Теория вероятностей и математическая статистика

Лекция 12

Неравенства Чебышёва и законы больших чисел

Неравенства Чебышёва

Первое нер-во Чебышёва: если $X \geq 0$ и $\exists\, MX$, то $\forall \varepsilon > 0,\ P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{MX}{\varepsilon}$.

Доказательство: для непрерывной СВ X имеем

$$MX = \int_0^{\varepsilon} x\, p(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, p(x)\, dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, p(x)\, dx \geq \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} p(x)\, dx = \varepsilon \cdot P(X \geq \varepsilon) \quad \square$$

Второе нер-во Чебышёва: если $\exists\, MX$ и DX, то

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P(|X - MX| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство: в силу первого неравенства Чебышёва

$$P(|X - MX| \geq \varepsilon) = P((X - MX)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{M((X - MX)^2)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \square$$

Альтернативная форма записи неравенств Чебышёва:

$$P(X \geq n \cdot MX) \leq \frac{1}{n}, \qquad P(|X - MX| \geq n\sigma) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Пример

Среднее время опоздания студента 2 минуты, оценим вероятность опоздания не меньше, чем на 10 минут:

$$P(X \geq 10) \leq 0{,}2,$$

т. е. максимум одно из пяти опозданий происходит на 10 и более минут.

Если дополнительно известно, что $\sigma = 1$ минуте, то

$$P(X \geq 10) = P(X - MX \geq 10 - MX) \leq P(|X - MX| \geq 10 - MX) \leq \frac{\sigma^2}{(10 - MX)^2} = \frac{1}{64},$$

т. е. максимум одно из 64 опозданий происходит минимум на 10 минут.

При дополнительном естественном предположении, что время опоздания распределено нормально, ту же вероятность можно оценить по формуле:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) \approx 1 - \Phi\left(\frac{10\ -\ MX}{\sigma_X}\right) = 0{,}5 - \Phi_0(8) < 0{,}00001,$$

т. е. отклонение на 8σ в норм. распределении чрезвычайно маловероятно.

Стандартное нормальное распределение

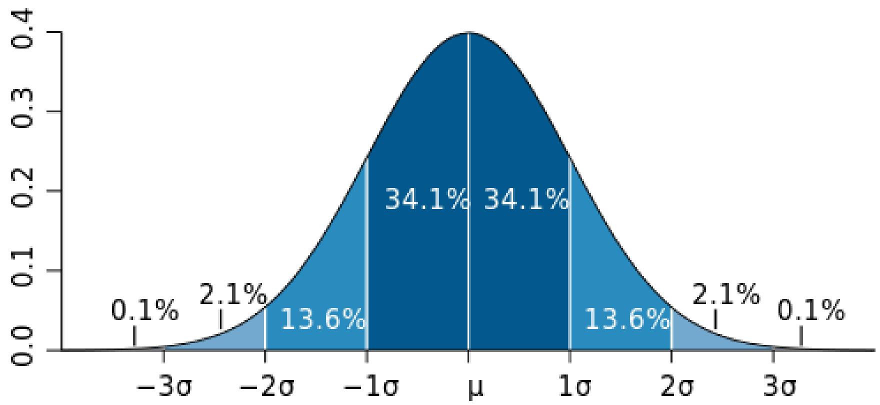
Для нормально распределённой СВ вероятность попасть

в интервал $\pm 1\sigma$ – примерно 68%,

в интервал $\pm 2\sigma$ – примерно 95%,

в интервал $\pm 3\sigma$ – примерно 99,8%

и т. д.



В физике элементарных частиц заявление об открытии делают только, если вероятность того, что это не так, меньше 1/2 000 000, т. е. отклонение составляет больше 5σ.

Примеры

Пример: среднее время опоздания студента 2 минуты, $\sigma = 1$ минуте, оценим вероятность отклонения среднего арифметического времени опоздания n студентов от среднего времени не меньше, чем на 8 минут:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - MX_i\right| \geq 8\right) \leq \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right)}{8^2} = \frac{1}{64n}.$$

Пример: среднее время опоздания студента 2 минуты, оценим время опоздания с вероятностью не менее 0,9:

$$P(X < \varepsilon) \geq 0{,}9, \qquad P(X \geq \varepsilon) \leq 0{,}1 = \frac{MX}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon = 20,$$

т. е. не менее 9 из 10 опозданий происходят менее чем на 20 минут;

если дополнительно известно, что $\sigma = 1$ минуте, то

$$P(|X-2| < \varepsilon) \geq 0{,}9, \qquad P(|X-2| \geq \varepsilon) \leq 0{,}1 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \qquad \varepsilon = \sqrt{10} \approx 3{,}16,$$

т. е. не менее 9 из 10 опозданий укладываются в диапазон [0; 5,16] минут.

Отклонение относительной частоты успехов в испытаниях Бернулли от вероятности успеха в одном испытании

Оценим вероятность отклонения относительной частоты успехов в испытаниях Бернулли от вероятности успеха в одном испытании с помощью неравенства Чебышёва:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=P(|k-np|\le n\varepsilon)\ge 1-\frac{npq}{(n\varepsilon)^2}=1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Оценим ту же вероятность с помощью интегральной формулы Муавра-Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=P(|k-np|\le n\varepsilon)=P(np-n\varepsilon\le k\le np+n\varepsilon)\approx$$

$$\approx\Phi_0\left(\frac{np+n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi_0\left(\frac{np-n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}}\right)=2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Сходимость последовательности случайных величин

Последовательность случайных величин X_n называется ***сходящейся с вероятностью 1 («почти наверное»)*** к случайной величине X, если вероятность поточечной сходимости функций $X_n(\omega)$ к $X(\omega)$ равна 1:

$$X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1.$$

Последовательность случайных величин X_n называется ***сходящейся по вероятности*** к случайной величине X, если вероятность ε-совпадения X_n с X стремится к 1:

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon) = 1.$$

Последовательность случайных величин X_n называется ***сходящейся по распределению*** к случайной величине X, если последовательность функций распределения $F_n(x)$ величин X_n сходится к функции распределения $F(x)$ величины X поточечно во всех точках x, в которых $F(x)$ непрерывна (слабая сходимость):

$$X_n \xrightarrow{F} X \quad \Leftrightarrow \quad F_n(x) \Rightarrow F(x).$$

Связь между разными видами сходимости

Теорема: $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{F} X$.

Контрпример 1. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через m максимальное неотрицательное целое, для которого $n \geq 2^m$, и положим $k = n - 2^m$.

Рассмотрим геометрическую схему на отрезке $\Omega = [0; 1]$ и положим

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \left[\dfrac{k}{2^m}; \dfrac{k+1}{2^m}\right], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда для любого $0 < \varepsilon < 1$ имеем $P(|X_n| \geq \varepsilon) = \frac{1}{2^m}$, и поэтому $X_n \xrightarrow{P} 0$.

В то же время для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ последовательность $\{X_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ содержит бесконечно много единиц и бесконечно много нулей. Поэтому

$$\varlimsup_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 1, \qquad \varliminf_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0 \qquad \text{и} \qquad X_n \overset{\text{п.н.}}{\nrightarrow} 0.$$

Связь между разными видами сходимости

Теорема: $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{F} X$.

Контрпример 2. Пусть для всех n случайные величины X_n совпадают и принимают значения 0 и 1 с вероятностью $1/2$, а величина $X = 1 - X_n$.

Тогда законы распределения для X_n и X совпадают, и поэтому $X_n \xrightarrow{F} X$.

Но при этом $|X_n - X| \equiv 1$, и поэтому $X_n \overset{P}{\nrightarrow} X$.

Закон больших чисел (ЗБЧ)

Последовательность случайных величин X_n удовлетворяет ***закону больших чисел в сильной форме (в форме Колмогорова)***, если

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Если сходимость по вероятности, то это ***слабая форма (Чебышёва)***.

$$X_1 - MX_1, \quad \frac{(X_1 - MX_1) + (X_2 - MX_2)}{2}, \quad \frac{(X_1 - MX_1) + (X_2 - MX_2) + (X_3 - MX_3)}{3}, \quad \dots \to 0$$

Теорема: если случайные величины X_n, где $n \in \mathbb{N}$, одинаково распределены и независимы и существует $m = MX_n$, то справедлива сильная форма ЗБЧ, т. е.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\text{п.н.}} m.$$

Теорема Чебышёва для ЗБЧ

Последовательность случайных величин X_n удовлетворяет ***закону больших чисел в сильной форме (в форме Колмогорова)***, если

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Если сходимость по вероятности, то это ***слабая форма (Чебышёва)***.

Теорема Чебышёва: если случайные величины X_n, где $n \in \mathbb{N}$, независимы, существуют их математические ожидания и дисперсии, причём дисперсии ограничены в совокупности, т. е. существует число $C > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$, $DX_n \leq C$, то справедлива слабая форма ЗБЧ.

Доказательство: по второму неравенству Чебышёва

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right) \leq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i}{\varepsilon^2} \leq 1 - \frac{C}{n} \to 1 \quad \square$$

Теорема Маркова для ЗБЧ

Последовательность случайных величин X_n удовлетворяет ***закону больших чисел в сильной форме (в форме Колмогорова)***, если

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i \xrightarrow{\text{п.н.}} 0.$$

Если сходимость по вероятности, то это ***слабая форма (Чебышёва)***.

Теорема Маркова: если для случайных величин X_n, где $n \in \mathbb{N}$, существуют их математические ожидания и дисперсии, причём $\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \to 0$ при $n \to +\infty$, то справедлива слабая форма ЗБЧ.

Закон больших чисел в форме Бернулли

Теорема: относительная частота успехов в n испытаниях Бернулли сходится по вероятности к вероятности успеха в одном испытании:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} p.$$

Доказательство: следует из любой из трёх теорем выше.

Пример

Дана последовательность независимых дискретных случайных величин $\{X_n\}$ со следующим законом распределения вероятностей.

X_n	$-5n$	0	$5n$
P	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Проверим, применим ли к данной последовательности закон больших чисел в форме Чебышёва.

$$MX_n = (-5n)\cdot\frac{1}{2n^2} + 0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + 5n\cdot\frac{1}{2n^2} = 0,$$

$$DX_n = (-5n)^2\cdot\frac{1}{2n^2} + 0^2\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + (5n)^2\cdot\frac{1}{2n^2} - 0^2 = 25.$$

Математические ожидания существуют, дисперсии ограничены в совокупности. Поэтому ЗБЧ в форме Чебышёва применим.