Подготовка к рубежному контролю №3 «Случайные процессы» по курсу «Теория вероятностей и случайные процессы» для специальности РТ1, 4-й семестр, 2021 г.

Теоретические вопросы (3 балла)

1. Дайте определения случайной функции, скалярного и векторного случайного процесса, сечения и траектории случайного процесса.
2. Дайте определения одномерного и k-мерного законов распределения случайного процесса.
3. Дайте определения математического ожидания скалярного и векторного случайного процесса.
4. Дайте определения ковариационной матрицы и дисперсии случайного процесса и напишите свойства ковариационной матрицы.
5. Дайте определения ковариационной функции и корреляционной функции случайного процесса и напишите свойства ковариационной функции.
6. Дайте определения взаимной ковариационной функции и взаимной корреляционной функции двух случайных процессов и напишите свойства взаимной ковариационной функции.
7. Дайте определение нормального (гауссова) случайного процесса.
8. Дайте определения случайного процесса с независимыми приращениями, с некоррелированными приращениями и со стационарными независимыми приращениями.
9. Дайте определение винеровского случайного процесса и напишите его свойства.
10. Дайте определение пуассоновского случайного процесса.
11. Дайте определение случайного процесса второго порядка.
12. Дайте определения дифференцируемого скалярного случайного процесса второго порядка и его производной.
13. Дайте определения скалярного случайного процесса второго порядка, интегрируемого с заданным весом.

Теоретические вопросы (4 балла)

1. Дайте определения сходимости случайного процесса в среднем квадратичном к случайной величине.
2. Сформулируйте критерий существования предела скалярного случайного процесса.
3. Сформулируйте критерий дифференцируемости скалярного случайного процесса второго порядка и напишите формулы для математического ожидания и ковариационной функции производной случайного процесса.
4. Сформулируйте критерий интегрируемости скалярного случайного процесса второго порядка и напишите формулы для математического ожидания и ковариационной функции случайного процесса, полученного в результате интегрирования.
5. Напишите вид канонического разложения скалярного случайного процесса, его ковариационной функции и дисперсии.
6. Дайте определение стационарного (в широком смысле) случайного процесса и напишите его свойства.
7. Напишите вид спектрального разложения стационарного скалярного случайного процесса, его ковариационной функции и дисперсии.
8. Дайте определение линейного оператора и сформулируйте теорему о действии линейного оператора на скалярный случайный процесс.
9. Дайте определение спектральной плотности стационарного случайного процесса и напишите её свойства.
10. Дайте определение белого шума и напишите его свойства.
11. Дайте определения линейного динамического звена, его входного сигнала и реакции, а также стохастического дифференциального уравнения.
12. Напишите дифференциальное уравнение, задающее преобразование стационарного случайного процесса при его прохождении через динамическую систему и дайте определение частотной характеристики динамической системы.
13. Напишите дифференциальное уравнение, задающее преобразование стационарного случайного процесса при его прохождении через динамическую систему и сформулируйте теорему о математическом ожидании и спектральной плотности реакции системы.

Задачи для подготовки

1.13. Определите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию скалярного случайного процесса

$$\xi(t,\omega) \triangleq 2u(\omega)\sin(\nu t) + 3v(\omega)t^2 + 5, \quad t \in T,$$

где ν — известный неслучайный параметр, а $u(\omega)$ и $v(\omega)$ — скалярные случайные величины с известными числовыми характеристиками: $\mathbf{M}[u(\omega)] = 1$; $\mathbf{M}[v(\omega)] = 2$; $\mathbf{D}[u(\omega)] = 0{,}1$; $\mathbf{D}[v(\omega)] = 0{,}9$; $\rho(u(\omega); v(\omega)) = -0{,}3$.

Ответ:

$m_\xi(t) = 2\sin(\nu t) + 6t^2 + 5$;

$\sigma_\xi^2(t) = 0{,}4\sin^2(\nu t) + 8{,}1t^4 - 1{,}08t^2\sin(\nu t)$;

$K_\xi(t_1,t_2) = 0{,}4\sin(\nu t_1)\sin(\nu t_2) + 8{,}1t_1^2t_2^2 - 0{,}54\big(t_1^2\sin(\nu t_2) + t_2^2\sin(\nu t_1)\big)$.

1.17. Найдите взаимную ковариационную функцию скалярных случайных процессов

$$\xi(t,\omega) \triangleq \alpha(\omega)\sin(\nu t) + \beta(\omega)\cos(\nu t), \quad t \in T \subset \mathbb{R},$$

$$\eta(t,\omega) \triangleq \alpha(\omega)\sin(\nu t) + \gamma(\omega)\cos(\nu t), \quad t \in T \subset \mathbb{R},$$

если ν — известный неслучайный параметр, а скалярные случайные величины $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$, $\gamma(\omega)$ являются попарно некоррелированными.

Ответ: $K_{\xi\eta}(t_1,t_2) = \sin(\nu t_1)\sin(\nu t_2)\mathbf{D}[\alpha(\omega)]$.

3.15. Найдите математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса

$$\eta(t,\omega) \triangleq \dot{\xi}(t,\omega), \quad t \in T \subset \mathbf{R},$$

если известно, что

$$\xi(t,\omega) \triangleq 2 + t + \alpha(\omega)t^2 + \beta(\omega)t^3, \quad t \in T,$$

где $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ — некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями, равными 0,1.

Ответ: $m_\eta(t) \equiv 1$; $\sigma_\eta^2(t) = 0{,}4t^2 + 0{,}9t^4$; $K_\eta(t_1,t_2) = 0{,}4t_1t_2 + 0{,}9t_1^2t_2^2$.

3.26. Найдите математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса:

$$\text{а) } \eta(t,\omega) \triangleq \int_0^t \xi(t',\omega)\,dt', \quad t \in T,$$

если $m_\xi(t) = 0{,}2\cos^2(\nu t)$, $K_\xi(t_1,t_2) = 0{,}4\cos(\nu t_1)\cos(\nu t_2)$ и ν — известная постоянная;

б) $\xi(t,\omega) \triangleq t + \alpha(\omega)\cos t + \beta(\omega)\sin t$, $t \in T$, где $\alpha(\omega)$, $\beta(\omega)$ — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и $\mathbf{D}[\alpha(\omega)] = 0{,}1$, $\mathbf{D}[\beta(\omega)] = 0{,}2$.

Ответ: а) $m_\eta(t) = 0{,}1\left[t + (2\nu)^{-1}\sin(2\nu t)\right]$, $K_\eta(t_1,t_2) = 0{,}4\nu^{-2}\sin(\nu t_1)\sin(\nu t_2)$, $\sigma^2_\eta = 0{,}4\nu^{-2}\sin^2(\nu t)$; б) $m_\eta(t) = 0{,}5t^2$, $K_\eta(t_1,t_2) = 0{,}1\sin(t_1)\sin(t_2) + 0{,}2\left[1-\cos(t_1)\right]\left[1-\cos(t_2)\right]$, $\sigma^2_\eta(t) = 0{,}1\sin^2(t) + 0{,}8\sin^2(0{,}5t)$.

4.7. Определите спектральную плотность стационарного скалярного случайного процесса $\xi(t,\omega)$, $t \in T = [0,\infty)$, если известна его дисперсия σ^2 и корреляционная функция

$$k_\xi(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\tau}{\tau_0}, & |\tau| < \tau_0; \\ 0, & |\tau| \geqslant \tau_0, \end{cases}$$

где τ_0 — известная величина.

Ответ: $s_\xi(\nu) = \dfrac{2\sigma^2}{\pi\nu^2}\sin^2\dfrac{\nu\tau_0}{2}$.

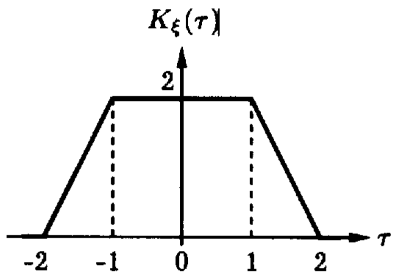

Рис. 4.3

4.8. Найдите спектральную плотность стационарного скалярного случайного процесса $\xi(t,\omega)$, $t \in T = [0,\infty)$, ковариационная функция которого:

а) равна $K_\xi(\tau) = \sigma^2(1+\alpha|\tau|)\exp(-\alpha|\tau|)$, где σ^2, α — известные величины;

б) задана графически (рис. 4.3).

Ответ: а) $s_\xi(\nu) = \dfrac{2\sigma^2\alpha^3}{\pi(\alpha^2+\nu^2)^2}$, б) $s_\xi(\nu) = \dfrac{4}{\pi\nu^2}\sin\dfrac{3\nu}{2}\sin\dfrac{\nu}{2}$.

4.12. Два стационарных скалярных случайных процесса $\xi(t,\omega)$, $t \in T = [0,\infty)$, и $\eta(t,\omega)$, $t \in T$, связаны равенством

$$5\dot\eta(t,\omega) + \eta(t,\omega) = 4\dot\xi(t,\omega) + 3\xi(t,\omega), \quad t \in T.$$

Определите математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $\eta(t,\omega)$, $t \in T$, если $m_\xi = 0$ и $K_\xi(\tau) = 2e^{-\alpha|\tau|}$, где α — известная положительная величина.

Ответ: $m_\eta = 9$; $\sigma^2_\eta = 0{,}4\dfrac{16\alpha^2+45}{5\alpha+1}$.

Указание: используйте свойства спектральной плотности.