

Случайные процессы

Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVIII.) (Главы 1–4)

Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 2006. (Главы 15–17)

Лекция 1. Основные понятия теории случайных процессов

Случайной функцией $\xi(t, \omega)$ называется параметризованное семейство n -мерных случайных величин $\xi_t(\omega)$, где $\omega \in \Omega$ и параметр t принимает значения из некоторого множества T . Если T является промежутком на \mathbb{R} , то случайная функция $\xi(t, \omega)$ называется *случайным процессом* (СП). Если ещё и $n = 1$, то СП $\xi(t, \omega)$ называется *скалярным*. Если же $n \geq 2$, то СП $\xi(t, \omega) = (\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_n(t, \omega))$ называется *векторным* (n -мерным). В этом случае одномерные СП $\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_n(t, \omega)$ называются *координатами* n -мерного СП $\xi(t, \omega)$.

Примеры случайных процессов:

- 1) уровень помех при передаче сообщения в момент времени t ;
- 2) температура воздуха в заданной точке в момент времени t ;
- 3) число отказов оборудования к моменту времени t .

Если зафиксировать некоторое значение параметра t , то $\xi(t, \omega)$ является n -мерной случайной величиной, которая называется *сечением* случайного процесса. Если зафиксировать некоторый исход ω , то $\xi(t, \omega)$ является неслучайной функцией, которая называется *траекторией* (*реализацией*) случайного процесса.

Одномерным законом распределения СП $\xi(t, \omega)$ называется закон распределения вероятностей его сечения при некотором t . Этот закон может быть задан функцией распределения

$$F_{\xi}(x|t) = P(\xi(t, \omega) < x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(y|t) dy,$$

Для векторного СП $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi(t, \omega) = (\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_n(t, \omega))$, неравенство $\xi(t, \omega) < x$ выполняется для всех соответствующих компонент векторов $\xi(t, \omega)$ и x , и интеграл в правой части является n -кратным.

Конечномерным (k -мерным) законом распределения СП $\xi(t, \omega)$ называется совместный закон распределения вероятностей любых k его сечений при $t = t_1, \dots, t_k$. Этот закон может быть задан функцией распределения

$$F_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(k)} | t_1, \dots, t_k) = P(\xi(t_1, \omega) < x_{(1)}, \dots, \xi(t_k, \omega) < x_{(k)}) = \\ = \int_{-\infty}^{x_{(1)}} \dots \int_{-\infty}^{x_{(k)}} f_{\xi}(y_{(1)}, \dots, y_{(k)} | t_1, \dots, t_k) dy_{(1)} \dots dy_{(k)},$$

где интеграл в правой части является (kn) -кратным.

Математическим ожиданием скалярного СП ξ называется функция $T \rightarrow \mathbb{R}$, которая каждому $t \in T$ ставит в соответствие математическое ожидание сечения в момент t :

$$m_{\xi}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x f_{\xi}(x|t) dx.$$

Для векторного СП математическое ожидание является вектором

$$m_{\xi}(t) = (m_{\xi_1}(t), \dots, m_{\xi_n}(t)), \quad m_{\xi_i}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_i f_{\xi}(x_1, \dots, x_n|t) dx_1 \dots dx_n.$$

Ковариационной матрицей СП ξ называется матричная функция $\Sigma_{\xi}(t)$, где элементами матрицы являются ковариации i -й и j -й координат сечения в момент t :

$$\Sigma_{\xi}(t) = \left(\text{cov}(\xi_i(t, \omega), \xi_j(t, \omega)) \right).$$

Теорема (свойства ковариационной матрицы).

- 1) $\Sigma_{ii} = D\xi_i$;
- 2) $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}$.

Дисперсией СП называется сумма дисперсий всех его координат:

$$D\xi(t) = \sigma_{\xi}^2(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_{\xi_i}^2(t)$$

т. е. след ковариационной матрицы $\Sigma_{\xi}(t)$.

Если рассматривать $\xi - m_{\xi}$ как вектор-столбец, то можно записать:

$$\Sigma_{\xi}(t) = M \left((\xi - m_{\xi})(\xi - m_{\xi})^{\top} \right), \quad \sigma_{\xi}^2(t) = M \left((\xi - m_{\xi})^{\top} (\xi - m_{\xi}) \right).$$

Ковариационной функцией СП ξ называется матричная функция $K_{\xi}(t_1, t_2)$, где элементами матрицы являются ковариации i -й координаты сечения в момент t_1 и j -й координаты сечения в момент t_2 :

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \left(\text{cov} \left(\xi_i(t_1, \omega), \xi_j(t_2, \omega) \right) \right).$$

Теорема (свойства ковариационной функции).

- 1) $K_{\xi}(t, t) = \Sigma_{\xi}(t)$;
- 2) $K_{\xi}(t_2, t_1) = K_{\xi}^{\top}(t_1, t_2)$;
- 3) для евклидовой нормы $\|K_{\xi}(t_1, t_2)\| \leq \sqrt{\sigma_{\xi}^2(t_1) \sigma_{\xi}^2(t_2)}$;
- 4) если $\eta(t, \omega) = A(t) \xi(t, \omega) + \varphi(t)$, то

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = A(t_1) \cdot K_{\xi}(t_1, t_2) \cdot A^{\top}(t_2).$$

Корреляционной функцией СП ξ называется матричная функция $k_{\xi}(t_1, t_2)$, где элементами матрицы являются коэффициенты линейной корреляции i -й координаты сечения в момент t_1 и j -й координаты сечения в момент t_2 :

$$k_{\xi}(t_1, t_2) = \left(\rho \left(\xi_i(t_1, \omega), \xi_j(t_2, \omega) \right) \right) = \left(\frac{\text{cov} \left(\xi_i(t_1, \omega), \xi_j(t_2, \omega) \right)}{\sqrt{\sigma_{\xi_i}^2(t_1) \sigma_{\xi_j}^2(t_2)}} \right).$$

Пример: для скалярного СП

$$\xi(t, \omega) = \alpha(\omega) \cdot \cos(\varphi t) + \beta(\omega) \cdot \sin(\varphi t), \quad t \in [0; +\infty),$$

его математическое ожидание

$$m_{\xi}(t) = m_{\alpha} \cdot \cos(\varphi t) + m_{\beta} \cdot \sin(\varphi t)$$

и ковариационная функция

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \sigma_{\alpha}^2 \cos(\varphi t_1) \cos(\varphi t_2) + \text{cov}(\alpha, \beta) \cdot \sin \varphi(t_1 + t_2) + \sigma_{\beta}^2 \sin(\varphi t_1) \sin(\varphi t_2);$$

если случайные величины α и β независимы и $\sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta} = \sigma$, то

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos \varphi(t_2 - t_1) \quad \square$$

Взаимной ковариационной функцией двух СП ξ и η называется матричная функция $K_{\xi\eta}(t_1, t_2)$, где элементами матрицы являются ковариации i -й координаты сечения процесса ξ в момент t_1 и j -й координаты сечения процесса η в момент t_2 :

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \left(\text{cov} \left(\xi_i(t_1, \omega), \eta_j(t_2, \omega) \right) \right).$$

Теорема (свойства взаимной ковариационной функции).

1) $K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = K_{\eta\xi}^\top(t_2, t_1)$;

2) для евклидовой нормы $\|K_{\xi\eta}(t_1, t_2)\| \leq \sqrt{\sigma_\xi^2(t_1)\sigma_\eta^2(t_2)}$;

3) если $\hat{\xi}(t, \omega) = A_1(t) \xi(t, \omega) + \varphi_1(t)$ и

$\hat{\eta}(t, \omega) = A_2(t) \eta(t, \omega) + \varphi_2(t)$, то

$K_{\hat{\xi}\hat{\eta}}(t_1, t_2) = A_1(t_1) K_{\xi\eta}(t_1, t_2) A_2^\top(t_2)$.

По аналогии определяется *взаимная корреляционная функция*:

$$k_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \left(\rho \left(\xi_i(t_1, \omega), \eta_j(t_2, \omega) \right) \right).$$

СП $\xi(t, \omega)$ называется *нормальным (гауссовым)*, если любые его конечномерные законы распределения являются нормальными.

СП $\xi(t, \omega)$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если $\forall t_1 < \dots < t_k$ случайные величины

$$\xi(t_1, \omega), \quad \xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega), \quad \dots, \quad \xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)$$

независимы. Если эти случайные величины некоррелированы, то это СП с *некоррелированными (ортогональными) приращениями*. Если же для любого $i \in \overline{1, k}$ закон распределения вероятностей случайной величины $\xi(t_{i+1}, \omega) - \xi(t_i, \omega)$ зависит только от $t_{i+1} - t_i$, то это СП со *стационарными независимыми приращениями*.

Теорема. Для СП с некоррелированными (в частности, независимыми) приращениями

$$K_\xi(t_1, t_2) = \Sigma_\xi(t),$$

где $t = \min\{t_1, t_2\}$.

n -мерный СП $\xi(t, \omega)$, где $t \in [0; +\infty)$, называется *винеровским процессом, выходящим из нуля*, если:

- 1) $\xi(0, \omega) \equiv 0$;
- 2) это процесс с независимыми приращениями;
- 3) $\forall t_1 < t_2$ n -мерная случайная величина $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$ нормально распределена с $m = 0$ и ковариационной матрицей

$$(t_2 - t_1)\sigma^2 I_n.$$

Винеровский процесс введён Норбертом Винером в 1923 г. для описания броуновского движения. Параметр σ^2 называется *коэффициентом диффузии*. СП $\frac{\xi(t, \omega)}{\sigma}$ называется *стандартным винеровским процессом*.

Теорема (свойства винеровского процесса).

- 1) $m_\xi(t) \equiv 0$, $K_\xi(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\} \sigma^2 I_n$, $D\xi(t) = n\sigma^2 t$;
- 2) винеровский СП является процессом со стационарными приращениями;
- 3) винеровский СП является нормальным.

Скалярный СП ξ называется *пуассоновским* с параметром λ , если:

- 1) $\xi(0, \omega) \equiv 0$;
- 2) это процесс с независимыми приращениями;
- 3) $\forall t_1 < t_2$ случайная величина $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda(t_2 - t_1)$, т. е.

$$P(\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega) = k) = \frac{\lambda^k (t_2 - t_1)^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

Лекция 2. Элементы стохастического анализа

Последовательность случайных величин ξ_k называется *сходящейся в среднем квадратичном* к случайной величине ξ , если

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M \left((\xi_k(\omega) - \xi(\omega))^2 \right) = 0.$$

Обозначают: $\xi_k(\omega) \xrightarrow{\text{СК}} \xi(\omega)$.

СП $\xi(t, \omega)$ называется *сходящимся в среднем квадратичном* к случайной величине $\eta(\omega)$ при $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M(\|\xi(t, \omega) - \eta(\omega)\|^2) = 0.$$

Обозначают: $\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega) = \eta(\omega)$.

СП $\xi(t, \omega)$ называется *случайным процессом 2-го порядка* (СП2П), если существует $\|\xi(t, \omega)\|_{\text{СК}} = \sqrt{M(\|\xi(t, \omega)\|^2)}$.

Чтобы величина $\|\xi(t, \omega)\|_{\text{СК}}$ удовлетворяла аксиомам нормы, будем считать случайные процессы $\xi(t, \omega)$ и $\eta(t, \omega)$ *равными*, если

$$\|\xi - \eta\|_{\text{СК}} = 0.$$

Последовательность случайных процессов $\xi_{(m)}(t, \omega)$, где $m \in \mathbb{N}$, называется *сходящейся в среднем квадратичном* к случайному процессу $\xi(t, \omega)$, если

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} M(\|\xi_{(m)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)\|^2) = 0.$$

Обозначают: $\lim_{m \rightarrow +\infty} \xi_{(m)}(t, \omega) = \xi(t, \omega)$.

Теорема. Для скалярного СП $\xi(t, \omega)$ существует $\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t, \omega) \Leftrightarrow$ существуют $\lim_{t \rightarrow t_0} m_\xi(t) = m_0$ и $\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t_0} K_\xi(t_1, t_2) = K_0$.

Скалярный СП2П $\xi(t, \omega)$ называется *дифференцируемым* в точке t_0 , если существует $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\xi(t, \omega) - \xi(t_0, \omega)}{t - t_0}$, который обозначается $\dot{\xi}(t_0, \omega)$ и называется *производной* СП $\xi(t, \omega)$.

Теорема. Скалярный СП2П $\xi(t, \omega)$ дифференцируем в точке $t_0 \Leftrightarrow$ существуют $\frac{d}{dt} m_\xi(t_0)$ и $\frac{\partial^2 K_\xi}{\partial t_1 \partial t_2}(t_0, t_0)$.

Следствие. Для дифференцируемого на множестве T скалярного СП2П $\xi(t, \omega)$ и его производной $\eta = \dot{\xi}$ имеем

$$m_\eta(t) = \frac{dm_\xi(t)}{dt}, \quad K_\eta(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2},$$

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_2}, \quad K_{\eta\xi}(t_1, t_2) = \frac{\partial K_\xi(t_1, t_2)}{\partial t_1}.$$

Пример: для скалярного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) = \alpha(\omega) \cos(\varphi t) + \beta(\omega) \sin(\varphi t),$$

где $t \in [0; +\infty)$, случайные величины α и β независимые, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma$ и $\eta = \dot{\xi}$ имеем

$$\begin{aligned}
m_{\xi}(t) &= m_{\alpha} \cos(\varphi t) + m_{\beta} \sin(\varphi t), \\
K_{\xi}(t_1, t_2) &= \sigma^2 \cos \varphi (t_2 - t_1), \\
m_{\eta}(t) &= \varphi (m_{\beta} \cos(\varphi t) - m_{\alpha} \sin(\varphi t)), \\
K_{\eta}(t_1, t_2) &= \sigma^2 \varphi^2 \cos \varphi (t_2 - t_1), \\
K_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= -\sigma^2 \varphi \sin \varphi (t_2 - t_1) \quad \square
\end{aligned}$$

Скалярный СП2П $\xi(t, \omega)$ называется *интегрируемым на $T = [a, b]$ с весом $\varphi(t, t')$* , если существует такой скалярный СП $\eta(t, \omega)$, что для любого разбиения $a = t_0 \leq t'_0 \leq t_1 \leq t'_1 \leq \dots \leq t'_{n-1} \leq t_n = b$ существует

$$\lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(t, t'_k) \xi(t'_k, \omega) \Delta t_k = \eta(t, \omega).$$

Обозначают: $\eta(t, \omega) = \int_T \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt'$.

Теорема. Скалярный СП2П $\xi(t, \omega)$ интегрируем на T с весом $\varphi(t, t')$ \Leftrightarrow его математическое ожидание $m_{\xi}(t)$ интегрируемо на T с весом $\varphi(t, t')$ и его ковариационная функция $K_{\xi}(t_1, t_2)$ интегрируема на $T \times T$ с весом $\varphi(t, t'_1) \varphi(t, t'_2)$.

Следствие. Для интегрируемого с весом $\varphi(t, t')$ на множестве $T = [a, b]$ скалярного СП2П $\xi(t, \omega)$ и $\eta(t, \omega) = \int_T \varphi(t, t') \xi(t', \omega) dt'$ имеем

$$\begin{aligned}
m_{\eta}(t) &= \int_T \varphi(t, t') m_{\xi}(t') dt', \\
K_{\eta}(t_1, t_2) &= \int_T \int_T \varphi(t_1, t'_1) \varphi(t_2, t'_2) K_{\xi}(t'_1, t'_2) dt'_1 dt'_2, \\
K_{\xi\eta}(t_1, t_2) &= \int_T \varphi(t_2, t') K_{\xi}(t_1, t') dt'.
\end{aligned}$$

Для весовой функции

$$\varphi(t, t') = J(t - t') = \begin{cases} 1, & t > t', \\ 0, & t < t', \end{cases}$$

которая является единичной функцией (Хэвисайда), получаем интеграл с переменным верхним пределом

$$\eta(t, \omega) = \int_a^t \xi(t', \omega) dt'.$$

Теорема. Если $\eta(t, \omega) = \int_a^t \xi(t', \omega) dt'$, то $\xi(t, \omega) = \dot{\eta}(t, \omega)$.

Пример: для скалярного случайного процесса

$$\xi(t, \omega) = \alpha(\omega) \cos(\varphi t) + \beta(\omega) \sin(\varphi t),$$

где $t \in [0; +\infty)$, случайные величины α и β независимые, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma$ и

$\eta(t, \omega) = \int_0^t \xi(t', \omega) dt'$ имеем

$$m_\xi(t) = m_\alpha \cos(\varphi t) + m_\beta \sin(\varphi t),$$

$$K_\xi(t_1, t_2) = \sigma^2 \cos \varphi (t_2 - t_1),$$

$$m_\eta(t) = \frac{m_\alpha \sin(\varphi t) - m_\beta \cos(\varphi t)}{\varphi},$$

$$K_\eta(t_1, t_2) = \frac{\sigma^2}{\varphi^2} (\cos \varphi (t_2 - t_1) - \cos \varphi t_1 - \cos \varphi t_2 + 1),$$

$$D\eta(t) = K_\eta(t, t) = \frac{2\sigma^2}{\varphi^2} (1 - \cos \varphi t) \quad \square$$

Лекция 3. Спектральная теория стационарных СП

Каноническим разложением скалярного СП $\xi(t, \omega)$ называется его представление в виде

$$\xi(t, \omega) = m_\xi(t) + \sum_k V_k(\omega) \varphi_k(t),$$

где сумма может быть бесконечной, $V_k(\omega)$ – центрированные некоррелированные случайные величины, называемые *коэффициентами*, а $\varphi_k(t)$ – неслучайные функции, называемые *координатными функциями* разложения.

Каноническому разложению скалярного СП $\xi(t, \omega)$ соответствует каноническое разложение его ковариационной функции и дисперсии:

$$K_\xi(t_1, t_2) = \sum_k D(V_k) \varphi_k(t_1) \varphi_k(t_2), \quad D\xi(t) = \sum_k D(V_k) \varphi_k^2(t).$$

СП $\xi(t, \omega)$ называется *стационарным* (в широком смысле), если его математическое ожидание постоянно и ковариационная функция $K_\xi(t_1, t_2)$ зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$, т. е.

$$m_\xi(t) \equiv const, \quad K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(\tau).$$

Теорема (свойства стационарного скалярного СП).

1) ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ является чётной:

$$\forall \tau, \quad K_\xi(-\tau) = K_\xi(\tau);$$

2) дисперсия постоянна:

$$D\xi(t) \equiv K_\xi(0) = \text{const};$$

3) значения ковариационной функции по абсолютной величине не превосходят дисперсии:

$$\forall \tau, \quad |K_\xi(\tau)| \leq D\xi \equiv K_\xi(0).$$

Каноническим (спектральным) разложением стационарного скалярного СП $\xi(t, \omega)$ называется его представление в виде

$$\xi(t, \omega) = m_\xi(t) + \sum_{k=0}^{+\infty} (U_k(\omega) \cos(\varphi_k t) + V_k(\omega) \sin(\varphi_k t)),$$

где $U_k(\omega)$ и $V_k(\omega)$ – центрированные некоррелированные случайные величины с попарно равными дисперсиями $DU_k = DV_k = D_k$.

Спектральному разложению стационарного скалярного СП $\xi(t, \omega)$ соответствует каноническое разложение его ковариационной функции и дисперсии:

$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} D_k \cos(\varphi_k \tau), \quad D\xi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} D_k.$$

Линейным оператором L_t будем называть оператор умножения на неслучайную функцию $\alpha(t)$, либо оператор дифференцирования, либо оператор интегрирования, либо оператор, полученный из перечисленных с помощью арифметических операций или композиции.

Теорема. Пусть скалярный СП $\eta(t, \omega)$ получен из СП $\xi(t, \omega)$ при действии линейного оператора L_t следующего вида

$$\eta = L_t[\xi] = \alpha\xi + \dot{\xi} + \int_a^t \xi \varphi dt',$$

тогда

$$m_\eta = L_t[m_\xi], \quad K_\eta = L_{t_1} [L_{t_2} [K_\xi]].$$

Теорема. Для стационарного скалярного СП2П $\xi(t, \omega)$ и его производной $\eta = \dot{\xi}$ имеем

$$m_\eta(t) \equiv 0, \quad K_\eta(\tau) = -K_\xi''(\tau).$$

Спектральной плотностью $s_\xi(\nu)$ стационарного скалярного СП $\xi(t, \omega)$, где $t \in [0, +\infty)$, называется изображение ковариационной функции $K_\xi(\tau)$ при действии интегрального преобразования Фурье:

$$s_\xi(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\xi(\tau) e^{-i\nu\tau} d\tau.$$

Оригиналом интегрального преобразования Фурье является функция, которая абсолютно интегрируема на \mathbb{R} и удовлетворяет условиям Дирихле (кусочно монотонна и кусочно непрерывна на любом конечном отрезке).

Обратное преобразование Фурье имеет следующий вид:

$$K_\xi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_\xi(\nu) e^{i\nu\tau} d\nu,$$

где несобственный интеграл понимается в смысле главного значения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

Теорема (свойства спектральной плотности).

- 1) $s_\xi(\nu) \geq 0$;
- 2) $s_\xi(-\nu) = s_\xi(\nu)$;
- 3) $\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} s_\xi(\nu) = 0$;
- 4) $s_\xi(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} K_\xi(\tau) \cos(\nu\tau) d\tau$;
- 5) $K_\xi(\tau) = 2 \int_0^{+\infty} s_\xi(\nu) \cos(\nu\tau) d\nu$;
- 6) $D\xi = K_\xi(0) = 2 \int_0^{+\infty} s_\xi(\nu) d\nu$, т. е. спектральная плотность является плотностью распределения дисперсии СП по частотам его гармоник;
- 7) если $\eta(t, \omega) = \frac{d^n \xi(t, \omega)}{dt^n}$, то $s_\eta(\nu) = \nu^{2n} s_\xi(\nu)$;
- 8) если $\eta(t, \omega) = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \xi(t, \omega)$, то

$$s_\eta(\nu) = \left| \sum_{k=0}^n b_k (i\nu)^{n-k} \right|^2 s_\xi(\nu).$$

Пример: для стационарного скалярного СП $\xi(t, \omega)$ с ковариационной функцией $K_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ найдём его спектральную плотность

$$s_\xi(\nu) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\nu\tau} d\tau =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - i\nu)\tau} d\tau - \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + i\nu)\tau} d\tau \right) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\alpha^2 + \nu^2)} \quad \square$$

Стационарный скалярный СП $\xi(t, \omega)$, $t \in [0; +\infty)$, называется *белым шумом с интенсивностью c* , если его спектральная плотность постоянна и равна c , т. е. $s_\xi(\nu) \equiv c$.

Теорема (свойства белого шума).

- 1) стационарный скалярный СП $\xi(t, \omega)$, $t \in [0; +\infty)$, является белым шумом $\Leftrightarrow K_\xi(\tau) = 2\pi c \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака;
- 2) сечения белого шума не коррелируют;
- 3) дисперсия белого шума $D\xi = K_\xi(0) = 2\pi c \delta(0) = \infty$.

Дельта-функция – это обобщённая функция, определяемая условием

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

для любой функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Отсюда для $f(x) \equiv 1$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Дельта-функция не может быть задана как соответствие из \mathbb{R} в \mathbb{R} , однако неформально можно полагать, что

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Известно, что производная от единичной функции (Хэвисайда) равна дельта-функции: $J'(t) = \delta(t)$, так как

$$\langle J', f \rangle = -\langle J, f' \rangle = -\int_t^{+\infty} f'(x) dx = f(0) = \langle \delta, f \rangle.$$

Белый шум является математической абстракцией и физически не может быть реализован, так как для этого потребовалась бы энергия, пропорциональная дисперсии, т. е. равная бесконечности. На практике встречаются

случайные процессы с (почти) постоянной спектральной плотностью лишь в определённой полосе частот. Использование белого шума в теории случайных процессов аналогично использованию δ -функции в математической физике.

Пример: для скалярного винеровского СП $\xi(t, \omega)$, $t \in [0; +\infty)$, с коэффициентом диффузии σ^2 ковариационная функция имеет вид

$$K_\xi(t_1, t_2) = \sigma^2 \min\{t_1, t_2\},$$

тогда

$$\frac{\partial K_\xi}{\partial t_1} = \sigma^2 J(t_2 - t_1) = \begin{cases} \sigma^2, & t_1 < t_2, \\ 0, & t_1 > t_2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 K_\xi}{\partial t_1 \partial t_2} = \sigma^2 \delta(t_2 - t_1),$$

следовательно, производная винеровского СП является белым шумом с интенсивностью $c = \frac{\sigma^2}{2\pi}$.

Линейным динамическим звеном называется динамическая система, состояние которой $y(t)$ адекватно описывает математическая модель, представляющая собой задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка $L_t(y(t)) = f(t)$, где L_t – линейный оператор следующего вида:

$$L_t(y(t)) = y^{(n)}(t) + \alpha_1(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_{n-1}(t)y'(t) + \alpha_n(t)y(t).$$

Неслучайная функция $f(t)$ называется *входным сигналом*, а $y(t)$ – *реакцией* на входной сигнал. Если входной сигнал является случайным процессом $\xi(t, \omega)$, то и реакция будет случайным процессом $\eta(t, \omega)$. В таком случае дифференциальное уравнение $L_t(\eta(t, \omega)) = \xi(t, \omega)$ называется *стохастическим*.

Пусть функционирование линейной динамической системы описывается линейным дифференциальным уравнением I порядка:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \eta(t, \omega) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^{m-j}}{dt^{m-j}} \xi(t, \omega),$$

где $t > 0$, ξ – стационарный входной сигнал и η – реакция системы. Тогда после затухания переходных процессов СП η можно рассматривать как стационарный.

Частотной характеристикой динамической системы называется функция

$$\Phi(iv) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (iv)^{m-j}}{\sum_{k=0}^n a_k (iv)^{n-k}}.$$

Теорема. Для линейной динамической системы со стационарным входным сигналом ξ и реакцией η имеем

$$m_\eta = \frac{b_m}{a_n} m_\xi, \quad s_\eta(\nu) = |\Phi(iv)|^2 s_\xi(\nu).$$

Пример: стационарный скалярный СП ξ с ковариационной функцией $K_\xi(\tau) = \sigma^2 e^{-3|\tau|}$ подаётся на вход динамической системы

$$\dot{\eta}(t, \omega) + 2\eta(t, \omega) = 3\dot{\xi}(t, \omega) + 4\xi(t, \omega),$$

найдем математическое ожидание, спектральную плотность и дисперсию реакции системы η :

$$m_\eta = 2m_\xi, \quad |\Phi(iv)|^2 = \left| \frac{3(iv) + 4}{(iv) + 2} \right|^2 = \frac{9\nu^2 + 16}{\nu^2 + 4},$$

выше было показано, что $s_\xi(\nu) = \frac{3\sigma^2}{\pi(\nu^2 + 9)}$, поэтому

$$\begin{aligned} s_\eta(\nu) &= \frac{9\nu^2 + 16}{\nu^2 + 4} \cdot \frac{3\sigma^2}{\pi(\nu^2 + 9)}, \\ D\eta &= 2 \int_0^{+\infty} s_\eta(\nu) d\nu = \frac{6\sigma^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{9\nu^2 + 16}{(\nu^2 + 4)(\nu^2 + 9)} d\nu = \\ &= \frac{6\sigma^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{13}{\nu^2 + 9} - \frac{4}{\nu^2 + 4} \right) d\nu = \\ &= \frac{6\sigma^2}{\pi} \left(\frac{13}{3} \operatorname{arctg} \frac{\nu}{3} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\nu}{2} \right) \Big|_0^{+\infty} = 7\sigma^2. \end{aligned}$$

Семинар 1. Случайные процессы

Волков: 1.13, 1.17, 3.15, 3.26, 4.7, 4.8, 4.12.

ДЗ: 1.14, 3.16, 3.25, 4.5, 4.13.