарной несовместностью.
13. Дайте определение условной вероятности и напишите формулу для её вычисления.
14. Напишите формулу умножения вероятностей для двух и n событий.
15. Дайте определение независимых событий и напишите формулы сложения и умножения вероятностей для них.
16. Дайте определение независимых в совокупности событий и объясните, как это понятие связано с попарной независимостью.
17. Дайте определение полной группы событий, гипотез и сформулируйте теорему о полной вероятности.
18. Сформулируйте теорему Байеса и объясните, что такое априорная и апостериорная вероятности.
19. Дайте определение биномиальной схемы испытаний (схемы Бернулли) и сформулируйте теорему Бернулли и два следствия из неё.
20. Напишите приближённые формулы для схемы Бернулли (формулу Пуассона, локальную и интегральную формулы Муавра-Лапласа).

Теоретические вопросы
(3 балла)

1. Дайте определения случайной величины и её функции распределения и перечислите свойства функции распределения.
2. Дайте определения дискретной случайной величины, её математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения и перечислите свойства математического ожидания и дисперсии.
3. Дайте определения начальных и центральных моментов, асимметрии и эксцесса, квантилей и медианы дискретной случайной величины.
4. Напишите формулы для вычисления вероятностей биномиального распределения, а также его математического ожидания и дисперсии.
5. Напишите формулы для вычисления вероятностей распределения Пуассона, а также его математического ожидания и дисперсии.
6. Напишите формулы для вычисления вероятностей геометрического распределения, а также его математического ожидания и дисперсии.
7. Дайте определения непрерывной случайной величины и её плотности распределения и перечислите свойства плотности распределения.
8. Дайте определения математического ожидания, дисперсии и квантили для непрерывной случайной величины.
9. Напишите формулы плотности и функции равномерного распределения на отрезке $[a, b]$, а также его математического ожидания и дисперсии.
10. Напишите формулы плотности и функции экспоненциального распределения, а также его математического ожидания и дисперсии.
11. Напишите формулы плотности и функции нормального распределения, функции стандартного нормального распределения и нормированной функции Лапласа и укажите связь между этими функциями.
12. Дайте определение функции от случайной величины и сформулируйте теорему о функции распределения непрерывной случайной величины Y , которая является функцией от непрерывной случайной величины X .
13. Сформулируйте теоремы о плотности распределения непрерывной случайной величины Y , которая является функцией φ от непрерывной случайной величины X в случае, если φ монотонна и кусочно-монотонна.
14. Дайте определения n -мерного случайного вектора и его функции распределения и перечислите свойства функции распределения для $n = 2$.
15. Дайте определения непрерывного n -мерного случайного вектора и его плотности распределения и перечислите свойства плотности распределения для $n = 2$.
16. Дайте определение независимых случайных величин и сформулируйте критерии независимости для дискретного и непрерывного случаев. Напишите формулу свёртки и объясните, для чего она применяется.
17. Дайте определение ковариации двух случайных величин и перечислите её свойства.
18. Дайте определение коэффициента корреляции двух случайных величин и перечислите его свойства.

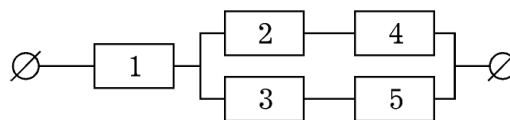
19. Напишите формулы для вычисления условной функции распределения и условной плотности распределения для непрерывной двумерной случайной величины и сформулируйте критерий независимости случайных величин через условное распределение.
20. Дайте определения n -мерного нормального распределения и n -мерного стандартного нормального распределения и перечислите свойства нормально распределённого случайного вектора.

Примеры задач

1. Классическая вероятность, формулы сложения и умножения вероятностей (6 баллов)

- 1.1. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них случайным образом может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найдите вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на разных этажах; б) на каком-то одном этаже выйдут два пассажира и на другом один.
- 1.2. На Поле Чудес в Стране Дураков выросло дерево, на котором вместо листьев – 50 монет, 5 из которых золотые, остальные – серебряные. Слепой кот Базилио не может отличить золотые монеты от серебряных и срывает наудачу 10 монет. Какова вероятность того, что среди сорванных монет не более одной золотой?
- 1.3. В 6 расположенных по кругу корзин случайным образом помещают 6 шаров, пронумерованных числами от 1 до 6, по одному шару в корзину. Найдите вероятность того, что шары с номерами 1 и 2 окажутся в соседних корзинах. Как изменится ответ, если корзины расположить вдоль прямой?
- 1.4. В корзине 1 белый и 3 чёрных шара. Два игрока по очереди вынимают из урны шар, после чего возвращают его обратно в корзину. Выигрывает тот, кто первым извлекает белый шар. Какова вероятность, что игрок, начинающий игру, выиграет на втором ходу?
- 1.5. В ящике 5 белых и несколько чёрных шаров. Сколько в ящике чёрных шаров, если вероятность вытащить из ящика два белых шара равна $\frac{5}{14}$?

- 1.6. Дана электрическая схема, соединяющая $n = 5$ элементов. Через отказавший элемент ток не проходит. Пусть A – событие, означающее отказ схемы, A_i – событие, означающее отказ i -го элемента, $i = \overline{1, 4}$. Выразить через A_i и \bar{A}_i события A и \bar{A} и найти $P(A)$, если $P(A_1) = 0,6$, $P(A_2) = 0,8$, $P(A_3) = 0,9$, $P(A_4) = 0,7$, $P(A_5) = 0,8$ и события A_i независимы.



2. Формула полной вероятности, формула Байеса и схема Бернулли (6 баллов)

- 2.1. Щенок желает узнать, кто сказал “МЯУ”. С этой целью Щенок может пойти во двор, в сад или к пруду. Встретить того, кто сказал “МЯУ”, в указанных местах можно с вероятностями $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,1$, $p_3 = 0,1$ соответственно. Щенок идёт в наудачу выбранное место и встречает там того, кто сказал “МЯУ”. Какова апостериорная вероятность того, что Щенок пошёл во двор?
- 2.2. Вероятность выигрыша в первую лотерею равна 0,1, во вторую – 0,2, в третью – 0,3. Наугад была выбрана лотерея и куплено три билета, из которых ровно один оказался выигрышным. Какая лотерея вероятнее всего была выбрана?
- 2.3. Производится стрельба по цели четырьмя снарядами. Каждый снаряд попадает в цель с вероятностью 0,7 независимо от других. При попадании одного снаряда цель поражается с вероятностью 0,8, а при попадании двух и более снарядов цель поражается с вероятностью 1. Найдите полную вероятность поражения цели.

- 2.4. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 0,05. Сколько билетов нужно купить, чтобы вероятность выигрыша хотя бы одного из купленных билетов была не менее 0,9?

3. Случайные величины (7 баллов)

- 3.1. Непрерывная случайная величина X имеет следующую плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ a/x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Найдите: а) коэффициент a ; б) функцию распределения случайной величины X ; в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(2, 3)$; г) вероятность того, что при четырёх независимых испытаниях случайной величины X ни разу не попадёт в интервал $(2, 3)$.

- 3.2. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 2 и дисперсией 1. Найдите вероятность того, что в двух независимых испытаниях случайная величина X хотя бы раз попадёт в интервал $(1, 5)$.

- 3.3. Случайная величина X распределена равномерно на промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$. Найти: а) плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X^2$; б) математическое ожидание величины Y .

- 3.4. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найдите: а) плотность распределения случайной величины $Y = e^{-X}$; б) математическое ожидание и дисперсию величины Y .

4. Случайные векторы (7 баллов)

- 4.1. Совместная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ Ce^{-4x-2y}, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдите: а) постоянную C ; б) совместную функцию распределения; в) частные плотности распределения случайных величин X и Y ; г) вероятность попадания в случайного вектора (X, Y) в область, ограниченную прямыми $y = x$, $x + y = 2$ и $x = 0$; д) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

- 4.2. Случайные величины X и Y имеют коэффициент корреляции $\rho_{XY} = -0,5$. Величина X распределена равномерно в интервале $(-2, 10)$, а величина Y распределена по нормальному закону $p(y) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \cdot e^{-y^2/18}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = X - 2Y$.

- 4.3. Для случайных величин X и Y известно, что $MX = 2$, $DX = 4$, $MY = -1$, $DY = 1$, $\rho_{XY} = 0,5$. Найдите математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции случайных величин $U = 3X - 2Y$ и $V = 5Y - X$.

- 4.4. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена равномерно в квадрате $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию площади Y прямоугольника со сторонами X_1 и X_2 .

- 4.5. Двумерный случайный вектор (X, Y) распределён равномерно в области, ограниченной кривыми $y = 0$ и $x^2 + y = 1$. Найдите: а) совместную плотность распределения величин X и Y ; б) условные плотности $p(x|y)$ и $p(y|x)$; в) коэффициент корреляции ρ_{XY} .

4.6. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) имеет вид:

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq 0 \text{ или } x_2 \leq 0; \\ 4x_1x_2e^{-(x_1^2+x_2^2)}, & x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0. \end{cases}$$

Найдите математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную и корреляционную матрицы случайных величин X_1 и X_2 .