

Теория вероятностей и математическая статистика

Лекция 13

Характеристические функции и предельные теоремы

Характеристическая функция

Характеристической функцией случайной величины X называется функция $f_X(t) = Me^{itX}$, $t \in \mathbb{R}$, i – мнимая единица.

Пример: для биномиального распределения

$$f(t) = \sum_{j=0}^n e^{itj} C_n^j p^j q^{n-j} = (q + pe^{it})^n.$$

Пример: для экспоненциального распределения

$$f(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Пример: для стандартного нормального распределения

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = [y = x - it] = e^{-t^2/2}.$$

Свойства характеристических функций

Теорема:

1) $f(0) = 1$;

2) $|f(t)| \leq 1$;

3) $f(t)$ непрерывна;

4) $Y = aX + b \Rightarrow f_Y(t) = e^{itb} f_X(at)$;

5) $Y = X_1 + X_2$, X_1 и X_2 – независимые $\Rightarrow f_Y(t) = f_{X_1}(t)f_{X_2}(t)$;

6) \exists нач. момент $m_n \Leftrightarrow \exists f^{(n)}(0) = i^n m_n$.

Теорема непрерывности: $F_n(x)$ слабо сходится к $F(x) \Leftrightarrow f_n(t)$ поточечно сходится к $f(t)$.

Центральная предельная теорема

Теорема: пусть дана сумма $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ независимых и одинаково распределённых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , для которых существует математическое ожидание m и дисперсия σ^2 ; тогда

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{F} \text{стандартное нормальное распределение.}$$

Доказательство: для $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ характеристическая функция

$$g_n(t) = \left(f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) e^{-imt/\sigma\sqrt{n}} \right)^n,$$

где $f(t)$ – характеристическая функция для X_i ; разложим в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \ln f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) &= \ln f(0) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \frac{f'(0)}{f(0)} + \frac{t^2}{2\sigma^2 n} \left(\frac{f''(0)}{f(0)} - \left(\frac{f'(0)}{f(0)}\right)^2 \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{imt}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

$$\ln g_n(t) = n \left(\ln f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{imt}{\sigma\sqrt{n}} \right) \rightarrow -\frac{t^2}{2}, \quad g_n(t) \rightarrow e^{-t^2/2} \quad \square$$

Интегральная формула Муавра-Лапласа

Следствие: для числа успехов $S_n = k$ в n испытаниях Бернулли

$$P\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \rightarrow \Phi(x).$$

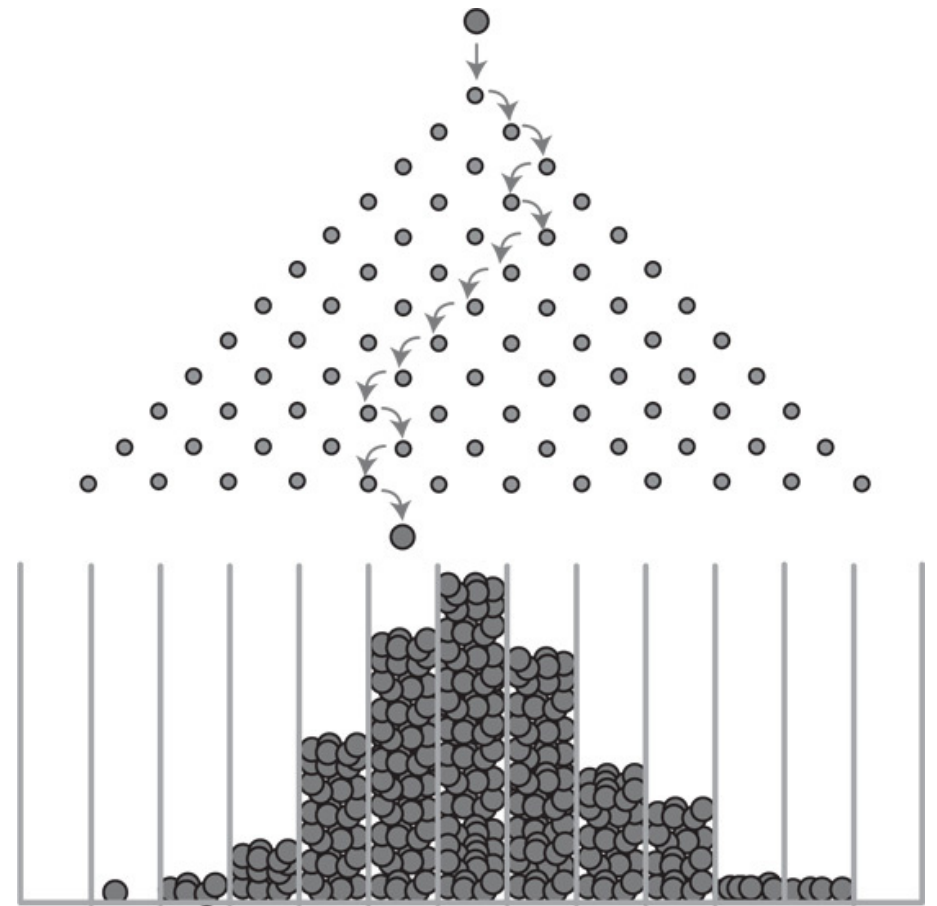
Интегральная теорема Муавра-Лапласа:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \quad \text{где } x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}.$$

Доска Гальтона

В прямоугольный полупрозрачный ящик сверху по центру кидаются шарики. Падая, шарики ударяются о штырьки, вбитые в заднюю стенку ящика в шахматном порядке. При столкновении со штырьком шарик в идеале с равной вероятностью скатывается направо или налево.

Нижняя часть ящика разделена перегородками, попадая в которые шарики наглядно иллюстрируют плотность биномиального распределения, которое в соответствии с центральной предельной теоремой аппроксимирует плотность нормального распределения.



Локальная формула Муавра-Лапласа

Теорема: пусть в схеме Бернулли $n \rightarrow +\infty$, $p = \text{const}$ и $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ равномерно ограничено по k и n , тогда $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2} (1 + o(n))$.

Доказательство: в силу равномерной ограниченности x имеем

$$\frac{k}{np} = 1 + x \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} \quad \text{и} \quad \frac{n-k}{nq} = 1 - x \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}};$$

по формуле Стирлинга

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{k(n-k)}{n}}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \frac{1 + o(n)}{(1 + o(k))(1 + o(n-k))}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{k(n-k)}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq} (1 + o(n))};$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} \right) &= -k \ln \left(1 + x \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} \right) - (n-k) \ln \left(1 - x \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} \right) = \\ &= -k \left(x \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{x^2 q}{2np} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) - (n-k) \left(-x \cdot \sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2 p}{2nq} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = -\frac{x^2}{2} + o(n); \end{aligned}$$

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + o(n)) \quad \square$$

Теорема Пуассона для схемы Бернулли

Теорема Пуассона (для схемы Бернулли): пусть в последовательности серий n_i испытаний Бернулли при $i \rightarrow +\infty$ имеем $n_i \rightarrow +\infty$, $p_i \rightarrow 0$ и $n_i p_i \rightarrow \lambda > 0$; тогда

$$\forall k \geq 0, \quad P_n(k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

т. е. биномиальное распределение при $n \rightarrow +\infty$ стремится к распределению Пуассона.

Доказательство: для испытаний Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k},$$

обозначим $\lambda_i = n_i p_i$ и зафиксируем k , тогда

$$\begin{aligned} P_{n_i}(k) &= \frac{n_i!}{k! (n_i - k)!} \cdot \left(\frac{\lambda_i}{n_i}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda_i}{n_i}\right)^{n_i - k} = \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n_i - k + 1)(n_i - k + 2) \dots n_i}{n_i^k} \cdot \lambda_i^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda_i}{n_i}\right)^{n_i - k} \rightarrow \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda} \quad \square \end{aligned}$$

Пример

Вероятность попадания в цель при каждом выстреле 0,001.

Найдём вероятность поражения цели двумя и более пулями при 5000 выстрелах:

$$P_{5000}(k \geq 2) \approx 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 1 - e^{-np}(1 + np) \approx 0,9596.$$