Теория вероятностей и математическая статистика
3-й семестр, РТ5 (2020-21 уч. год)
Модуль 3, рубежный контроль
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы
(2 балла)

1. Сформулируйте две теоремы о неравенствах Чебышёва.
2. Дайте разные определения сходимости последовательности случайных величин: сходимость с вероятностью 1, по вероятности и по распределению.
3. Объясните, что понимают под законом больших чисел в форме Колмогорова, в форме Чебышёва и в форме Бернулли.
4. Дайте определение характеристической функции случайной величины и перечислите свойства характеристических функций.
5. Сформулируйте центральную предельную теорему и следствие из неё для испытаний Бернулли.
6. Дайте определения случайной выборки, её реализации, вариационного ряда выборки и случайной выборки и напишите формулы распределения крайних членов вариационного ряда.
7. Дайте определения варианты выборки, её частоты и относительной частоты и статистического распределения выборки.
8. Дайте определения теоретической, выборочной и эмпирической функций распределения.
9. Напишите формулы для вычисления выборочного среднего, выборочной дисперсии, начальных и центральных выборочных моментов, выборочного корреляционного момента и выборочного коэффициента корреляции.
10. Дайте определения точечной оценки параметра распределения, несмещённой оценки, состоятельной оценки и эффективной оценки.

Теоретические вопросы
(3 балла)

1. Опишите метод моментов и метод максимального правдоподобия для поиска точечных оценок параметров распределения.
2. Дайте определения интервальной оценки параметра распределения и центральной статистики и опишите метод построения интервальных оценок с помощью центральных статистик.
3. Напишите интервальные оценки математического ожидания с известной и неизвестной дисперсией.
4. Напишите интервальные оценки дисперсии с известным и неизвестным математическим ожиданием.
5. Напишите интервальные оценки параметра λ экспоненциального распределения и параметра p биномиального распределения.
6. Дайте определения статистической гипотезы, простой и сложной параметрической гипотезы, односторонней и двусторонней параметрической гипотезы.
7. Дайте определения статистического критерия для проверки статистических гипотез, ошибки I и II рода, уровня значимости и мощности критерия.
8. Сформулируйте критерий Неймана-Пирсона для проверки двух простых гипотез и объясните, в каком смысле этот критерий наилучший.

9. Дайте определение критерия согласия для проверки гипотез и сформулируйте критерий согласия Колмогорова.
10. Сформулируйте критерий согласия хи-квадрат (Пирсона).

Примеры задач

1. **Случайные выборки и точечные оценки (1 балл)**

1.1. Найдите выборочное среднее и исправленное среднеквадратичное отклонение, а также постройте график эмпирической функции распределения для выборки:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 7, \quad x_4 = 9;$$
$$n_1 = 10, \quad n_2 = 9, \quad n_3 = 8, \quad n_4 = 7.$$

1.2. Методом моментов по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ найдите точечную оценку параметра θ равномерного распределения на отрезке $[0; \theta]$, используя начальный момент 2-го порядка.

1.3. Методом максимального правдоподобия по выборке X_1, X_2, …, X_n найдите точечную оценку параметра θ для плотности:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta\sqrt{2\pi x}}\, e^{-\frac{x}{2\theta^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

2. **Интервальные оценки и проверка гипотез (2 балла)**

2.1. При измерении некоторой физической величины случайные ошибки распределены нормально с дисперсией $\sigma^2 = 2$. Сколько нужно провести экспериментов, чтобы определить истинное значение измеряемой величины с абсолютной погрешностью не более 1 с доверительной вероятностью 0,99?

2.2. Из нормальной генеральной совокупности получена выборка объёма $n = 100$ и по ней найдено выборочное среднее $\bar{x} = 15{,}45$ и исправленное среднеквадратичное отклонение $S = 4{,}04$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу $H_0 : MX = 15$ против $H_1 : MX > 15$.

2.3. Для сравнения точности двух приборов проверяют равенство дисперсий в их показаниях. По результатам 15 замеров получены следующие выборочные оценки: $\bar{x} = 10{,}5$, $S_X^2 = 0{,}5$, $\bar{y} = 12{,}2$, $S_Y^2 = 0{,}6$. Используя двусторонний критерий, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте гипотезу об одинаковой точности этих двух приборов.

2.4. В результате 10 экспериментов над случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение, получена следующая выборка:

$$3{,}1; \quad 1{,}6; \quad 2{,}0; \quad 4{,}5; \quad 2{,}4; \quad 1{,}7; \quad 2{,}2; \quad 0{,}3; \quad 1{,}1; \quad 1{,}4.$$

а) Оцените истинное значение параметра λ экспоненциального распределения с помощью доверительного интервала с надёжностью 0,8.
б) Проверьте гипотезу $H_0 : \lambda \le 1$ против $H_1 : \lambda > 1$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$.

3. **Неравенства Чебышёва и предельные теоремы (3 балла)**

3.1. Вероятность появления некоторого события в каждом из 800 независимых испытаний равна $1/4$. Оцените вероятность того, что число X появлений этого события заключено в пределах от 150 до 250, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.

3.2. Вероятность случайного события равна $0{,}67$. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью $P \geq 0{,}98$ можно было ожидать, что наблюдаемая частота случайного события отклонится от его вероятности не более, чем на $0{,}01$? Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) интегральную теорему Муавра-Лапласа.

3.3. Для независимых случайных величин X и Y известно, что $MX = 10$, $DX = 4$, $MY = 20$, $DY = 5$. Оцените вероятность неравенства $X + Y > 35$. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) предположение, что сумма $X + Y$ имеет нормальное распределение.

3.4. Оцените вероятность того, что при 50 бросаниях игральной кости отклонение среднего арифметического всех выпавших значений от $3{,}5$ не превысит $0{,}3$ по абсолютной величине. Решите задачу двумя способами, используя: а) неравенство Чебышёва; б) центральную предельную теорему.