

Подготовка к рубежному контролю №2 «Случайные величины»
по курсу «Теория вероятностей и случайные процессы»
для специальности РТ1, 4-й семестр, 2021 г.

Теоретические вопросы

1. Дайте определения случайной величины и её функции распределения.
2. Дайте определения дискретной случайной величины, её математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения.
3. Дайте определения начальных и центральных моментов, квантилей, квартилей и медианы дискретной случайной величины.
4. Напишите формулы для вычисления вероятностей биномиального распределения, а также его математического ожидания и дисперсии.
5. Напишите формулы для вычисления вероятностей геометрического распределения (оба варианта такого распределения), а также его математического ожидания и дисперсии.
6. Дайте определения непрерывной случайной величины, её плотности распределения, математического ожидания, дисперсии и квантилей.
7. Дайте определение функции от случайной величины и напишите формулы для математического ожидания случайной величины Y , которая является функцией от случайной величины X (в дискретном и непрерывном случаях).
8. Напишите формулу, связывающую функции распределения непрерывных случайных величин X и $Y = \varphi(X)$, а также частные случаи этой формулы, когда функция φ возрастает и когда убывает.
9. Напишите формулы, связывающие плотности распределения непрерывных случайных величин X и $Y = \varphi(X)$, если функция φ непрерывно дифференцируема и монотонна или кусочно-монотонна.
10. Дайте определения n -мерного случайного вектора и его функции распределения и перечислите свойства функции распределения для $n = 2$.
11. Дайте определения непрерывного n -мерного случайного вектора и его плотности распределения и перечислите свойства плотности распределения для $n = 2$.
12. Дайте определение ковариации и коэффициента корреляции двух случайных величин и перечислите свойства коэффициента корреляции.
13. Напишите формулы для вычисления условной функции распределения и условной плотности распределения для непрерывной двумерной случайной величины.
14. Дайте определения n -мерного нормального распределения и n -мерного стандартного нормального распределения и перечислите свойства нормально распределённого случайного вектора.

Теоретические вопросы с доказательством или выводом формул

1. Сформулируйте и докажите свойства функции распределения случайной величины.
2. Сформулируйте и докажите свойства математического ожидания для дискретных случайных величин.
3. Сформулируйте и докажите свойства дисперсии.
4. Напишите формулы для вычисления вероятностей распределения Пуассона, а также вывод формул для его математического ожидания и дисперсии.
5. Сформулируйте и докажите свойства плотности распределения непрерывной случайной величины.
6. Напишите формулы плотности и функции равномерного распределения на отрезке $[a, b]$, а также вывод формул для его математического ожидания и дисперсии.
7. Напишите формулы плотности и функции экспоненциального распределения, а также вывод формул для его математического ожидания и дисперсии.
8. Напишите вывод формул, связывающих функцию нормального распределения с произвольными параметрами, функцию стандартного нормального распределения и нормированную функцию Лапласа.
9. Напишите формулу плотности нормального распределения, а также вывод формул для его математического ожидания и дисперсии.
10. Сформулируйте и докажите свойства математического ожидания для непрерывных случайных величин.
11. Дайте определение независимых случайных величин, сформулируйте критерии независимости для дискретного и непрерывного случаев и докажите критерий для непрерывного случая.
12. Дайте определение свёртки (композиции) законов распределения случайных величин и напишите вывод формулы свёртки.
13. Сформулируйте и докажите свойства математического ожидания и дисперсии для независимых случайных величин.
14. Сформулируйте и докажите свойства ковариации двух случайных величин.

Задачи для подготовки

1. Закон и функция распределения случайной величины и числовые характеристики

- 1.1. Дан ряд распределения случайной величины ξ :

ξ	1	2	3	4	5
P	0,1	0,3	0,2	0,3	?

- Найдите: а) недостающую вероятность; б) функцию распределения $F_{\xi}(x)$ и постройте её график; в) вероятность того, что ξ примет чётное значение; г) математическое ожидание и дисперсию величины $\eta = 2\xi - 6$.
- 1.2. Вероятность приёма самолётом радиосигнала при каждой передаче равна 0,7. Найдите: а) ряд распределения случайной величины X – числа принятых сигналов при шестикратной передаче; б) функцию распределения случайной величины X ; в) математическое ожидание и дисперсию X ; г) вероятность того, что число принятых сигналов будет не меньше 3.
- 1.3. Из партии в 10 деталей, среди которых две бракованные, наудачу выбирают три детали. Найдите: а) закон распределения случайной величины X – числа бракованных деталей среди выбранных; б) функцию распределения случайной величины X ; в) математическое ожидание и дисперсию X ; г) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше, чем её математическое ожидание.
- 1.4. Непрерывная случайная величина X имеет следующую плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ a/x^2, & x > 1. \end{cases}$$

- Найдите: а) коэффициент a ; б) функцию распределения случайной величины X ; в) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(2, 3)$; г) вероятность того, что при четырёх независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадёт в интервал $(2, 3)$.
- 1.5. Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 2 и дисперсией 1. Найдите вероятность того, что в двух независимых испытаниях случайная величина X хотя бы раз попадёт в интервал $(1, 5)$.

2. Функции от случайных величин

- 2.1. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = 2$. Найдите: а) плотность и функцию распределения случайной величины $Y = e^{-X}$; б) математическое ожидание и дисперсию величины Y .

3. Случайные векторы

- 3.1. Закон распределения случайного вектора (X, Y) задан таблицей. Требуется: а) найти недостающую вероятность; б) найти вероятность попадания случайного вектора в прямоугольник $\{4 \leq X \leq 6, 0 \leq Y \leq 1\}$; в) найти вектор математических ожиданий; г) найти условное распределение величины Y при $X = 5$; д) установить, являются ли величины X и Y независимыми.

X	Y		
	0	1	2
5	4/27	2/9	?
10	2/27	1/9	4/27

- 3.2. Совместная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид:

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0; \\ C e^{-4x-2y}, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдите: а) постоянную C ; б) совместную функцию распределения; в) частные плотности распределения случайных величин X и Y ; г) вероятность попадания в случайного вектора (X, Y) в область, ограниченную прямыми $y = x$, $x + y = 2$ и $x = 0$; д) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

- 3.3. Случайные величины X и Y имеют коэффициент корреляции $\rho_{XY} = -0,5$. Величина X распределена равномерно в интервале $(-2, 10)$, а величина Y распределена по нормальному закону $p(y) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \cdot e^{-y^2/18}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\xi = X - 2Y$.
- 3.4. Для случайных величин X и Y известно, что $MX = 2$, $DX = 4$, $MY = -1$, $DY = 1$, $\rho_{XY} = 0,5$. Найдите математические ожидания, дисперсии и коэффициент корреляции случайных величин $U = 3X - 2Y$ и $V = 5Y - X$.
- 3.5. Двумерная случайная величина (X_1, X_2) распределена равномерно в квадрате $\{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию площади Y прямоугольника со сторонами X_1 и X_2 .
- 3.6. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) имеет вид:

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq 0 \text{ или } x_2 \leq 0; \\ 4x_1x_2 e^{-(x_1^2+x_2^2)}, & x_1 > 0 \text{ и } x_2 > 0. \end{cases}$$

Найдите математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную и корреляционную матрицы случайных величин X_1 и X_2 .