

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

---

Факультет «Фундаментальные науки»  
Кафедра «Математическое моделирование»

**А.Н. Канатников**

# **КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ**

**Конспект лекций**

Для студентов специальности  
«Прикладная математика»

Москва  
2009

# Лекция 1

## МЕРА ЖОРДАНА

Задача о вычислении площади и объема. Понятие объема в  $n$ -мерном арифметическом пространстве. Измеримые множества. Мера Жордана. Кратный интеграл, теорема о существовании. Свойства кратного интеграла.

Мы приступаем к изучению различных обобщений определенного интеграла. Первое — кратный интеграл (в частности, двойной, тройной). Рассмотрим следующий пример.

**Пример 1.1.** Пусть имеется плоская пластинка некоторой формы с распределенным на ней электрическим зарядом (рис. 1.1). Распределение заряда описывается плотностью, т.е. количеством заряда на единицу площади. Плотность есть функция точки на плоскости, т.е. функция двух переменных, которую мы обозначим  $q(x, y)$ .

Чтобы приближенно вычислить общий заряд на пластинке, нужно разбить пластинку  $S$  на мелкие части  $\Delta S_i$  так, что плотность на каждой части условно постоянна. Тогда количество заряда на  $\Delta S_i$  равно произведению плотности, соответствующей этой части, на площадь. Суммируя, получаем приближенный результат

$$Q \approx \sum_i q(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

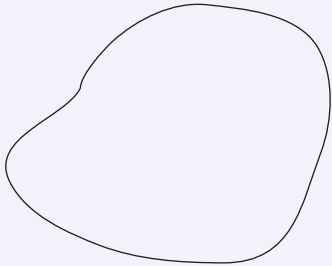


Рис. 1.1

Точный результат мы получим, если перейдем к пределу, при котором линейные размеры каждой части разбиения неограниченно уменьшаются.

Полученная сумма напоминает интегральную, но отличается тем, что вместо длин отрезков разбиения интервала интегрирования используются площади элементов разбиения.

Для построения теории нам необходимо точное определение площади фигуры. Не для всякого плоского множества можно определить площадь. Для каких можно? Как определить?

### 1.1. Площадь плоского множества

Площадь — это мера плоских множеств, т.е. закон, который плоскому множеству  $X$  ставит в соответствие число  $\mu(X)$ . При этом должны выполняться несколько важнейших свойств:

- $\mu(X) \geq 0$ ;
- площадь аддитивна, т.е. если  $X_1$  и  $X_2$  не пересекаются, то  $\mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2)$ . Из этого свойства и из а) следует, что при  $X_1 \subset X_2$  должно быть  $\mu(X_1) \leq \mu(X_2)$ ;
- площадь фигуры не меняется при ее перемещении (движении) по плоскости;
- площадь квадрата со стороной 1 равна 1.

Естественно предполагать, что объединение, пересечение, теоретико-множественная разность измеримых множеств является измеримым множеством (неявно это присутствует в свойстве б)). Исходя из указанных свойств мы можем доказать, что любой отрезок измерим и имеет меру 0. Действительно, отрезок длины  $l$  может быть целиком накрыт совокупностью из  $lp$  квадратов со стороной  $1/p$ . Значит, мера отрезка не может превосходить  $lp$ -кратную площадь одного квадрата. С другой стороны, в квадрат со стороной 1 можно уложить без пересечений  $(p-1)^2$  квадратов со стороной  $1/p$ . Значит, квадрат со стороной  $1/p$  имеет площадь  $S_p$  не более  $(p-1)^{-2}$ , а отрезок имеет площадь не выше  $lp(p-1)^{-2}$ . Но чем больше натуральный параметр  $p$ , тем меньше полученная оценка, а при  $p \rightarrow \infty$  она дает 0.

Так как мера любого отрезка равна 0, то мы можем показать, что мера любого квадрата со стороной  $1/p$  в точности равна  $1/p^2$ , так как в квадрате со стороной 1 их можно уложить ровно  $p^2$ , если не принимать во внимание совмещение их границ (границы квадратов имеют меру 0).

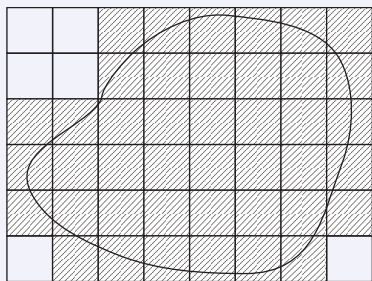


Рис. 1.2

Рассмотрим плоскую ограниченную фигуру  $S$  (рис. 1.1). Для вычисления ее площади нужно покрыть ее сеткой и подсчитать суммарную площадь ячеек сетки, накрывающих фигуру (рис. 1.2). Проще всего, чтобы ячейки сетки были квадратами одинакового размера. Для этого выберем на плоскости систему координат  $Oxy$ , и разделим плоскость на квадраты прямыми  $x = ia$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , и  $y = ja$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Получаем сетку из квадратов со стороной  $a$ . Объединим все квадраты сетки, целиком попавшие в  $S$ . Получим множество  $\underline{S}$ . Часть квадратов не попадает в  $S$ , а накрывается ею частично. Объединим все квадраты, пересекающиеся с  $S$  (но, возможно, не лежащие в  $S$  целиком).

Получим фигуру  $\bar{S}$ . Очевидно, что  $\underline{S} \subset S \subset \bar{S}$ . Поэтому  $\mu(\underline{S}) \leq \mu(S) \leq \mu(\bar{S})$ .

Разобьем каждый квадрат сетки на  $p^2$  частей, проведя дополнительные прямые  $x = ia/p$  и  $y = ja/p$ . Тогда новая сетка образует два множества  $\underline{S}_1$  и  $\bar{S}_1$  из более мелких квадратов, причем  $\underline{S} \subset \underline{S}_1 \subset S \subset \bar{S}_1 \subset \bar{S}$ .

Продолжая процесс измельчения сетки, получим последовательности  $\underline{S} \subset \underline{S}_1 \subset \dots \subset \underline{S}_k \subset \dots$  и  $\bar{S} \supset \bar{S}_1 \supset \dots \supset \bar{S}_k \supset \dots$ . Последовательности  $\{\mu(\underline{S}_n)\}$  и  $\{\mu(\bar{S}_n)\}$  являются монотонными и потому имеют предел, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\underline{S}_n) = \underline{\mu}(S) \leq \bar{\mu}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bar{S}_n).$$

Если величины  $\underline{\mu}(S)$  и  $\bar{\mu}(S)$  совпадают, то их общее значение называют *площадью* или *мерой Жордана* фигуры (множества)  $S$ . Однако эти значения могут не совпадать. Это значит, что фигура  $S$  не имеет площади. Величину  $\underline{\mu}(S)$  называют *внутренней (нижней) мерой Жордана* для множества  $S$ , а величину  $\bar{\mu}(S)$  — *внешней (верхней) мерой Жордана*.

**Замечание.** При построении меры Жордана допущен произвол в выборе системы координат (ориентация и начало отсчета сетки) и в значении параметров  $a, p$  (размер сетки и кратность измельчения). Однако величина площади, как, впрочем, и верхняя и нижняя меры Жордана, не может зависеть от этих параметров. Докажите, что это так. Отметим также, что площадь фигуры можно измерять не только подсчетом квадратов сетки, но и заполнением ее другими простейшими (прямоугольниками, трапециями, треугольниками). Например, площадь криволинейной трапеции измеряется суммой площадей вписанных прямоугольников, что в пределе дает определенный интеграл. И при таком подходе получаем тот же результат (почему?).

**Задача.** Докажите, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

Может получиться так, что множество  $S$  не будет содержать ни одного квадрата сетки, как бы мы ни измельчали ее (например,  $S$  не имеет внутренних точек а потому не может содержать целиком никакого квадрата). Тогда по определению нижняя мера Жордана равна 0. Это, в частности будет, если верхняя мера Жордана равна 0. В последнем случае множество имеет площадь, равную нулю (например, отрезок прямой).

Множества, у которых верхняя мера Жордана равна 0, называют *множествами меры 0*. Если множество  $X$  имеет площадь, то множество  $\partial X$  его граничных точек имеет меру 0. Действительно, построив последовательность фигур  $\{\bar{X}_n\}$  и  $\{\underline{X}_n\}$ , мы получим последовательность множеств  $\Delta X_n = \bar{X}_n \setminus \underline{X}_n$ , покрывающих  $\partial X$ , причем

$$\mu(\Delta X_n) = \mu(\bar{X}_n) - \mu(\underline{X}_n) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Очевидно, верно и обратное утверждение: если граница множества имеет меру 0, то множество измеримо (имеет площадь).

**Пример.** График непрерывной функции имеет меру 0, а фигура, ограниченная графиком функции, осью  $Ox$  и двумя вертикальными прямыми (криволинейная трапеция) измерима.

## 1.2. Двойной интеграл

Пусть функция  $f(x, y)$  от двух переменных определена и ограничена на измеримом (по Жордану) множестве  $S^1$ . Разобьем множество  $S$  на части  $\Delta S_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , измеримые по Жордану, в каждой из них возьмем точку  $\xi_i$  с координатами  $(x_i, y_i)$  и образуем сумму

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \mu(\Delta S_i).$$

Множество  $T$  из всех частей  $\Delta S_i$  называют **разбиением множества  $S$** . Величина

$$d(X) = \max\{AB, A \in X, B \in X\}, \quad (1.1)$$

равная максимально возможному расстоянию между точками множества  $X$  называется **диаметром множества  $X$** . Максимальный из диаметров  $d(\Delta S_i)$  составляющих разбиение  $T$  частей называют **диаметром  $d(T)$  этого разбиения**. Сумма (1.1) — это **интегральная сумма** для функции  $f$ , соответствующая разбиению  $T$ .

Если для любой последовательности разбиений  $T_k$ , удовлетворяющей условию  $d(T_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , существует предел интегральных сумм  $\lim \sigma_k$ , то функция  $f$  называется **интегрируемой на множестве  $S$** . В этом случае предел не зависит от выбора последовательности разбиений (ответьте, почему?). Он называется **интегралом функции  $f$  по множеству  $S$**  и обозначается

$$\iint_S f \, dx dy.$$

## 1.3. Кратный интеграл

Все сказанное обобщается на трехмерный случай. Можно также построить аналогичную теорию в произвольном  $n$ -мерном арифметическом пространстве. В качестве эталона меры рассмотрим множество

$$E = \{(x_1, \dots, x_n): 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\},$$

называемое  **$n$ -мерным единичным кубом**, которому припишем меру ( $n$ -мерный объем) 1. Будем исходить из свойств меры, ранее сформулированных для площади (свойства а)–г)).

Рассмотрим произвольное ограниченное множество  $S \in \mathbb{R}^n$ . Для его измерения построим сетку, проведя гиперплоскости  $x_i = ka$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , параллельные координатным и отстоящие друг от друга на расстояние  $a$ . В результате все пространство разобьется на  $n$ -мерные кубы со стороной  $a$ . Объединение всех кубов, целиком лежащих в  $S$ , обозначим  $\underline{S}$ . Объединение всех кубов, пересекающихся с  $S$ , обозначим  $\bar{S}$ . Ясно, что  $\underline{S} \subset S \subset \bar{S}$ . Объем одного куба равен  $a^n$ , объем множества  $\underline{S}$  или  $\bar{S}$  равен произведению количества кубов сетки, попавших в множество, на величину  $a^n$ . Добавляя новые гиперплоскости (по  $p - 1$  между соседними в сетке), мы получаем более мелкую сетку и новые множества  $\underline{S}_1$  и  $\bar{S}_1$ . Продолжая процесс измельчения сетки, получим последовательности  $\underline{S}_n$  и  $\bar{S}_n$ , причем

$$\begin{aligned} \underline{S}_n \subset \underline{S}_{n+1} & \quad \bar{S}_n \supset \bar{S}_{n+1} \\ n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Пределы

$$\underline{\mu}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\underline{S}_n), \quad \bar{\mu}(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bar{S}_n),$$

существующие в силу монотонности последовательностей, называются, соответственно, **внутренней (нижней) и внешней (верхней) мерами Жордана**. Если внутренняя и внешняя меры Жордана данного множества  $S$  совпадают, то  $S$  называют **измеримым (по Жордану)**, а совпадающее значение — **мерой Жордана**. Если внешняя мера Жордана равна 0, то множество называют множеством меры 0.

<sup>1</sup>Из построения меры Жордана следует, что измеримое множество  $S$  должно покрываться конечным набором квадратов и, следовательно, является ограниченным.

Свойства меры Жордана:

- 1) если  $X_1 \subset X_2$ , то  $\mu(X_1) \leq \mu(X_2)$  и  $\bar{\mu}(X_1) \leq \bar{\mu}(X_2)$ ;
- 2) если  $X$  открыто, то  $0 < \underline{\mu}(X)$ , в общем случае  $0 \leq \underline{\mu}(X) \leq \bar{\mu}(X)$ ;
- 3) если  $X$  имеет меру 0, то любое подмножество  $X$  измеримо и имеет меру 0;
- 4) для любого ограниченного множества  $X$  выполняется равенство  $\bar{\mu}(X) = \bar{\mu}(\bar{X})$ , где  $\bar{X}$  — замыкание  $X$ . В частности, замыкание множества меры 0 есть множество меры 0;
- 5) для любого набора множеств  $X_1, \dots, X_m$  имеет место неравенство

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^m X_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \bar{\mu}(X_i)$$

(полуаддитивность верхней меры). В частности, объединение конечного числа множеств меры 0 есть множество меры 0;

6) ограниченное множество измеримо тогда и только тогда, когда его граница есть множество меры 0;

7) теорема сложения: для измеримых множеств  $X$  и  $Y$

$$\mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y) - \mu(X \cup Y).$$

В частности, мера объединения непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств (аддитивность меры).

Понятие  $n$ -мерного интеграла вводится так же, как и двойной интеграл. Обозначают  $n$ -мерный интеграл как обычный определенный интеграл (специальные обозначения имеются лишь для двойного и тройного интеграла):

$$\int_S f dx$$

Отметим свойства кратного интеграла. Они близки соответствующим свойствам определенного интеграла:

- 1) для любого измеримого множества  $S$   $\int_S dx = \mu(S)$ ;
- 2) если  $S$  — множество меры 0, а функция  $f$  определена и ограничена на  $S$ , то  $f$  интегрируема и  $\int_S f dx = 0$ ;
- 3) если  $S$  — измеримое множество,  $f$  интегрируема на  $S$ ,  $S' \subset S$  измеримо, то  $f$  интегрируема на  $S'$ ;
- 4) линейность интеграла: если функции  $f_1$  и  $f_2$  интегрируемы на измеримом множестве  $S$ , то для любых постоянных  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  функция  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$  интегрируема на  $S$  и

$$\int_S (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) dx = \alpha_1 \int_S f_1 dx + \alpha_2 \int_S f_2 dx;$$

5) произведение интегрируемых на данном множестве функций интегрируемо. Отношение интегрируемых функций интегрируемо, если делитель не принимает значений в некоторой окрестности 0 (т.е. для некоторого  $\varepsilon > 0$  выполняется неравенство  $|g(x)| \geq \varepsilon$ );

6) аддитивность интеграла: если функция  $f$  интегрируема на измеримых непересекающихся (или пересекающихся по множеству меры 0) множествах  $S_1$  и  $S_2$ , то она интегрируема на  $S = S_1 \cup S_2$  и

$$\int_S f dx = \int_{S_1} f dx + \int_{S_2} f dx;$$

7) свойство монотонности: Если  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $S$  и всюду на  $S$  выполняется неравенство  $f(x) \geq g(x)$ , то  $\int_S f dx \geq \int_S g dx$ . В частности, интеграл от неотрицательной функции всегда имеет неотрицательное значение;

8) усиление предыдущего свойства: Если  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $S$  и всюду на  $S$  выполняется неравенство  $f(x) \geq g(x)$ , причем существует внутренняя точка  $x$  множества  $S$ , в которой функции  $f$  и  $g$  непрерывны и удовлетворяют строгому неравенству  $f(x) > g(x)$ , то  $\int_S f dx > \int_S g dx$ ;

9) теорема о среднем: если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $S$ , причем всюду на  $S$  функция  $g$  имеет одинаковый знак, а функция  $f$  удовлетворяет двойному неравенству  $m \leq f(x) \leq M$ , то существует такое число  $\lambda$ ,  $m \leq \lambda \leq M$ , что

$$\int_S fg \, dx = \lambda \int_S g \, dx.$$

В частном случае  $g(x) \equiv 1$  получаем формулу  $\int_S f \, dx = \lambda \mu(S)$ , где  $\lambda$  — *среднее значение функции  $f$  на множестве  $S$* .

Все перечисленные свойства имеют аналоги для определенного интеграла. Однако свойство определенного интеграла, согласно которому интеграл меняет знак при перестановке пределов интегрирования, не распространяется на кратные интегралы.

**Теорема 1.1.** Если ограниченное множество  $S$  измеримо, а функция  $f$  определена и непрерывна на  $S$ , то она интегрируема на  $S$ .

◀ Изложим доказательство кратко. Пусть всюду на  $S$  функция удовлетворяет неравенству  $|f(x)| \leq M$  (ограничена). Построим сетку, покрывающую множество  $S$ . Диаметр сетки определяется ее шагом, так как диаметр куба со стороной  $a$  равен  $a\sqrt{n}$ . Элементами разбиения будут кубы, целиком попавшие в  $S$ , и части кубов, накрываемых  $S$  лишь частично. Последние при достаточно малом шаге сетки имеют малый суммарный объем  $\delta S$ , так как  $S$  измеримо. Вклад этих частей в интегральную сумму мал и не превосходит  $M\delta S$ . Значит, каково бы ни было  $\varepsilon > 0$ , можно выбрать такое  $\delta$ , что при шаге сетки, меньшем  $\delta$ , вклад неполных кубов сетки в интегральную сумму не будет превосходить, скажем,  $\varepsilon/2$ . Займемся остальными кубами. Множество  $\underline{S}$ , составленное из таких кубов, замкнуто и ограничено. Поэтому для выбранного  $\varepsilon$  существует такое число  $\nu$ , что для любых точек  $x_1, x_2 \in \underline{S}$ , для которых  $|x_1 - x_2| < \nu$ , будет выполняться неравенство  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . Тогда для любого разбиения с диаметром не более  $\nu$  интегральная сумма может меняться в пределах интервала длины  $\varepsilon \mu(\underline{S}) \leq \varepsilon \mu(S)$ . Применение критерия Коши завершает доказательство. ▶

**Замечание 1.1.** Этот эскиз доказательства показывает главную трудность в теории кратных интегралов. Если в определенном интеграле интегрирование ведется по простейшему множеству — интервалу (ну, или отрезку), при построении интегральных сумм, интервал интегрирования также разбивается на простейшие составляющие, интервалы, то в случае кратного интеграла это не проходит. Дело в том, что даже на плоскости множество может быть очень причудливым, а интегрирование должно вестись не обязательно по прямоугольнику или многоугольнику. В случае одномерного интеграла, функция, непрерывная на интервале интегрирования может не иметь равномерной непрерывности только из-за поведения в концевых точках интервала. Две точки легко купировать. А уже в двумерном случае таких точек может быть бесконечно много.

**Замечание 1.2.** Интегрируемость функции на множестве зависит от мощности множества ее точек разрыва. Верен такой критерий интегрируемости. Функция интегрируема на ограниченном измеримом множестве  $S$ , если множество ее точек разрыва может быть накрыто конечным или счетным набором кубов (или  $n$ -мерных шаров) сколь угодно малого суммарного объема (такие множества называют множествами лебеговой меры 0). Этот критерий носит название критерия Лебега. Из него, в частности, следует, что функция интегрируема, если множество ее точек разрыва имеет меру 0 по Жордану, т.е. накрывается конечным набором кубов произвольно малого суммарного объема.

# Лекция 2

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Повторные интегралы. Сведение кратного интеграла к повторному. Двойные и тройные интегралы, их вычисление.

Сложность вычисления кратного интеграла в первую очередь определяется формой области интегрирования. Мы сперва остановимся на двойных интегралах.

### 2.1. Двойной интеграл

Изучение вопроса начнем с простейшего двойного интеграла  $\iint_P f(x, y) dx$ , вычисляемого по прямоугольнику  $P$ , который задается неравенствами  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ .

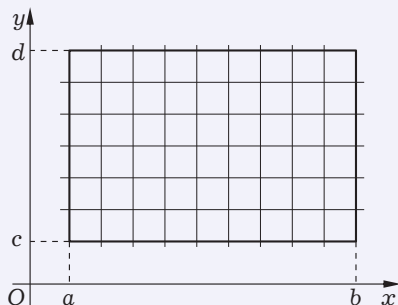


Рис. 2.1

Для построения интегральной суммы выберем разбиение, которое порождается разбиениями отрезка  $[a, b]$  на интервалы  $\Delta x_i$  и отрезка  $[c, d]$  на интервалы  $\Delta y_j$  (рис. 2.1). Элементами такого разбиения являются прямоугольники со сторонами  $\Delta x_i$  и  $\Delta y_j$ . Соответственно, интегральная сумма имеет вид:

$$S = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Эту сумму проще всего вычислять, меняя индексы последовательно или, другими словами, по строкам или столбцам разбиения. Для определенности остановимся на способе суммирования по столбцам. Точки  $\xi_{ij}$  в прямоугольниках выберем так, что одному столбцу соответствует одинаковая абсцисса:  $\xi_{ij} = (x_i, y_{ij})$ . Тогда интегральная сумма примет вид:

$$S = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^q f(x_i, y_{ij}) \Delta y_j \right) \Delta x_i.$$

Внутренняя сумма — интегральная для интеграла от функции  $f(x_i, y)$  одного переменного  $y$  (при фиксированном  $x_i$ ) по отрезку  $[c, d]$ , которая соответствует разбиению этого отрезка на интервалы  $\Delta y_j$ . При достаточно мелком разбиении эта сумма близка к интегралу, а вся интегральная сумма ассоциируется с суммой

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^p \left( \int_c^d f(x_i, y) dy \right) \Delta x_i.$$

Но сумма  $\hat{S}$  в свою очередь является интегральной для интеграла по отрезку  $[a, b]$  от функции

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Поэтому в пределе, когда диаметр разбиения стремится к 0, мы приходим к интегралу

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

в котором для упрощения опускают скобки и записывают так:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

В этой формуле внутренний интеграл вычисляется при постоянном  $x$ , в результате чего получается функция одного переменного  $x$ , которая затем интегрируется уже по оставшейся переменной  $x$ . Эта формула представляет собой *повторный интеграл*.

Наши рассуждения не очень корректны, так как замена в двойной сумме внутренней суммы ее пределом — интегралом — не доказана. Однако точки  $\xi_{ij}$  можно подобрать так, что внутренняя сумма в  $S$  будет в точности равна соответствующему интегралу. Фиксируем абсциссы  $x_i$ . Тогда

$$\int_c^d f(x_i, y) dy = \sum_{j=1}^q \int_{\Delta y_j} f(x_i, y) dy = \sum_{j=1}^q f(x_i, y_{ij}) \Delta y_j,$$

где последнее равенство получено по теореме о среднем (в предположении непрерывности  $f$ ).

Меняя местами порядок переменных, можем получить двойственную формулу:

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

**Замечание.** Если у функции  $f(x, y)$  разделяются переменные:  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ , то

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy = \left( \int_a^b f_1(x) dx \right) \left( \int_c^d f_2(y) dy \right),$$

т.е. двойной интеграл распадается в произведение двух одномерных интегралов.

**Замечание 2.1.** Мы использовали непрерывность подинтегральной функции, однако это требование излишне: полученные формулы сведения двойного интеграла к повторному верны для любой интегрируемой функции.

Перейдем теперь к более общему случаю. Пусть на отрезке  $[a, b]$  заданы две функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$ , причем  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  при  $a \leq x \leq b$ . Область

$$G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

является измеримой, если функции  $\varphi$  и  $\psi$  интегрируемы (почему?). Рассмотрим  $I = \iint_G f(x, y) dx dy$  от какой-либо функции  $f(x, y)$ , определенной в  $G$ .

Обозначим через  $m$  минимальное значение функции  $\varphi$ , через  $M$  — максимальное значение функции  $\psi$ . Тогда область  $G$  целиком попадает в прямоугольник  $P = [a, b] \times [m, M]$ . Доопределим функцию  $f$  во всем прямоугольнике, полагая  $f(x, y) = 0$  на множестве  $P \setminus G$  (рис. 2.2). Доопределенную функцию обозначим  $\hat{f}$ . Эта функция интегрируема на  $P$ , так как множество ее точек разрыва — это множество

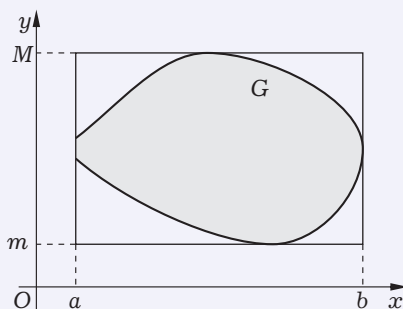


Рис. 2.2

точек разрыва функции  $f$ , дополненное некоторым подмножеством границы области  $G$ . Все вместе будет иметь лебегову меру 0.

Применим полученные ранее результаты к прямоугольнику  $P$  и функции  $\hat{f}$ . Получим:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_P \hat{f}(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_m^M \hat{f}(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Мы опять получили повторный интеграл, но в этот раз пределы интегрирования внутреннего интеграла не являются постоянными, а зависят от переменной внешнего интеграла. Соответствующие функции называют:  $\varphi$  — функция входа,  $\psi$  — функция выхода. Графики этих функций — это, соответственно, нижняя и верхняя части границы области  $G$ .

## 2.2. Общий случай

Подобно тому, как двойной интеграл сводится к повторному, состоящему из двух определенных интегралов, кратный  $n$ -мерный интеграл сводится к повторному, содержащему  $n$  определенных интегралов. Решающей здесь является следующая теорема.

**Теорема 2.1.** Пусть  $G = E \times F$ , где  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F \subset \mathbb{R}^m$ . Если функция  $f(x, y)$ ,  $x \in E$ ,  $y \in F$ , интегрируема на множестве  $G$ , то

$$\int_G f(x, y) dx dy = \int_E dx \int_F f(x, y) dy = \int_F dy \int_E f(x, y) dx.$$

**Замечание 2.2.** Если функция  $f$  имеет точки разрыва, то может получиться так, что внутренний интеграл  $\varphi(x) = \int_F f(x, y) dy$  (или двойственный ему) не будет существовать для некоторых значений  $x$ . Такие точки могут быть устранимыми точками разрыва  $\varphi(x)$  и тогда их наличие не влияет на существование внешнего интеграла. Либо эти точки являются неустранимыми точками разрыва функции  $\varphi(x)$ , но по неявному утверждению теоремы таких точек мало (лебеговой меры 0 в  $\mathbb{R}^n$ ).

Общий случай сводится к рассмотренному в теореме 2.1. В самом деле,

$$\int_G f(x, y) dx dy = \int_E dx \int_{F(x)} f(x, y) dy,$$

где  $E$  — проекция  $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$  на пространство  $\mathbb{R}^n$ ,  $F(x_0)$  — сечение множества  $G$  гиперплоскостью  $x = x_0$ .

## 2.3. Техника вычисления

Остановимся на практическом применении полученных результатов к вычислению кратных интегралов. Остановимся на случаях двойного и тройного интегралов.

**Двойной интеграл.** Мы уже рассмотрели случай, когда область ограничена графиками двух функций одного переменного и, возможно, отрезками двух вертикальных прямых (рис. 2.2). Такую область мы будем называть *стандартной*. В общем случае область может быть разделена на несколько стандартных и интеграл вычисляется с использованием свойства аддитивности интеграла.

**Пример 2.1.** Рассмотрим интеграл

$$\iint_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4} (x + y)^2 dx dy$$

по кольцу  $G$ . Прямыми  $x = -1$  и  $x = 1$  кольцо разделяется на четыре стандартные области  $G_1, G_2, G_3, G_4$  (рис. 2.3). Поэтому

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy + \iint_{G_3} f(x, y) dx dy + \iint_{G_4} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \\ &+ \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

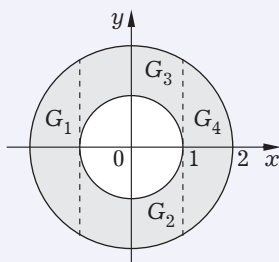


Рис. 2.3

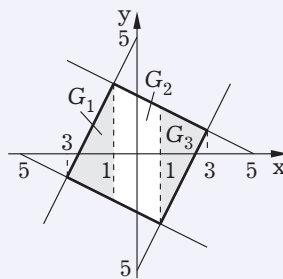


Рис. 2.4

Область интегрирования может быть формально стандартной, но функция входа (или функция выхода) составлена из нескольких функций, определенных на смежных интервалах. И в этом случае для вычисления интеграла нужно исходную область разделить на несколько простых.

**Пример 2.2.** В качестве области рассмотрим прямоугольник  $P$  со сторонами:  $2x - y = 5$ ,  $2x - y = -5$ ,  $x + 2y = 5$ ,  $x + 2y = -5$  (рис. 2.4). Графики функций входа и выхода составлены из двух отрезков каждый. Чтобы вычислить интеграл, можно провести две вертикальные прямые  $x = -1$  и  $x = 1$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \iint_P f(x, y) dx dy &= \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy + \iint_{G_3} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-3}^{-1} dx \int_{-0.5x-2.5}^{2x+5} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-0.5x-2.5}^{-0.5x+2.5} f(x, y) dy + \\ &+ \int_1^3 dx \int_{2x-5}^{-0.5x+2.5} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

**Тройной интеграл.** Применяем общую теорему 2.1. При этом  $E$  и  $F$  могут иметь, соответственно, размерности 1, 2 или 2, 1. Рассмотрим эти два случая

Пусть в  $\mathbb{R}^3$  имеется множество  $G$ . Спроектируем его на ось  $Oz$ , получим отрезок  $[a, b]$ . Для каждого  $z \in [a, b]$  построим сечение тела  $G$  плоскостью, параллельной координатной плоскости  $Oxy$ , которое зависит от выбранного  $z$ , обозначим его через  $S(z)$ . Тогда

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S(z)} f(x, y, z) dx dy.$$

Внутренний двойной интеграл может быть превращен в повторный способом, описанным выше.

**Пример 2.3.** Рассмотрим интеграл по области  $G$ , ограниченной поверхностями  $x^2 + y^2 - z^2 + 2z = 1$  и  $z = 0$ .

Описанное тело представляет собой конус с вершиной в точке  $(0, 0, 1)$  и основанием, лежащим в плоскости  $Oxy$ . Оно описывается неравенствами  $x^2 + y^2 \leq (z - 1)^2$  и  $z \geq 0$ . Проекция на ось  $Oz$  — это множество тех значений  $z$ , при которых система указанных неравенств разрешима относительно  $x$  и  $y$ . Убеждаемся, что проекция есть отрезок  $[0, 1]$ . Плоское множество  $S(z)$  описывается неравенством  $x^2 + y^2 \leq (z - 1)^2$ , в котором  $z$  играет роль параметра. Таким образом,

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{x^2 + y^2 \leq (z-1)^2} f(x, y, z) dx dy.$$

Внутренний интеграл берется по окружности с переменным радиусом  $|z - 1|$ . В данном случае функцией входа будет  $\varphi(x) = -\sqrt{(1-z)^2 - x^2}$ , а функцией выхода —  $\psi(x) = \sqrt{(1-z)^2 - x^2}$ . Окончательный результат:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_{-\sqrt{(1-z)^2 - x^2}}^{\sqrt{(1-z)^2 - x^2}} f(x, y, z) dy.$$

Второй способ состоит в том, чтобы спроектировать тело на координатную плоскость, например,  $Oxy$ . Проекция представляет собой некоторое плоское множество  $S$ . Тогда согласно теореме 2.1

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_S dx dy \int_{I(x,y)} f(x, y, z) dz,$$

где  $I(x, y)$  — сечение тела  $G$  прямой, параллельной координатной оси  $Oz$ . В простейшем случае  $I(x, y)$  — интервал, левый (нижний) конец которого в зависимости от  $x$  и  $y$  представляет собой функцию входа  $\varphi(x, y)$ , а правый (верхний) — функцию выхода  $\psi(x, y)$ . Получаем представление

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_S dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Если множество  $I(x, y)$  для любой пары  $(x, y) \in S$  представляет собой интервал (отрезок), то тело  $G$  называют *стандартным*. В общем случае тело можно разделить на несколько частей, являющихся стандартными, так же, как и в плоском случае. Деление тела на части может понадобиться и в случае, когда оно стандартное, но функции входа и выхода являются составными, т.е. задаются различными формулами в разных частях области определения.

**Пример 2.4.** Для интеграла из предыдущего примера проекцией на плоскость  $Oxy$  будет круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Каждая точка  $(x, y)$  круга определяет сечение конуса по отрезку  $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , т.е. функция входа  $\varphi(x, y) \equiv 0$ , а функция выхода  $\psi(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ . Поэтому

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz.$$

В конечном счете за счет изменения порядка переменных двойной интеграл сводится к повторному двумя способами, а тройной — шестью.

# Лекция 3

## ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Замена переменных в кратном интеграле. Случай двойного и тройного интегралов. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.

### 3.1. Двойной интеграл

Пусть у нас есть кратный интеграл  $\int_G f dx$ , вычисляемый по области (множеству)  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Если имеется взаимно-однозначное отображение  $\varphi : G \rightarrow S$  множества  $G$  на множество  $S$ , то как изменить интеграл при переходе с  $G$  на  $S$ ? Есть по крайней мере два основания для изучения вопроса. Во-первых, сложность вычисления кратного интеграла определяется в первую очередь видом области интегрирования. Если подходящим преобразованием исходную область  $G$  преобразовать в более простую область  $S$  (например,  $n$ -мерный параллелепипед), то вычисление интеграла может упроститься. Во-вторых, преобразование переменных может вызываться переходом к другой системе координат, например, от декартовой к полярной в двумерном случае. В одних случаях удобна одна система координат, а в других — другая. Свобода выбора определяется возможностью преобразования интеграла.

Рассмотрение начнем с простейшего двумерного случая. Пусть имеется прямоугольник  $P = [a, b] \times [c, d]$ , который в результате преобразования

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

сводится к некоторой области  $G$ . Рассмотрим двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  по области  $G$ .

Если преобразование является простейшим — линейным (аффинным):  $\varphi(u, v) = \alpha u + \beta v$ ,  $\psi(u, v) = \gamma u + \nu v$ , — то область  $G$ , получающаяся в результате этого преобразования, будет параллелограммом. Функция  $f(x, y)$  может быть выражена через переменные  $u$  и  $v$ :  $f(x, y) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ , и мы могли бы составить интеграл  $\iint_P f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) du dv$  по исходному прямоугольнику. Однако этот интеграл не совпадает с исходным.

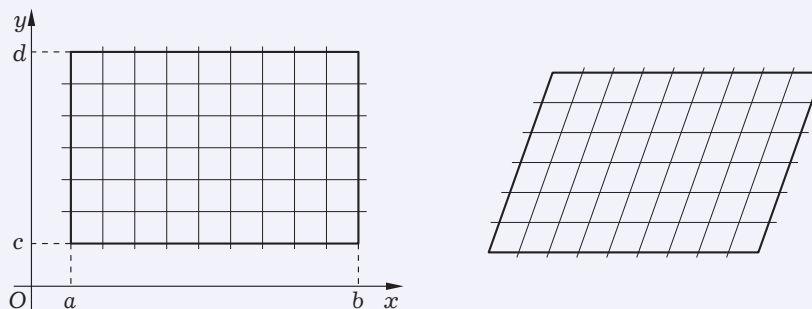


Рис. 3.1

Построим разбиение прямоугольника  $P$  на мелкие прямоугольники  $\Delta P_{ij}$ , разбивая отрезки  $[a, b]$  и  $[c, d]$  на частичные интервалы точками  $x_i$  и  $y_j$  (рис. 3.1). При линейном преобразовании элементы разбиения  $\Delta P_{ij}$  перейдут в параллелограммы  $\Delta G_{ij}$ , образующие разбиение параллелограмма  $G$ . Интегральная сумма, соответствующая полученному разбиению  $G$ , имеет вид

$$\sigma = \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \mu(\Delta G_{ij}).$$

Она может быть преобразована в интегральную сумму для области  $P$

$$\sigma = \sum_{i,j} f(\varphi(u_{ij}, v_{ij}), \psi(u_{ij}, v_{ij})) \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \nu \end{array} \right| \mu(\Delta S_{ij}),$$

где определитель задает отношение площадей параллелограммов  $\Delta G_{ij}$  к прямоугольникам  $\Delta P_{ij}$ .  
Переходя к пределу, в этом аффинном случае получим формулу

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_S f(\alpha u + \beta v, \gamma u + \nu v) \left| \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \gamma & \nu \end{array} \right| dudv$$

В общем случае мелкие прямоугольники разбиения будут преобразовываться в криволинейные фигуры (рис. 3.2). Криволинейные элементы  $\Delta G_{ij}$  будут близки к параллелограммам, если шаг разбиения мал, а функции  $u$  и  $v$  определяют *диффеоморфизм*, т.е. взаимно однозначное отображение  $P \rightarrow G$ , которое в каждой точке имеет ненулевой якобиан. При этом то же верно и для обратного отображения. Локальная замена отображения  $(\varphi, \psi)$  линейным изменит элементы разбиения  $G$ , но незначительно. Если мы пренебрежем этой разницей, то получим:  $\mu(\Delta G_{ij}) \approx J_{ij} \mu(\Delta P_{ij})$ , где  $J_{ij}$  — якобиан, вычисляемый в некоторой точке  $\Delta P_{ij}$ . В пределе можно ожидать получения формулы

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_P f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{array} \right| dudv, \quad (3.1)$$

в которой якобиан вычисляется в точке с координатами  $(u, v)$ .

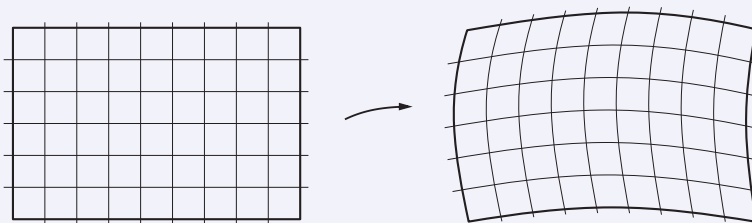


Рис. 3.2

Чтобы формула была верна, замена  $\mu(\Delta G_{ij})$  на  $J_{ij} \mu(\Delta P_{ij})$  должна иметь ошибку, являющуюся бесконечно малой более высокого порядка, чем  $\mu(\Delta P_{ij})$ . Чтобы избавиться от утомительных оценок (детали — в трехтомнике Кудрявцева), используем „обходной маневр“.

Предположим, что диффеоморфизм  $(\varphi, \psi)$  распространяется на некоторую окрестность  $O(P)$  области интегрирования  $P$  в переменных  $(u, v)$ , которая отображается им в окрестность  $U(G)$  области  $G$ . Тогда мы могли бы при необходимости расширить область  $G$ , заменяя ее более простой. Например, если покрыть  $P$  мелкой сеткой, тогда интеграл по  $P$  сводится к сумме интегралов по ячейкам сетки. По ячейкам сетки, накрываемым областью частично, можно брать полный интеграл, доопределяя функцию нулем.

Второе важное следствие — сведение диффеоморфизма произвольного вида к специальному. Остановимся на этом подробнее.

Якобиан  $J(u, v)$ , соответствующий диффеоморфному преобразованию  $(u, v) \rightarrow (x, y)$ , где  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ , отличен от 0. Это значит, что одна из частных производных  $\varphi'_u$  и  $\varphi'_v$ , совместно образующих первую строку определителя, не равна 0. Пусть  $\varphi'_u(u, v) \neq 0$ . Тогда для пары функций  $(\varphi(u, v), v)$  якобиан в точке  $(u, v)$  отличен от 0 и по теореме об обратной функции отображение  $(u, v) \rightarrow (x, v)$ ,  $x = \varphi(u, v)$ , в некоторой окрестности точки  $(u, v)$  является диффеоморфизмом (локальным диффеоморфизмом). Соответствие  $(x, v) \rightarrow (x, y)$  также является локальным диффеоморфизмом как композиция двух диффеоморфизмов. Таким образом, преобразование  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  можно представить как композицию двух простых:  $(u, v) \rightarrow (x, v) \rightarrow (x, y)$ .

Таким образом, нам необходимо проверить формулу только для простого (элементарного) диффеоморфизма, например,  $(u, v) \rightarrow (x, v)$ , где  $x = \varphi(u, v)$ , и для простейшей области  $P$  — прямоугольника. Условие диффеоморфности означает, что всюду в  $P$   $\varphi'_u(u, v) \neq 0$ , а это равносильно монотонности

$\varphi(u, v)$  по переменной  $u$ . Отрезок, получающийся сечением  $P$  прямой  $v = \text{const}$ , перейдет в отрезок  $[u(a, v), u(b, v)]$  той же прямой. Область  $G$  будет ограничена прямыми  $v = c$ ,  $v = d$  и графиками функций  $\varphi(a, v)$ ,  $\varphi(b, v)$ , т.е. будет стандартной.

По материалам лекции 2 и свойствам определенного интеграла:

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, v) dx dv &= \int_c^d dv \int_{\varphi(a, v)}^{\varphi(b, v)} f(x, v) dx = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ x = \varphi(u, v) \end{array} \right| = \\ &= \int_c^d dv \int_a^b f(\varphi(u, v), v) \frac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u} du = \iint_P f(\varphi(u, v), v) \left| \begin{array}{cc} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ 0 & 1 \end{array} \right| dudv. \end{aligned}$$

Выкладка верна, если всюду в прямоугольнике  $P$  производная  $\varphi'_u$  положительна (так как она не обращается в 0, то сохраняет знак). Если же эта производная отрицательна, то в повторных интегралах следует переставить внутренние пределы.

Отметим, что в общем случае преобразование  $(u, v) \rightarrow (x, y)$  является композицией двух, а по теореме о сложной функции многих переменных матрица Якоби представляется в виде:

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_x & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(частная производная  $y_x$  — это производная сложной функции  $\psi(\lambda(x, v), v)$  по  $x$ , где  $\lambda(x, v)$  — это решение уравнения  $\varphi(u, v) = x$  относительно  $u$ , являющееся функцией переменных  $x$  и  $v$ ). Произведению матриц соответствует произведение определителей, и мы окончательно получаем формулу (3.1).

### 3.2. Произвольный кратный интеграл

Все рассуждения переносятся на общий  $n$ -мерный случай. Сформулируем окончательный результат.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\varphi : O \rightarrow U$  — диффеоморфизм из открытого ограниченного множества  $O \subset \mathbb{R}^n$  в открытое ограниченное множество  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{P} \subset O$ ,  $\bar{G} \subset U$  и  $\varphi(P) = G$ . Если функция  $f$  определена на  $G$  и интегрируема, то функция  $(f \circ \varphi) |\det \varphi'|$  определена и интегрируема на  $P$ , причем

$$\int_G f dx = \int_P (f \circ \varphi) |\det \varphi'| du$$

**Замечание 3.1.** Векторная переменная  $x$  пробегает область  $G$ , а переменная  $u$  — область  $P$ . Обозначение  $\varphi'$  использовано для полной производной отображения  $\varphi$ , которая представляет собой матрицу Якоби.

### 3.3. Полярные координаты

Пример использования полученных результатов — вычисление двойного интеграла в полярных координатах. Полярные координаты  $(r, \varphi)$  связаны с декартовыми формулами:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (3.2)$$

Если рассматривать преобразование  $(r, \varphi) \rightarrow (x, y)$  как диффеоморфизм, то

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_G f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

где  $r$  — якобиан отображения (3.2) в точке  $(r, \varphi)$ .

Предположим, что область  $G$  описана в полярных координатах неравенствами  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$ . Тогда

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

### 3.4. Цилиндрические и сферические координаты

Цилиндрические координаты могут интерпретироваться как замена декартовых координат  $(x, y)$  соответствующими им полярными  $(r, \varphi)$ . Соответствующий якобиан равен  $r$ .

**Пример 3.1.** Рассмотрим интеграл от некоторой функции  $f(x, y, z)$  по конусу, ограниченному поверхностями:  $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$ ,  $z = 0$ .

Первый шаг — это разложение тройного интеграла в повторный из двойного и одномерного. Он выполняется обычным образом:

$$I = \iiint_K f dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \leq (1-z)^2} f dx dy.$$

Теперь во внутреннем двойном интеграле расставляются пределы в полярных координатах:

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1-z} f r dr$$

Возможен и второй вариант:

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^{1-r} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz.$$

Формулы преобразования сферических координат в декартовы имеют вид:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = r \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = r \cos \vartheta \end{cases}$$

Прямым подсчетом находим выражение для якобиана этого преобразования:

$$J(r, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{vmatrix} = -r^2 \sin \vartheta.$$

**Пример 3.2.** Рассмотрим в качестве тела интегрирования конус  $K$ , ограниченный поверхностями  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z = 1$ . В сферической системе координат область описывается неравенствами  $\vartheta \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $r \cos \vartheta \leq 1$ . Поэтому

$$\iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos \vartheta}} r^2 \sin \vartheta dr.$$

# Лекция 4

## ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Геометрические приложения двойного и тройного интегралов. Площади и объемы. Механические приложения кратных интегралов. Масса неоднородного тела, координаты центра тяжести, статические моменты, моменты инерции.

### 4.1. Площадь

Площадь плоской области  $G$  вычисляется с помощью двойного интеграла по этой области от функции, равной 1:

$$\mu(G) = \iint_G dx dy.$$

Использование двойного интеграла является более сильным методом, чем различные способы на основе определенного интеграла. В качестве иллюстрации получим некоторые формулы.

Если  $G$  — это криволинейная трапеция, т.е. область, заданная неравенствами  $a \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq f(x)$ , то

$$S = \iint_G dx dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x) dx.$$

Если область представляет собой криволинейный сектор, т.е. ограничена лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и кривой  $r = r(\varphi)$ , то площадь этой фигуры легко вычисляется двойным интегралом в полярных координатах:

$$S = \iint_G dx dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi.$$

**Пример 4.1.** Вычислить площадь, заключенную между кривыми  $xy = 1$ ,  $xy = 2$  и прямыми  $x - 2y = 0$ ,  $2x - y = 0$ .

Область описывается неравенствами  $1 \leq xy \leq 2$  и  $0.5 \leq y/x \leq 2$ . В качестве новых параметров следует выбрать переменные  $u = xy$  и  $v = y/x$ . Тогда в новой системе координат  $(u, v)$  область будет прямоугольником:  $1 \leq u \leq 2$ ,  $0.5 \leq v \leq 2$ . Поэтому

$$S = \iint_S dx dy = \int_1^2 du \int_{0.5}^2 J(u, v) dv,$$

где  $J(u, v)$  — якобиан. Для его вычисления выражаем переменные  $x$  и  $y$  через  $u$  и  $v$ :

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv}, \end{cases}$$

после чего находим:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Теперь получаем окончательный результат:

$$S = \int_1^2 du \int_{0.5}^2 \frac{dv}{2v} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 0.5) = \ln 2.$$

## 4.2. Объем

Вычисление объемов аналогично вычислению площадей. Выигрыш от применения тройного интеграла при этом еще ощутимее.

Предположим, что тело  $G$  имеет простые сечения горизонтальными плоскостями (т.е. параллельными  $Oxy$ ). Спроектируем  $G$  на ось  $Oz$ , тогда

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S(z)} dx dy = \int_a^b S(z) dz.$$

Мы как следствие получили формулу объема по площадям параллельных сечений. Если ось  $Oz$  является осью вращения, то  $S(z)$  — это площадь круга, и мы получаем формулу для объема тела вращения.

Предположим, что тело ограничено цилиндрической поверхностью  $\varphi(x, y) = 0$  и графиком некоторой функции  $z = f(x, y)$ , определенной внутри плоской области, отсекаемой на  $Oxy$  цилиндрической поверхностью. Тогда объем можно вычислять так:

$$V = \iint_S dx dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_S f(x, y) dx dy.$$

Описанное тело называют **цилиндром**. Объем цилиндра можно трактовать как геометрический смысл двойного интеграла: цилиндр является аналогом криволинейной трапеции.

**Пример 4.2.** Вычислим объем шара радиуса  $R$ . Он описывается неравенством  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . Переходя в сферические координаты, получаем

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^R r^2 dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

## 4.3. Механические приложения

Кратные интегралы могут применяться для вычисления различных механических и физических величин.

На основании *плотности* может быть вычислена *масса* объемного тела. Если положение точек описывается их декартовыми координатами в пространстве, а плотность задается как функция трех переменных  $\rho(x, y, z)$ , то масса тела будет определяться интегралом

$$\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Важной характеристикой твердого тела в механике является его **центр тяжести**. В случае, когда тело представляет собой конечную совокупность материальных точек  $P_i(x_i, y_i, z_i)$  с массами  $m_i$ , то координаты центра тяжести вычисляются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i}{M} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i m_i}{M} \quad \bar{z} = \frac{\sum z_i m_i}{M}$$

( $M$  — общая масса тела). Аналогом этих формул в случае протяженного (непрерывного) тела будут формулы

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x\rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y\rho(x, y, z) dx dy dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z\rho(x, y, z) dx dy dz,$$

где  $\rho$  — плотность протяженного тела,  $M$  — масса. Три интеграла, определяющие координаты центра тяжести называют **статическими моментами** твердого тела.

В теории вращения твердого тела важную роль играет момент инерции тела. Для системы материальных точек момент инерции относительно, например, оси  $Oz$  вычисляется по формуле

$$I_z = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) m_i.$$

Его аналогом для протяженного тела является величина

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

где  $\rho$  — плотность твердого тела. Дополнительно рассматривают **моменты инерции относительно координатных плоскостей**:

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad I_{xz} = \iiint_V y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad I_{xy} = \iiint_V z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

С помощью этих величин можно вычислить моменты инерции относительно координатных осей:  $I_x = I_{xy} + I_{xz}$ ,  $I_y = I_{xy} + I_{yz}$ ,  $I_z = I_{xz} + I_{yz}$ . **Момент инерции относительно начала координат** — это сумма трех моментов инерции относительно координатных плоскостей.

#### 4.4. Плоский случай

В специальном случае, когда участвующие в вычислениях функции не зависят от одного из переменных, могут применяться формулы на основе двойного интеграла. Рассмотрим цилиндрическое тело  $G$ , описываемое соотношением  $G = S \times [a, b]$ ,  $S \subset \mathbb{R}^2$ . Если, например, плотность такого тела не меняется вдоль оси  $Oz$ , то вычисление его массы приводит к двойному интегралу:

$$\iiint_G \rho(x, y) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_S \rho(x, y) dx dy = (b - a) \iint_S \rho(x, y) dx dy.$$

К двойным интегралам мы приходим и в случае, когда тело представляет собой тонкую пластинку, т.е. находится в узкой полосе пространства. В этом случае можно пренебречь изменением толщины тела, т.е. считать его цилиндром малой высоты, и изменением плотности вдоль толщины.

# Лекция 5

## НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Кратные несобственные интегралы. Абсолютная сходимость. Интегралы, зависящие от параметра. Пример: вычисление интеграла Пуассона.

**Определение 5.1.** *Исчерпанием множества*  $G \subset \mathbb{R}^n$  называют любую последовательность измеримых множеств  $E_n$ , для которой  $E_i \subset E_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , и  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = G$ .

**Определение 5.2.** Пусть функция  $f$  определена на множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$  и интегрируема на измеримых ограниченных подмножествах в  $G$ . Если для каждого исчерпания  $\{E_i\}$  множества  $G$  существует предел

$$I = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f(x) dx,$$

причем его значение не зависит от выбора исчерпания, то этот предел называют *несобственным интегралом* функции  $f$  по множеству  $G$ . Обозначение:

$$\int_G f(x) dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f(x) dx.$$

Если несобственный интеграл существует, то также говорят, что он *сходится*, в противном случае, что он *расходится*.

Техника исчерпания используется при построении интеграла по неограниченной области или по области, в которой функция неограничена. Предположим, что множество  $G$  является ограниченным и измеримым, а функция  $f$  определена на  $G$  и ограничена. Тогда можно говорить об интеграле в обычном смысле слова (о *собственном интеграле*). Можно также взять какое-либо исчерпание множества и определить несобственный интеграл. Совпадают ли эти интегралы?

**Теорема 5.1.** Если  $\{E_i\}$  — исчерпание измеримого множества  $G$ , то:

- а)  $\mu(E_i) \rightarrow \mu(G)$  при  $i \rightarrow \infty$ ;
- б) Если функция  $f$  интегрируема на  $G$ , то  $f$  интегрируема на каждом множестве  $E_i$  и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f(x) dx = \int_G f(x) dx.$$

◀ Как уже отмечалось, площадь множества не зависит от того, как мы заполняем это множество: строим ли регулярную сетку, вписываем ли многоугольники той или иной формы. Введенное нами понятие исчерпания — еще один способ получения площади множества. Это объясняет (но не доказывает) свойство а).

Свойство б) почти сразу же следует из а). В самом деле, если функция  $f$  интегрируема по множеству  $G$ , то она обязана согласно определению интегрируемости быть ограниченной:  $|f(x)| \leq C$ . Поэтому при  $i \rightarrow \infty$

$$\left| \int_G f(x) dx - \int_{E_i} f(x) dx \right| = \left| \int_{G \setminus E_i} f(x) dx \right| \leq \int_{G \setminus E_i} |f(x)| dx \leq \int_{G \setminus E_i} C dx \leq C \mu(G \setminus E_i) \rightarrow 0. \quad \blacktriangleright$$

## 5.1. Интеграл от неотрицательной функции

Интеграл от неотрицательной функции по своим свойствам близок определенному (одномерному) несобственному интегралу. Дело в том, что если множество  $G$  исчерпывается множествами  $E_i$ , то последовательность интегралов  $\int_{E_i} f(x) dx$  является возрастающей и потому имеет предел, конечный или бесконечный. Оказывается, что этот предел вообще не зависит от выбора исчерпания области, а сходимость интеграла равносильна тому, что конечен предела последовательности интегралов.

**Теорема 5.2.** Если  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , неотрицательна,  $\{E_i\}$  и  $\{E'_i\}$  — два исчерпания множества  $G$ , причем  $f$  интегрируема на каждом элементе каждого из исчерпаний, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f(x) dx = A = B = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E'_i} f(x) dx$$

где  $A$  и  $B$  — числа или символы  $\infty$ .

◀ Положим

$$I_k = \int_{E_k} f dx, \quad I'_k = \int_{E'_k} f dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Нам достаточно показать, что для любых двух исчерпаний  $E_k, E'_k$  и любого номера  $k$

$$I = \lim_{l \rightarrow \infty} I_l \geq I'_k.$$

Так как слева стоит число, то отсюда немедленно следует, что

$$I \geq \lim_{k \rightarrow \infty} I'_k = I'.$$

В силу симметрии должно выполняться и обратное неравенство, т.е. на самом деле  $I = I'$ .

Фиксируем номер  $k$  и обозначим  $F_l = E_l \cap E'_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  Тогда последовательность  $\{F_l\}$  является исчерпанием измеримого множества  $E'_k$ , на котором функция  $f$  интегрируема. Согласно теореме 5.1 имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{F_l} f dx = \int_{E'_k} f dx,$$

откуда, в силу включений  $F_l \subset E_l$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{E_l} f dx \geq \int_{E'_k} f dx,$$

что и требовалось доказать. ▶

**Теорема 5.3 (признак сравнения).** Пусть функции  $f$  и  $g$  определены на множестве  $G \subset \mathbb{R}^n$ , причем  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  на  $G$ .

- Если  $\int_G g(x) dx$  сходится, то и  $\int_G f(x) dx$  сходится.
- Если  $\int_G f(x) dx$  расходится, то и  $\int_G g(x) dx$  расходится.

Доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство аналогичной теоремы для несобственного одномерного интеграла.

## 5.2. Абсолютная сходимость

**Теорема 5.4.** Если  $\int_G |f(x)| dx$  сходится, то и  $\int_G f(x) dx$  сходится.

◀ И в этом случае ничего нового. Достаточно рассмотреть неотрицательные функции  $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$  и  $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ . Тогда  $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ ,  $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$ . Из

интегрируемости функции  $|f(x)|$  следует интегрируемость функций  $f_+(x)$  и  $f_-(x)$ , что в свою очередь приводит к заключению об интегрируемости  $f(x)$ . ►

Интеграл  $\int_G f(x) dx$  называется *сходящимся абсолютно*, если сходится интеграл  $\int_G |f(x)| dx$ . Как говорит теорема 5.4, абсолютная сходимость — более жесткое условие, чем простая сходимость. Оба понятия встречаются в теории несобственных одномерных интегралов, в рядах.

Неожиданным является то, что для кратных интегралов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

**Теорема 5.5.** Если  $\int_G f(x) dx$  сходится, то и  $\int_G |f(x)| dx$  сходится.

Сформулированное свойство — результат требования, чтобы предел последовательности собственных интегралов не зависел от выбора способа исчерпания области интегрирования. В самом деле, пусть у нас есть две последовательности измеримых не пересекающихся областей:  $E_i$ , в которых функция  $f$  положительна, и  $F_j$ , в которых она отрицательна. Исчерпание можно строить, добавляя последовательно множества  $E_i$  и  $F_j$ . Если суммарный интеграл по множествам  $E_i$  расходится, то выбирая в первую очередь именно их, мы можем получить бесконечный предел. Значит, интеграл по  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  от  $f$  сходится, т.е. сходится интеграл по  $G$  от функции  $f_+$ . Отсюда делаем вывод, что и  $f_-$  интегрируема на  $G$ , что приводит к нужному утверждению. Это всего лишь эскиз доказательства. Приведем строгое рассуждение.

◀ Предположим, что  $\int_G |f(x)| dx$  расходится. В дальнейшем для краткости будем обозначать

$$I(F) = \int_F f dx, \quad |I|(F) = \int_F |f| dx.$$

Кроме того, введем функции  $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}$ ,  $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ , так что  $f = f_+ - f_-$  и  $|f| = f_+ + f_-$ . Интегралы от введенных функций будем обозначать так:

$$I_+(F) = \int_F f_+ dx, \quad I_-(F) = \int_F f_- dx.$$

Выберем некоторое исчерпание  $\{E_k\}$ , для которого  $|I|(E_k) \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Мы это исчерпание можем проредить так, что на самом деле выполняется более сильное утверждение, а именно:  $|I|(E_{k+1}) > 3|I|(E_k) + 2k$ . Обозначим  $F_k = E_{k+1} \setminus E_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда  $|I|(F_k) = |I|(E_{k+1}) - |I|(E_k) \geq 2|I|(E_k) + 2k$ . Для каждого номера  $k$  либо  $I_+(F_k)$  превышает  $I_-(F_k)$ , либо наоборот. Пусть для определенности  $I_+(F_k) \geq I_-(F_k)$ . Тогда  $I_+(F_k) \geq 0.5|I|(F_k) \geq |I|(E_k) + k$ . Пусть  $F_k^+$  обозначает подмножество всех точек  $x \in F_k$ , в которых  $f(x) > 0$ . Тогда  $I(F_k^+) = I_+(F_k) \geq |I|(E_k) + k$ . Если  $D_k = E_k \cup F_k^+$ , то  $I(D_k) = I(E_k) + I(F_k^+) \geq I(F_k^+) - |I|(E_k) \geq k$ .

В случае, если  $I_+(F_k) \leq I_-(F_k)$ , мы полагаем  $D_k = E_k \cup F_k^-$ , где  $F_k^-$  — множество всех точек  $x \in F_k$ , в которых  $f(x) < 0$ . Тогда оценка будет иметь вид  $I(D_k) \leq -k$ . В любом случае получаем расходящуюся последовательность  $I(D_k)$ . Множества  $D_k$  удовлетворяют соотношениям  $E_k \subset D_k \subset E_{k+1}$  и потому являются исчерпанием множества  $G$ .

Для завершения доказательства осталось устранить одну неточность. Дело в том, что указанные нами множества  $F_k^+$  (или  $F_k^-$ ) могут не быть измеримыми по Жордану. Поэтому вместо них надо выбирать близкие к ним множества. Отметим, что функция  $f_+$  интегрируема на множестве  $F_k$ . Поэтому можно выбрать настолько мелкое разбиение  $T_i$  для  $F_k$ , что интегральная сумма для  $f_+$  будет отличаться от значения интеграла на малую величину. Это значит, что независимо от выбора точек  $\xi_i$  в  $T_i$

$$\left| \sum_i f_+(\xi_i) \mu(T_i) - I_+(F_k) \right| \leq \varepsilon.$$

Положим, что  $F_k^+$  — это объединение тех элементов  $T_i$  разбиения, во всех точках которых  $f(x) \geq 0$ . В элементах  $T_i$  выберем точки  $\xi_i$ , в которых функция  $f$  принимает минимальное значение (т.е.  $f_+(\xi_i) = 0$ ,

если  $T_i$  не принадлежит  $F_k^+$ ). Тогда

$$I_+(F_k^+) \geq \sum_{T_i \subset F_k^+} f_+(\xi_i) \mu(T_i) \geq \sum_i f_+(\xi_i) \mu(T_i) \geq I_+(F_k) - \varepsilon.$$

Осталось предварительно выбрать  $\varepsilon$  так, чтобы было  $I_+(F_k^+) > 0$ , например,  $\varepsilon = 0.5I_+(F_k)$ . ►

### 5.3. Расстановка пределов в несобственных интегралах

Поскольку несобственный интеграл строится как двукратный переход к пределу (сперва от интегральной суммы к интегралу, а затем к неограниченному множеству), при переходе к повторному интегралу могут появиться трудности.

Рассмотрим простейший пример двойного интеграла  $\iint_G f(x, y) dx dy$  по прямоугольной неограниченной области  $G = [a, b] \times [c, +\infty)$ . Это значит, что для любого исчерпания  $E_k$  области  $G$  существует предел последовательности  $\iint_{E_k} f dx dy$ . В качестве исчерпания рассмотрим последовательность прямоугольников  $E_k = [a, b] \times [c, c + k]$ . Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{E_k} f(x, y) dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_c^{c+k} dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_c^\infty dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

При другом порядке переменных:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b dx \int_c^{c+k} f(x, y) dy = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

Для получения нужного равенства требуется перейти к пределу под знаком интеграла, т.е. нужно выяснить, при каких условиях верно равенство

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(x, T) dx = \int_a^b \lim_{T \rightarrow +\infty} \varphi(x, T) dx$$

Основная проблема состоит в том, что из сходимости двойного интеграла  $\iint_G f(x, y) dx dy$  не следует сходимость несобственного определенного интеграла  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ . Он вполне может расходиться при некоторых значениях  $x$ . Поэтому возникает вопрос о сходимости внешнего интеграла. Если эти проблемы разрешаются, то двойной интеграл будет равен соответствующему повторному интегралу.

О переходе к пределу под знаком интеграла скажем позже. Отметим лишь, что проблемы с существованием повторного интеграла снимаются, если интеграл понимать в более широком смысле как *интеграл Лебега*.

### 5.4. Замена переменных в несобственном интеграле

Для несобственных интегралов верна формула замены переменных.

**Теорема 5.6.** Пусть  $\varphi : F \rightarrow G$  — диффеоморфизм открытого множества  $F \subset \mathbb{R}^n$  на открытое множество  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Если  $\int_F f(x) dx$  сходится, то и  $\int_G (f \cdot \varphi) |\det \varphi'| dt$  сходится и значения этих интегралов совпадают.

**Пример 5.1.** Рассмотрим интеграл

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Вывод:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

**Пример 5.2.** Задача Исследуйте на сходимость

$$\iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^p}.$$

## 5.5. Интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция  $f(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}^m$ , задана на множестве  $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ . Пусть для каждого  $t_0$  сечение  $E_x(t_0) = E \cap \{t = t_0\} = \{(x, t) \in E : t = t_0\}$  является измеримым множеством, на котором функция  $f(x, t_0)$  интегрируема. Тогда на множестве  $E_t$ , являющемся проекцией  $E$  в  $\mathbb{R}^m$  определена функция

$$F(t) = \int_{E_x(t)} f(x, t) dx, \quad (5.1)$$

которую называют *интегралом, зависящим от параметра*. При  $n = 1$  этот интеграл называют *определенным*, иначе — *кратным*. Если для каждого  $t \in E_t$  интеграл (5.1) является собственным, то интеграл с параметром называют *собственным*, иначе — *несобственным*.

В теории интегралов, зависящих от параметра, важнейший вопрос состоит в том, когда операции, выполняемые по переменной  $t$  (интегрирование, дифференцирование, переход к пределу), могут переставляться с интегрированием по переменной  $x$ . Это достаточно большой раздел, и мы не претендуем на его подробное изложение. Мы остановимся на частном случае, когда  $t \in \mathbb{R}$ , а все множества  $E_x(t)$  совпадают, т.е.  $E = E_x \times E_t$ ,  $E_x \subset \mathbb{R}^n$ ,  $E_t \subset \mathbb{R}$ .

**Собственные интегралы с параметром.** Пусть множество  $E_x$  представляет собой ограниченное измеримое множество. Тогда интеграл

$$\int_{E_x} f(x, t) dx$$

является собственным. Если  $E_t$  — это отрезок  $[a, b]$ , то множество  $E$  является измеримым и потому для ограниченной непрерывной функции  $f(x, t)$  определен интеграл

$$\int_E f(x, t) dx dt,$$

который легко сводится к повторному:

$$\int_E f(x, t) dx dt = \int_a^b dt \int_{E_x} f(x, t) dx = \int_{E_x} dx \int_a^b f(x, t) dt.$$

С обозначением (5.1) получаем

$$\int_a^b F(t) dt = \int_{E_x} \left( \int_a^b f(x, t) dt \right) dx.$$

Таким образом, интегрирование по параметру перестановочно с другим интегралом.

Пусть функция  $f(x, t)$  имеет непрерывные частные производные. Если  $\varphi(x, t) = f'_t(x, t)$ , то

$$f(x, t) = f(x, a) + \int_a^t \varphi(x, t) dt.$$

Применяя к функции  $\varphi(x, t)$  правило перестановки интегралов, получим

$$\int_a^t dt \int_{E_x} \varphi(x, t) dx = \int_{E_x} dx \int_a^t \varphi(x, t) dt = \int_{E_x} (f(x, t) - f(x, a)) dx = \int_{E_x} f(x, t) dx - \int_{E_x} f(x, a) dx.$$

Дифференцируя полученное соотношение по  $t$ , получим

$$\int_{E_x} f'_t(x, t) dx = \int_{E_x} \varphi(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{E_x} f(x, t) dx$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_{E_x} f(x, t) dx = \int_{E_x} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx.$$

Для непрерывнодифференцируемой функции операция дифференцирования по параметру может быть внесена под интеграл (перестановочна с интегралом).

Остановимся на вопросе предельного перехода в интеграле с параметром, т.е. на справедливости формулы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) dx. \quad (5.2)$$

Пусть для каждого значения  $t$  из окрестности  $O(t_0)$  параметра  $t_0$  интеграл

$$\int_a^b f(x, t) dx$$

сходится. Пусть существует предел

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = \varphi(x).$$

Формула (5.2) означает перестановку двух пределов местами: по  $t$  и по  $x$  при переходе от интегральной суммы к интегралу. Основанием для такой перестановки является *равномерная сходимость*.

**Определение 5.3.** Пусть функция  $f(x, t)$  определена на множестве  $G = X \times O(t_0)$ . Говорят, что  $f(x, t)$  *равномерно сходится* к  $\varphi(x)$  на множестве  $X$  при  $t \rightarrow t_0$ , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sup_{x \in X} |f(x, t) - \varphi(x)| = 0.$$

Обозначение:  $f(x, t) \xrightarrow[X]{} \varphi(x), t \rightarrow t_0$ .

Равномерная сходимость — более жесткое требование, чем сходимость  $f(x, t)$  к  $\varphi(x)$  для каждого значения  $x \in X$ . На языке „ $\varepsilon$ - $\delta$ “ равномерная сходимость означает, что выбор  $\delta$  не зависит от  $x$ .

В повторном пределе

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$$

пределы можно переставить местами в случае, когда один из них является равномерным (например, если  $f(x, y) \xrightarrow{O(x_0)} \varphi(x)$  при  $y \rightarrow y_0$ ).

**Несобственные интегралы с параметром.** Рассмотрим функцию  $f(x, t)$ , определенную на множестве  $[c, +\infty) \times T$ . Пусть несобственный интеграл

$$\int_c^{+\infty} f(x, t) dx \quad (5.3)$$

сходится для каждого  $t \in T$ .

**Определение 5.4.** Говорят, что несобственный интеграл (5.3) *сходится на множестве  $T$  равномерно*, если

$$\sup_{t \in T} \left| \int_C^{+\infty} f(x, t) dx \right| \rightarrow 0$$

при  $C \rightarrow +\infty$ .

Равномерная сходимость позволяет менять порядок операций по переменным.

**Теорема 5.7.** Если интеграл (5.3) сходится равномерно на множестве  $T = [a, b]$ , то

$$\int_a^b dt \int_c^{+\infty} f(x, t) dx = \int_c^{+\infty} dx \int_a^b f(x, t) dt.$$

**Теорема 5.8.** Если функция  $f(x, t)$  имеет кусочно-непрерывную частную производную  $f'_t(x, t)$  в области  $[c, +\infty] \times [a, b]$ , интегралы (5.3) и

$$\int_c^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx \tag{5.4}$$

сходятся на множестве  $T = [a, b]$  равномерно, то

$$\frac{d}{dt} \int_c^{+\infty} f(x, t) dx = \int_c^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx. \tag{5.5}$$

◀ Так как

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b dt \int_c^{+\infty} f(x, t) dx - \int_c^{+\infty} dx \int_a^b f(x, t) dt \right| = \left| \int_a^b dt \int_c^{+\infty} f(x, t) dx - \int_a^b dt \int_c^C f(x, t) dx \right| = \\ & = \left| \int_a^b \left( \int_c^{+\infty} f(x, t) dx - \int_c^C f(x, t) dx \right) dt \right| \leq \int_a^b \left| \int_c^{+\infty} f(x, t) dx \right| dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a, b]} \left| \int_c^{+\infty} f(x, t) dx \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $C \rightarrow +\infty$ , теорема 5.7 доказана.

В условиях теоремы 5.8, обозначив  $f'_t(x, t) = \varphi(x, t)$ , получим

$$f(x, t) = f(x, a) + \int_a^t \varphi(x, t) dt.$$

Поэтому, применяя теорему 5.7, получим

$$\int_c^{+\infty} f(x, t) dx = \int_c^{+\infty} f(x, a) dx + \int_c^{+\infty} dx \int_a^t \varphi(x, t) dt = \int_c^{+\infty} f(x, a) dx + \int_a^t dt \int_c^{+\infty} \varphi(x, t) dx.$$

Дифференцируя полученное равенство по  $t$ , получим

$$\frac{d}{dt} \int_c^{+\infty} f(x, t) dx = \int_c^{+\infty} \varphi(x, t) dx,$$

что равносильно (5.5). ▶

Условие равномерной сходимости несобственного интеграла необходимо проверять при каждой перестановке операций. Приведем два достаточных условия, гарантирующих равномерную сходимость.

**Теорема 5.9 (Признак Вейерштрасса).** Если  $|f(x, t)| \leq \varphi(x)$ ,  $t \in T$ , причем несобственный интеграл

$$\int_c^{+\infty} \varphi(x) dx \quad (5.6)$$

от неотрицательной функции  $\varphi(x)$  сходится, то интеграл (5.3) сходится на  $T$  равномерно.

◀ Если интеграл (5.6) сходится, то интеграл (5.3) сходится при любом  $t$  абсолютно по признаку сравнения. Кроме того,

$$\int_C^{+\infty} \varphi(x) dx \rightarrow 0$$

при  $C \rightarrow +\infty$ . Поэтому

$$\sup_{t \in T} \left| \int_C^{+\infty} f(x, t) dx \right| \leq \sup_{t \in T} \int_C^{+\infty} |f(x, t)| dx \leq \int_C^{+\infty} \sup_{t \in T} |f(x, t)| dx \leq \int_C^{+\infty} \varphi(x) dx \rightarrow 0$$

при  $C \rightarrow +\infty$ . ▶

**Теорема 5.10.** Пусть функция  $f(x, t)$  неотрицательна и непрерывна в области  $G = [c, +\infty) \times [a, b]$  и интеграл (5.3) сходится для любого  $t \in [a, b]$ , причем получаемая при этом функция  $I(t)$  является непрерывной на  $[a, b]$ . Тогда интеграл (5.3) сходится равномерно на  $[a, b]$ .

# Лекция 6

## КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Масса неоднородной нити. Криволинейный интеграл 1-го рода. Задача о работе переменной силы на криволинейном пути. Криволинейный интеграл 2-го рода. Свойства криволинейных интегралов. Способы вычисления криволинейных интегралов.

### 6.1. Криволинейный интеграл 1-го рода

Предположим, что механическая система представляет собой массу, распределенную по некоторой кривой (тяжелая нить). Распределение массы задано линейной плотностью  $\rho(P)$ , представляющей собой количество массы на единицу длины кривой (рис. 6.1). Чтобы вычислить общую массу, необходимо разбить кривую на  $n$  частей точками  $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$  (точки  $A$  и  $B$  — концы кривой). Считая плотность на каждом участке кривой постоянной, выберем на каждой дуге  $\widehat{P_{k-1}P_k}$  точку  $S_k$  и получим приближенную формулу для общей массы:

$$M = \sum_{k=1}^n \rho(S_k) l(\widehat{P_{k-1}P_k}), \quad (6.1)$$

где  $l(\gamma)$  обозначает длину дуги  $\gamma$ . Точное значение является результатом предельного перехода, когда максимальная длина составляющих дуг стремится к 0.

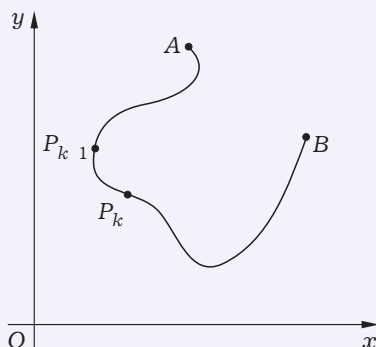


Рис. 6.1

Содержательный смысл функции  $\rho$  на самом деле не важен. Как и ранее набор точек  $P_0, \dots, P_n$ , делящих кривую на  $n$  частей, мы будем называть **разбиением** кривой, максимальную среди длин частей разбиения — **диаметром разбиения**<sup>1</sup>. Сумма (6.1) представляет собой интегральную сумму, а предел интегральных сумм при диаметре разбиения, стремящемся к 0, называют **криволинейным интегралом 1-го рода** и обозначают

$$M = \int_{\gamma} \rho(M) dl$$

Согласно определению криволинейный интеграл можно вычислять только вдоль кривых, для которых корректно определена длина. Напомним, что если кривая  $\gamma$  задана параметрически функциями  $x(t), y(t), z(t), t \in [\alpha, \beta]$ , являющимися непрерывно дифференцируемыми (или кусочно непрерывно

<sup>1</sup>Определение не совсем естественно, так как диаметром было бы естественно назвать максимальное расстояние между точками дуги разбиения. Однако для наших целей оба подхода равноценны, так как с диаметром дуги к 0 стремится и длина этой дуги.

дифференцируемыми), то длина кривой  $\gamma$  определяется интегралом

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Длина  $l(t)$  участка кривой, соответствующего диапазону  $[\alpha, t]$  изменения параметра есть монотонная непрерывно дифференцируемая функция от  $t$  и может быть взята как новый параметр кривой (он называется **натуральным**). Если кривой соответствует натуральный параметр, то, как легко увидеть, интегральная сумма для криволинейного интеграла от функции  $\rho(M)$  совпадает с интегральной суммой определенного интеграла от функции  $\rho(M(l))$ . Таким образом, криволинейный интеграл 1-го рода сводится к обычному определенному интегралу:

$$\int_{\gamma} \rho(M) dl = \int_0^L \rho(M(l)) dl.$$

**Вычисление интеграла 1-го рода.** Пусть кривая  $\gamma$  задана параметрически непрерывно дифференцируемыми функциями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Тогда длина  $l(t)$  дуги кривой, отвечающей диапазону  $[\alpha, t]$  изменения параметра, вычисляется по формуле

$$l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Выполнив в интеграле

$$I = \int_0^L \rho(M(l)) dl$$

замену переменной  $l = l(t)$ , приходим к определенному интегралу

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(M(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

**Свойства интеграла 1-го рода.** Свойства криволинейного интеграла 1-го рода вытекают из соответствующих свойств определенного интеграла:

1) **Линейность:**

$$\int_{\gamma} [\lambda f(M) + \mu g(M)] dl = \lambda \int_{\gamma} f(M) dl + \mu \int_{\gamma} g(M) dl.$$

2) **Аддитивность.** Если кривую  $\gamma$  составить из двух кривых, скажем,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , совместив конец первой с началом второй, то криволинейный интеграл по суммарной кривой равен сумме интегралов по исходным кривым:

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(M) dl = \int_{\gamma_1} f(M) dl + \int_{\gamma_2} f(M) dl.$$

3) Если функция  $f(M)$ , определенная на спрямляемой<sup>2</sup> кривой  $\gamma$ , непрерывна, то криволинейный интеграл от этой функции вдоль  $\gamma$  существует.

4) **Длина кривой:**

$$\int_{\gamma} dl = l(\gamma).$$

<sup>2</sup>Кривую называют спрямляемой, если для нее определена длина.

Принципиальным отличием криволинейного интеграла от определенного является то, что его значение не зависит от направления на кривой, которое может быть задано направлением движения по кривой при возрастании параметра. В этом смысле криволинейный интеграл по отрезку  $[a, b]$ , например, оси абсцисс не есть определенный интеграл по тому же отрезку, так как перестановка пределов интегрирования изменит определенный интеграл, но не изменит криволинейный. При сведении криволинейного интеграла к определенному нижний предел всегда должен быть меньше верхнего.

## 6.2. Криволинейный интеграл 2-го рода

Модифицируем понятие криволинейного интеграла следующим образом. Возьмем опять спрямляемую кривую  $\gamma$  и определенную на ней функцию  $f(M)$ . Выберем разбиение  $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$  кривой на  $n$  дуг. Пусть координаты точки  $P_k$  есть  $(x_k, y_k, z_k)$ . Выберем на дугах  $\widehat{P_{k-1}P_k}$  точки  $S_k$  и составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(S_k) \Delta x_k,$$

где  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Предел интегральных сумм  $\sigma_n$  при диаметре разбиения, стремящемся к 0, если он существует и не зависит от выбора точек  $S_k$ , называют **криволинейным интегралом 2-го рода** от функции  $f(M)$  вдоль кривой  $\gamma$ . Он обозначается так:

$$\int_{\gamma} f(M) dx = \int_{\gamma} f(x, y, z) dx. \quad (6.2)$$

Выбор переменной  $x$  не является преимущественным, и мы с тем же успехом можем построить аналогичные интегралы

$$\int_{\gamma} f(M) dy, \quad \int_{\gamma} f(M) dz.$$

В самом общем случае криволинейный интеграл 2-го рода определяется тремя функциями, скажем,  $f(M)$ ,  $g(M)$ ,  $h(M)$ , заданными на кривой  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} f(M) dx + g(M) dy + h(M) dz.$$

Как возникает подобная конструкция? Рассмотрим следующую механическую задачу. Пусть материальная точка движется по кривой  $\gamma$ , в каждой точке которого задана действующая сила (задано силовое поле). Требуется вычислить работу поля сил.

При постоянной силе  $\mathbf{F}$  и прямолинейном движении работа равна скалярному произведению вектора силы  $\mathbf{F}$  на вектор перемещения  $\mathbf{r}$ :  $A = \mathbf{F}\mathbf{r}$ . В нашем случае выберем разбиение кривой (в тех же обозначениях) и будем считать, что на элементарных дугах перемещение прямолинейное, а сила постоянна. Тогда получаем следующую интегральную сумму:

$$A_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(S_k) \Delta \mathbf{r}_k,$$

где  $\Delta \mathbf{r}_k$  — вектор  $\overline{P_{k-1}P_k}$ . Раскроем скалярное произведение в координатах:

$$A_n = \sum_{k=1}^n [F_x(S_k) \Delta x_k + F_y(S_k) \Delta y_k + F_z(S_k) \Delta z_k].$$

где  $F_x, F_y, F_z$  — координаты вектора  $\mathbf{F}$ . При переходе к пределу, когда диаметр разбиения стремится к 0, получим криволинейный интеграл 2-го рода:

$$A = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

**Свойства интеграла 2-го рода.** Свойства криволинейного интеграла 2-го рода аналогичны свойствам определенного интеграла. Сохраняются его линейность и аддитивность.

В отличие от интеграла 1-го рода значение интеграла 2-го рода зависит от направления, выбранного на кривой:

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{\widehat{BA}} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Это следует из того, что при изменении направления на кривой меняется порядок следования точек разбиения и потому приращения  $\Delta x_k$ ,  $\Delta y_k$ ,  $\Delta z_k$  меняют знак. Изменение знака в интегральной сумме вызывает изменение знака и в интеграле.

Теорема о среднем не переносится на интеграл 2-го рода, а теорема об оценке принимает вид:

$$\left| \int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz \right| \leq \int_{\widehat{AB}} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} dl.$$

Это вытекает из неравенства Коши-Буняковского:

$$|P(S_k)\Delta x_k + Q(S_k)\Delta y_k + R(S_k)\Delta z_k| \leq \sqrt{P^2(S_k) + Q^2(S_k) + R^2(S_k)} \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2}.$$

Бесконечно малая величина  $\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2 + \Delta z_k^2}$  при стремлении диаметра разбиения к 0 эквивалентна длине дуги  $\widehat{P_{k-1}P_k}$ , что приводит к интегралу 1-го рода.

**Вычисление интеграла 2-го рода.** Рассмотрим интеграл (6.2) от функции  $f(M) = f(x, y, z)$  вдоль кривой  $\gamma$ , заданной параметрически при помощи непрерывно дифференцируемых функций:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \nu(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (6.3)$$

Каждой точке  $P_k$  разбиения кривой соответствует некоторое значение параметра  $t_k$ , так что  $t_0 = \alpha$ ,  $t_n = \beta$ . Набор точек  $t_k$  образует разбиение отрезка  $[\alpha, \beta]$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n f(S_k) (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \nu(\tau_k)) (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \nu(\tau_k)) \varphi'(\zeta_k) \Delta t_k. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из интегральной суммы для криволинейного интеграла мы получили нечто очень близкое к интегральной сумме для определенного интеграла. Отличие лишь в том, что значения двух сомножителей подинтегральной функции  $f(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\varphi'(t)$  в нашей сумме берутся в разных точках (точке  $\tau_k$ , соответствующей точке  $S_k$  на кривой, и точке  $\zeta_k$ , появившейся в результате применения теоремы Лагранжа).

Если функция  $f$  непрерывна на кривой  $\gamma$ , то функция

$$F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\varphi'(t)$$

непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$  и потому интегрируема. Взяв разбиение  $t_k$ , а в каждом интервале  $\Delta t_k$  точки  $w_k$  и  $W_k$ , в которых подинтегральная функция достигает на  $\Delta t_k$  соответственно минимума и максимума, полагая  $F(w_k) = m_k$ ,  $F(W_k) = M_k$ , получим, что

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta t_k \leq \sum_{k=1}^n f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k), \nu(\tau_k))\varphi'(\zeta_k) \Delta t_k \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta t_k.$$

Если диаметр разбиения стремится к 0, то по лемме „о двух милиционерах“ заключаем, что предел суммы (6.4) существует и равен определенному интегралу от функции  $F$  по отрезку  $[\alpha, \beta]$ . Таким образом, с учетом симметрии, мы доказали следующее.

**Теорема 6.1.** Если кривая  $\gamma$  задана параметрически в виде (6.3) непрерывно-дифференцируемыми функциями, функции  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  определены на  $\gamma$  и непрерывны, то криволинейный интеграл существует и

$$\int_{\gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\nu'(t)] dt.$$

Если параметром кривой является одна из координат, то вычисление криволинейного интеграла упрощается. Пусть кривая  $\gamma$  описывается двумя функциями  $y = \varphi(x)$ ,  $z = \psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Тогда

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = \int_a^b f(x, \varphi(x), \psi(x)) dx,$$

т.е. в криволинейном интеграле надо переменные  $y$  и  $z$  выразить через  $x$ .

Если кривая  $\gamma$  лежит в плоскости, перпендикулярной оси  $Ox$ , то для любой функции  $f$ , определенной на кривой,

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = 0.$$

Это следует из того, что при любом разбиении  $\gamma$  разности  $\Delta x_k$  будут равны 0.

**Связь интегралов 1-го и 2-го рода.** Рассмотрим интеграл (6.2) вдоль кривой, заданной параметрически в виде (6.3) при помощи непрерывно дифференцируемых функций. Тогда

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \nu(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + \psi'(t)^2 + \nu'(t)^2} \cos \alpha dt,$$

где

$$\cos \alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{(\varphi'(t))^2 + \psi'(t)^2 + \nu'(t)^2}}$$

представляет собой направляющий косинус касательного вектора кривой  $\gamma$ , имеющего координаты  $(\varphi'(t), \psi'(t), \nu'(t))$ . Таким образом,

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) dx = \int_{\gamma} f(x, y, z) \cos \alpha dl$$

и вообще

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl.$$

# Лекция 7

## ФОРМУЛА ГРИНА

Формула Грина. Случай односвязных и многосвязных областей. Вычисление площади плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла 2-го рода.

### 7.1. Интеграл по замкнутому контуру

(*Замкнутым*) *контуром* называют кривую, у которой совпадают начало и конец. Если кривая задана параметрически отображением  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , то она является контуром, если  $r(a) = r(b)$ . Если при этом отображение  $r$ , скажем, на полуинтервале  $[a, b)$  является взаимно-однозначным, то контур не имеет точек самопересечения и называется *простым*. Контур можно рассматривать как отображение окружности в трехмерное пространство. Этим подчеркивается, что выбор начала-конца контура не является существенным.

Мы остановимся на плоском случае, когда контур лежит целиком в плоскости. Можно считать, что плоскость контура — это координатная плоскость  $Oxy$ . Простой контур  $\gamma$  на плоскости разрезает ее на две области, одна из которых является ограниченной. Сам контур является общей границей этих двух областей (*теорема Жордана*).

Интеграл по замкнутому контуру строится стандартным образом, однако при этом на контуре необходимо выбрать начальную точку, чтобы можно было рассматривать контур как частный случай кривой. Выбор начальной точки оказывается несущественным.

**Теорема 7.1.** Значение криволинейного интеграла 1-го рода не зависит от выбора начальной точки.

◀ Пусть точки  $A$  и  $B$  лежат на контуре  $\gamma$ . Сам контур можно рассматривать как объединение (сумму) двух кривых — дуг  $m$  и  $l$  контура, соединяющих точки  $A$  и  $B$  (рис. 7.1). В силу аддитивности интеграла для любой функции  $f$ , определенной на контуре, получаем

$$\int_{AmBA} f ds = \int_{AmB} f ds + \int_{BBA} f ds = \int_{BBA} f ds + \int_{BAmB} f ds = \int_{BAmB} f ds$$

( $ds$  — дифференциал длины вдоль контура). ▶

Интеграл 2-го рода зависит от ориентации кривой, т.е. от выбора направления движения по кривой. В общем случае направление движения указывается порядком конечных точек (какая начальная, какая конечная). Но для контура такое определение ориентации не подходит. Направление обхода может быть задано выбором на контуре трех точек и заданием порядка их обхода. Например, если выбраны точки  $A, B, C$ , то их обход в порядке  $ABC, BCA, CAB$  определяет одно и то же направление, а обход в порядке  $ACB, CBA, BAC$  определяет противоположное направление.

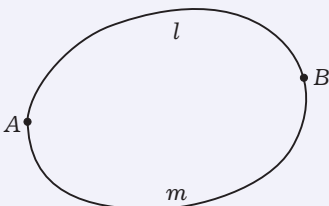


Рис. 7.1

Отметим, что простой контур, расположенный на плоскости, разделяет плоскость на две области, одна из которых ограничена. Ориентация такого контура может быть определена следующим образом. **Положительным направлением** движения по простому контуру считают такое, при котором ограниченная область по ходу движения остается слева. Вариант этого правила: движение по контуру идет против часовой стрелки. Если не оговорено противное, то интеграл 2-го рода по контуру вычисляется в предположении положительного направления обхода.

**Теорема 7.2.** Значение криволинейного интеграла 2-го рода не зависит от выбора начальной точки.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 7.1. Вместе эти две теоремы позволяют не учитывать положение начальной точки и рассматривать контур как непрерывное инъективное отображение окружности в  $\mathbb{R}^2$ .

**Замечание.** Для криволинейных интегралов по замкнутому контуру имеется специальное обозначение:

$$\oint_{\gamma} f ds.$$

## 7.2. Формула Грина

**Теорема 7.3 (формула Грина).** Если измеримая ограниченная область  $G$  ограничена простым (кусочно-гладким) контуром  $\gamma$ , функции  $P$  и  $Q$  определены и непрерывно дифференцируемы в  $G$  и в окрестности каждой точки  $M \in \gamma$ , то

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (7.1)$$

**Замечание.** Границу области  $G$  обозначают, как правило, символом  $\partial G$ . Поэтому формулу (7.1) можно записать так:

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

◀ Формула Грина на самом деле заключает в себе две различные формулы:

$$\int_{\gamma} P dx = - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \quad \int_{\gamma} Q dy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

Обе формулы симметричны. Поэтому достаточно ограничиться одной из них. Для определенности выберем первую из них.

Построим кривую  $l$ , лежащую в области  $G$  за исключением своих концевых точек, которые расположены на  $\gamma$ . Такая кривая (называемая **разрезом**) разделяет область  $G$  на две подобласти  $G_1$  и  $G_2$  (рис. 7.2). Тогда

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_{G_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy + \iint_{G_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \quad \int_{\gamma} P dx = \int_{\partial G_1} P dx + \int_{\partial G_2} P dx.$$

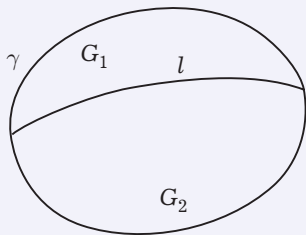


Рис. 7.2

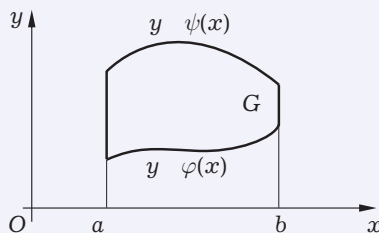


Рис. 7.3

Это соображение позволяет ограничиться рассмотрением областей специального вида, которые являются стандартными<sup>1</sup> по переменной  $y$ . В этом случае область описывается неравенствами  $a \leq x \leq b$ ,  $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ , а кривую  $\gamma$  составляют графики функций  $\varphi$  и  $\psi$  плюс, возможно, один-два

<sup>1</sup>Если кривая  $\gamma$  описывается непрерывно дифференцируемым отображением  $r$ , причем касательный вектор  $r'(t)$  ни в одной точке не является нулевым, то ее локально можно представить как график функции  $y(x)$  или  $x(y)$ . Разбиение же можно выполнять горизонтальными и вертикальными прямыми. В общем случае кривую  $\gamma$  следует заменить близкой кусочно гладкой, например, ломаной. Доказательство завершается предельным переходом.

отрезка вертикальных прямых (рис. 7.3). Поэтому, учитывая положительное направление вдоль  $\gamma$  и то, что криволинейный интеграл  $\int P dx$  вдоль вертикального отрезка равен 0, получим

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx = \int_{\Gamma(\varphi)} P(x, y) dx - \int_{\Gamma(\psi)} P(x, y) dx = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) - P(x, \psi(x))] dx. \quad (7.2)$$

С другой стороны, двойной интеграл превращается в повторный, причем внутренний интеграл легко вычисляется:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))] dx. \quad (7.3)$$

Сравнивая формулы (7.2) и (7.3), получаем формулу Грина. ►

Двумерная область может быть ограничена несколькими простыми непересекающимися контурами (например, кольцо). Такая область называется **многосвязной**. Количество ограничивающих контуров определяет **связность** области. Если контур один, то область **односвязна**, два контура — двусвязна (кольцо) и т.д.

Среди контуров, ограничивающих многосвязную область  $G$  один является внешним, остальные — внутренними. Внешний контур ограничивает область, в которую  $G$  входит как часть. Все внутренние контуры расположены внутри внешнего. Обход контуров, ограничивающих  $G$ , выполняется так, что область находится слева. Это значит, что внешний контур обходится против часовой стрелки, а внутренние — по часовой (рис. 7.4).

Формула Грина обобщается на случай многосвязной области. Под интегралом по границе такой области понимается сумма криволинейных интегралов по контурам границы с учетом положительного направления обхода, т.е. против часовой стрелки для внешнего и по часовой для внутренних.

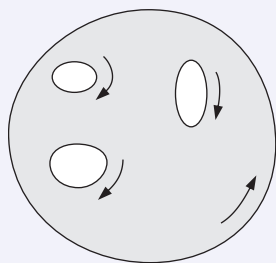


Рис. 7.4

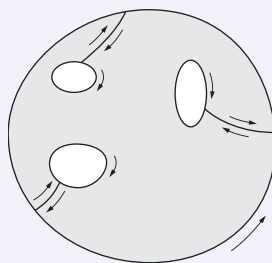


Рис. 7.5

**Теорема 7.4 (обобщенная формула Грина).** Если многосвязная область  $G$  ограничена несколькими простыми (кусочно гладкими) контурами, то Если измеримая ограниченная область  $G$  ограничена несколькими простыми (кусочно гладкими) контурами, функции  $P$  и  $Q$  определены и непрерывно дифференцируемы в окрестности  $\bar{G}$ , то

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

◀ Утверждение сводится к случаю односвязной области. Действительно, соединим каждый внутренний контур с внешним при помощи гладкого разреза (рис. 7.5). Тогда область  $G$  превратится в односвязную область  $G'$ , двойной интеграл по которой совпадает с интегралом по исходной области ( $G$  получается из  $G'$  добавлением множества меры 0). При проходе границы области  $G'$  контуры  $\partial G$  проходятся в положительном направлении, но, кроме того, добавленные разрезы проходятся дважды в противоположных направлениях. Поэтому

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \int_{\partial G'} P dx + Q dy. \quad \blacktriangleright$$

### 7.3. Вычисление площадей при помощи криволинейных интегралов

Площадь области, ограниченной простым контуром, может быть вычислена при помощи криволинейного интеграла. Это удобно, когда граница области задана параметрически, так как вычисление двойного интеграла наталкивается на определенные трудности, а криволинейный интеграл вычисляется самым естественным образом.

Подберем функции  $P$  и  $Q$ , определенные в  $G$ , так, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1.$$

Тогда по формуле Грина

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \mu(G).$$

Наиболее простыми являются варианты  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = 0$  и  $P(x, y) = 0$ ,  $Q(x, y) = x$ . В результате получаем формулы

$$\mu(G) = \int_{\partial G} x dy = - \int_{\partial G} y dx.$$

**Пример 7.1.** Рассмотрим область  $G$ , ограниченную астроидой

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

(рис. 7.6). Переменные друг через друга могут быть выражены, но неоднозначно и достаточно сложной формулой. Используя криволинейный интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \mu(G) = \int_{\partial G} x dy &= \int_0^{2\pi} \cos^3 t d(\sin^3 t) = 3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t dt = \left. \begin{array}{l} \text{подинтегральная} \\ \text{функция имеет} \\ \text{период } \pi/2 \end{array} \right| = \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 2t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) \sin^2 2t dt = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$

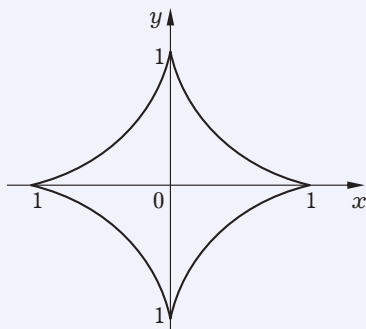


Рис. 7.6

# Лекция 8

## ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Полный дифференциал и криволинейный интеграл от полного дифференциала. Формула Ньютона — Лейбница для криволинейных интегралов. Восстановление функции по ее полному дифференциалу. Случай многосвязной области, циклические постоянные.

### 8.1. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути

Предположим, что функции  $P$  и  $Q$  определены и непрерывны в некоторой открытой области  $G$  плоскости, существует криволинейный интеграл

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy$$

по любой кривой  $\gamma$  в  $G$ , причем значение интеграла зависит только от конечных точек кривой. Это значит, что если произвольные кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  соединяют точки  $A$  и  $B$  и целиком лежат в  $G$ , то

$$\int_{\gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\gamma_2} P dx + Q dy.$$

Фиксируем точку  $M_0(x_0, y_0)$  в  $G$ . Тогда для любой точки  $M(x, y) \in G$  интеграл

$$F(x, y) = \int_{M_0}^M P dx + Q dy, \quad (8.1)$$

взятый вдоль какой-либо кривой, соединяющей  $M_0$  с  $M$ , не зависит от выбора кривой, но лишь от конечной точки  $M$ , т.е. этот интеграл является функцией в области  $G$ . Отметим, что изменение „стартовой“ точки  $M_0$ , скажем, на  $M'_0$ , изменяет функцию  $F(x, y)$ , добавляя к ней константу, равную

$$\int_{M'_0}^{M_0} P dx + Q dy.$$

Знание функции  $F$  позволяет легко вычислить криволинейный интеграл по координатам конечных точек  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ :

$$\int_{M_1}^{M_2} P dx + Q dy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1). \quad (8.2)$$

Формула (8.2) является прямым обобщением формулы Ньютона — Лейбница для определенного интеграла. Поэтому она сама называется **формулой Ньютона — Лейбница**, а функция  $F$  — **первообразной для криволинейного интеграла**. Естественно возникает вопрос о нахождении первообразной.

**Теорема 8.1.** Если функции  $P$  и  $Q$  непрерывны в области  $G$ , а интеграл (8.1) не зависит от пути, соединяющего точки  $M_0$  и  $M$ , то:

- определяемая интегралом функция  $F$  является дифференцируемой в  $G$ ;
- частные производные функции  $F$  связаны с подынтегральными функциями  $P$  и  $Q$  формулами:  
 $F'_x(x, y) = P(x, y), F'_y(x, y) = Q(x, y).$

◀ Возьмем произвольную точку  $M(x, y)$  и дадим приращения независимым переменным, т.е. выберем близкую к  $M$  точку  $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . Тогда

$$\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \int_{M_0}^{M'} P dx + Q dy - \int_{M_0}^M P dx + Q dy = \int_M^{M'} P dx + Q dy.$$

Теперь вычислим частные производные функции  $F(x, y)$ . Имеем

$$F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \int_x^{x+\Delta x} P(\xi, y) d\xi$$

(интеграл берется по отрезку горизонтальной прямой), откуда, дифференцируя определенный интеграл по переменному верхнему пределу, находим

$$F'_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial \Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(\xi, y) d\xi = P(x, y).$$

Двойственное соотношение  $F'_y(x, y) = Q(x, y)$  находится аналогично. Так как при этом частные производные непрерывны, то функция является дифференцируемой. ▶

Теорема 8.1 утверждает, что если интеграл не зависит от пути, то подынтегральное выражение представляет собой дифференциал некоторой функции, а именно дифференциал первообразной подынтегрального выражения. Вообще, выражение вида  $P dx + Q dy$  называют дифференциалом, а если этот дифференциал является дифференциалом некоторой функции, то его называют **полным**. Таким образом, интеграл не зависит от пути, если его дифференциал является полным. Верно и обратное утверждение.

**Теорема 8.2.** Если дифференциал криволинейного интеграла является полным, то криволинейный интеграл не зависит от пути.

◀ Пусть в области  $G$  выполняются соотношения  $P(x, y) = F'_x(x, y)$ ,  $Q(x, y) = F'_y(x, y)$ . Выберем произвольную кусочно-гладкую кривую  $\gamma$ , связывающую точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ . Пусть кривая задается параметрически функциями  $\varphi, \psi$ , определенными на отрезке  $[\alpha, \beta]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P dx + Q dy &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [F'_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + F'_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(F(\varphi(t), \psi(t))) dt = F(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - F(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Мы получили, что интеграл равен разности значений функции  $F$  и не зависит от пути. ▶

## 8.2. Условия независимости интеграла от пути

Из предыдущего пункта следует, что задачи проверки: а) является ли дифференциал полным; б) зависит ли криволинейный интеграл от пути — являются эквивалентными. Фактически это разные формулировки одной и той же задачи.

**Теорема 8.3.** Пусть функции  $P$  и  $Q$  определены и непрерывно-дифференцируемы в открытой области  $G$ . Тогда если криволинейный интеграл  $\int P dx + Q dy$  не зависит от пути, то

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

◀ Утверждение следует из теоремы о равенстве смешанных производных:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Для равенства смешанных производных достаточно их непрерывности, т.е. в нашем случае непрерывности частных производных  $P'_y$  и  $Q'_x$ . ▶

Обратное утверждение „в полном объеме“ не выполняется. Отметим, что независимость интеграла от пути равносильна тому, что интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

Если функции  $P$  и  $Q$  непрерывно дифференцируемы в открытой области  $G$  и  $Q'_x \equiv P'_y$  в  $G$ , то локально обеспечивается независимость интеграла от пути. Пусть  $M_0(x_0, y_0)$  выбрана в  $G$  произвольно. Тогда некоторая окрестность  $O_\delta(M_0) = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(M_0, M) < \delta\}$  целиком попадает в  $G$ . Если две кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  связывают каждую точку  $M_0$  с некоторой точкой  $M_1 \in O_\delta(M_0)$ , то кривая  $\gamma_1 - \gamma_2$  (сперва проходит кривая  $\gamma_1$ , а затем  $\gamma_2$  в обратном направлении), является контуром, целиком лежащим в  $O_\delta(M_0)$ . Он, возможно, имеет самопересечения и тогда распадается на несколько контуров без самопересечений, *внутренность каждого из которых целиком лежит в  $O_\delta(M_0)$*  (принципиальный момент!). Применив к каждому такому контуру формулу Грина, получим, что интеграл равен 0. Но это равносильно утверждению, что интегралы по  $\gamma_1$  и по  $\gamma_2$  совпадают.

Глобально замкнутый контур может охватить область, которая не принадлежит целиком  $G$ , если  $G$  не является односвязной. Односвязность  $G$  равносильна тому, что любой контур в  $G$  без самопересечений охватывает область, целиком попадающую в  $G$ . Поэтому в этом случае проходят вышеприведенные рассуждения.

Резюмируя, приходим к следующему результату.

**Теорема 8.4.** Если функции  $P$  и  $Q$  определены и непрерывно дифференцируемы в односвязной области  $G$ , причем  $Q'_x(x, y) = P'_y(x, y)$  всюду в  $G$ , то дифференциал  $P dx + Q dy$  является полным и, следовательно, соответствующий криволинейный интеграл не зависит от пути.

### 8.3. Циклические постоянные

Рассмотрим один специальный случай неодносвязной области — проколотый круг  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < r^2\}$ . Пусть функции  $P$  и  $Q$  удовлетворяют условиям теоремы 8.4 для области  $G$ . Тогда в силу обобщенной формулы Грина, примененной к кольцу  $\rho_1^2 < x^2 + y^2 < \rho_2^2 < r^2$ , заключаем, что интеграл по любой окружности имеет одно и то же значение, которое мы обозначим  $\varkappa$  (предполагаем обход окружности против часовой стрелки).

Рассмотрим некоторый контур  $\gamma$  без самопересечений. Если его внутренность не содержит выколотой точки  $O(0, 0)$ , то к нему применима формула Грина и соответствующий интеграл равен 0. Если же он охватывает точку  $O$ , то его значение равно  $\pm \varkappa$ , знак определяется направлением обхода.

Если контур в  $G$  имеет самопересечения, то его можно представить как сумму нескольких контуров без самопересечений. Тогда значение интеграла равно  $n\varkappa$ , где  $n$  — некоторое целое число. Это число показывает **кратность обхода** контуром особой точки  $O$  с учетом направления обхода. Например, для контура на рис. 8.1 значение интеграла равняется  $2\varkappa$ .

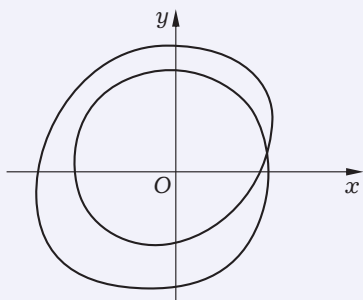


Рис. 8.1

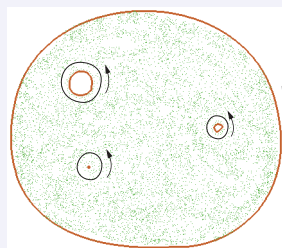


Рис. 8.2

Величина  $\varkappa$ , играющая такую важную роль в значении интеграла по замкнутому контуру, называется **циклической постоянной**.

Наш частный случай распространяется на общий. Пусть область  $G$  ограничена конечным числом кусочно гладких контуров, некоторые из которых, возможно, вырождаются в точку (рис. 8.2). Вычислим интеграл по каждому внутреннему контуру границы, обходя его против часовой стрелки. Получим набор значений  $\varkappa_1, \dots, \varkappa_m$  — циклических постоянных для области  $G$ . Значение любого интеграла по замкнутому контуру в  $G$  может быть представлено в виде  $n_1 \varkappa_1 + \dots + n_m \varkappa_m$ . Числа  $n_i$  показывают кратность обхода каждого внутреннего контура границы. В частности, обобщенная формула Грина равносильна утверждению, что интеграл по внешнему контуру области равен сумме всех циклических постоянных.

### 8.4. Трехмерный случай

На трехмерный случай переносятся утверждения теорем 8.1 и 8.2. Если функции  $P, Q, R$  определены и непрерывны в трехмерной открытой области  $G$ , то интеграл

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

не зависит от пути в области  $G$ , если и только если выражение  $P dx + Q dy + R dz$  является дифференциалом некоторой функции  $F(x, y, z)$ , т.е., по нашей терминологии, полным дифференциалом. Функция  $F(x, y, z)$  определяется с точностью до постоянной и равна значению интеграла

$$\int_{M_0}^M P dx + Q dy + R dz$$

от некоторой фиксированной точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  до точки  $M(x, y, z)$ .

Если  $F'_x = P, F'_y = Q, F'_z = R$ , то по теореме о равенстве смешанных производных получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Эти равенства являются необходимыми. Они достаточны для того, чтобы дифференциал был полным, если на область наложить некоторые ограничения, аналогичные односвязности. Но для получения нужного результата необходим трехмерный аналог формулы Грина.

**Замечание.** Функция  $F$ , для которой выражение  $P dx + Q dy + R dz$  является полным дифференциалом, является решением системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R,$$

которая, как можно показать, имеет решение локально при выполнении необходимых условий. Указанное соображение представляет собой второй способ доказательства критерия полноты дифференциала.

# Лекция 9

## ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Односторонние и двусторонние поверхности. Поверхностный интеграл 1-го рода и его вычисление. Свойства интеграла 1-го рода. Поверхностный интеграл 2-го рода и его вычисление. Формула Стокса. Формула Остроградского — Гаусса.

Изучение поверхностных интегралов начнем с одной практической задачи. Пусть требуется найти массу тонкой искривленной пластинки  $S$ , в каждой точке которой задана *поверхностная плотность*  $\rho$ . Как и ранее, пластинку делим на мелкие части  $\Delta S_i$ , а затем составляем интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^m \rho_i \mu(\Delta S_i),$$

где  $\mu(\Delta S_i)$  — площадь поверхности  $\Delta S_i$ , а  $\rho_i$  — средняя плотность  $i$ -й части, в качестве которой можно взять значение в какой-либо точке  $\Delta S_i$ . Точное значение есть результат предельного перехода в интегральной сумме при неограниченном измельчении разбиения.

Это рассуждение требует осмысления понятия „площадь поверхности“.

### 9.1. Площадь поверхности

Площадь поверхности основывается на предположении, что в малом поверхность „почти плоская“. Поверхность может быть задана параметрически как отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Пусть поверхность  $S$  задается тремя функциями

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \chi(u, v). \end{cases} \quad (9.1)$$

определенными в двумерной области  $G$  и непрерывно дифференцируемыми. Пусть отображение  $G \rightarrow S$ , заданное этими функциями является взаимно однозначным. Тогда параметры  $u$  и  $v$  можно трактовать как координаты на поверхности  $S$ .

Разобьем область  $G$  прямоугольной сеткой на части  $\Delta G_i$ . Тогда каждому прямоугольнику разбиения соответствует элемент разбиения  $\Delta S_i$  поверхности  $S$  (рис. 9.1). Так как функции  $\varphi, \psi, \chi$  непрерывно дифференцируемы, поверхность  $S$  имеет в каждой точке касательную плоскость, которая может быть задана парой касательных векторов  $(\varphi'_u, \psi'_u, \chi'_u)$  и  $(\varphi'_v, \psi'_v, \chi'_v)$ . Можно показать (с помощью теоремы о неявной функции), что если указанные векторы не коллинеарны, то локально отображение  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  взаимно-однозначно. Естественно предполагать, что это требование выполняется всюду в  $G$ .

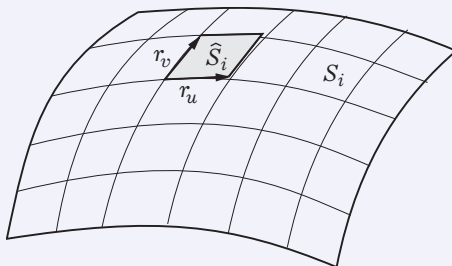


Рис. 9.1

В каждом элементе разбиения  $\Delta G_i$  области  $G$  выберем точку  $(u_i, v_i)$ . Пусть  $\Delta \hat{S}_i$  — проекция элемента  $\Delta S_i$  на плоскость  $\pi_i$ , касающуюся  $S$  в точке  $M_i$  с криволинейными координатами  $(u_i, v_i)$  (т.е. точке, которая является образом точки  $(u_i, v_i)$  при отображении  $G \rightarrow S$ ). Составим сумму

$$\sigma = \sum_i \mu(\Delta \hat{S}_i) \quad (9.2)$$

по всем элементам разбиения. Отметим, что граница элемента  $\Delta\hat{S}_i$  состоит из дуг четырех непрерывно дифференцируемых кривых, являющихся образами границ прямоугольника. Можно показать, что в этом случае этот элемент является измеримым множеством и потому сумма составлена корректно<sup>1</sup>.

Если сумма (9.2) имеет предел, когда диаметр разбиения стремится к 0, то этот предел называют *площадью поверхности*  $S$ .

В качестве точки  $(u_i, v_i)$  возьмем нижний левый угол прямоугольника  $\Delta G_i$ . Наряду с проекцией  $\Delta\hat{S}_i$  элемента  $\Delta S_i$  на касательную плоскость рассмотрим лежащий в этой плоскости параллелограмм, образованный касательными векторами  $\mathbf{r}_u = (\varphi'_u, \psi'_u, \chi'_u)$  и  $\mathbf{r}_v = (\varphi'_v, \psi'_v, \chi'_v)$ . Этот параллелограмм является линеаризацией криволинейного четырехугольника  $\Delta\hat{S}_i$  и отличается от последнего на величину большего порядка малости, чем площадь каждого из них. Поэтому в сумме (9.2) можно площади криволинейных четырехугольников заменить площадями параллелограммов. Но площадь параллелограмма вычисляется через векторное произведение. Получим следующую сумму:

$$\hat{\sigma} = \sum_i |\mathbf{r}_u(u_i, v_i) \times \mathbf{r}_v(u_i, v_i)| \Delta u_i \Delta v_i.$$

При переходе к пределу мы получим двойной интеграл

$$\mu(S) = \iint_G |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| du dv, \quad (9.3)$$

который и равен площади поверхности  $S$ . Точный результат следующий.

**Теорема 9.1.** Пусть поверхность  $S$  задана параметрически уравнениями (9.1) при помощи непрерывно дифференцируемых функций с областью определения  $G$ , причем ранг матрицы Якоби отображения в каждой точке в  $G$  равен 2 (т.е. максимален). Тогда для поверхности  $S$  определена площадь  $\mu(S)$ , которая может быть вычислена по формуле (9.3).

**Пример 9.1.** Рассмотрим сферу радиуса  $R$ . При помощи сферических координат она может быть задана уравнениями

$$\begin{cases} x = R \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y = R \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = R \cos \vartheta. \end{cases}$$

Интересующие нас векторы имеют вид

$$\mathbf{r}_\vartheta = R(\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)^T, \quad \mathbf{r}_\varphi = R(-\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, 0)^T.$$

Поэтому площадь сферы равна

$$\mu(S) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi |\mathbf{r}_\vartheta \times \mathbf{r}_\varphi| d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 4\pi R^2.$$

**Замечание.** Если поверхность представляет собой график некоторой функции двух переменных  $z = f(x, y)$ , то в качестве координат на поверхности удобно взять пространственные координаты  $x$  и  $y$ . В этом случае векторы  $\mathbf{r}_x$  и  $\mathbf{r}_y$  имеют вид  $\mathbf{r}_x = (1, 0, f'_x)$ ,  $\mathbf{r}_y = (0, 1, f'_y)$ . Их векторное произведение равно

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f'_x, -f'_y, 1).$$

Учитывая это заключаем, что если функция  $f$  непрерывно дифференцируема, то ее график над измеримой плоской областью  $G$  имеет площадь

$$S = \iint_G \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} dx dy.$$

<sup>1</sup>Если  $G$  не является прямоугольником, то на границе  $G$  элементы разбиения имеют криволинейные граничные дуги. Поэтому строгие рассуждения требуют/т доказать, что при непрерывно дифференцируемом отображении измеримое плоское множество перейдет снова в измеримое.

## 9.2. Поверхностный интеграл

Поверхностный интеграл определяем в соответствии с примером, рассмотренным в начале лекции. Пусть поверхность  $S$  имеет площадь (т.е. измерима по Жордану). Пусть на поверхности  $S$  задана некоторая непрерывная функция  $f$ . Разобьем поверхность  $S$  на измеримые элементы  $\Delta S_i$ . Выберем в каждом таком элементе точку  $N_i$  и составим сумму

$$\sigma(T) = \sum_i f(N_i) \mu(\Delta S_i),$$

которую называют *интегральной*. Если интегральная сумма стремится к некоторому пределу  $I(G)$ , когда диаметр разбиения стремится к 0, и если этот предел не зависит от выбора точек  $N_i$ , то его называют *поверхностным интегралом* и обозначают

$$\iint_S f(M) ds. \quad (9.4)$$

**Теорема 9.2.** Пусть поверхность  $S$  задана параметрически уравнениями (9.1) при помощи непрерывно дифференцируемых функций с областью определения  $G$ , причем ранг матрицы Якоби отображения в каждой точке в  $G$  равен 2 (т.е. максимален). Тогда для любой непрерывной функции  $f$ , определенной на этой поверхности, существует поверхностный интеграл (9.4), который может быть вычислен по формуле

$$\iint_S f(M) ds = \iint_G f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| dudv. \quad (9.5)$$

**Замечание.** Отметим важный частный случай, когда поверхность  $S$  является графиком непрерывно дифференцируемой функции  $z = \varphi(x, y)$ . В этом случае формула (9.5) сводится к следующей:

$$\iint_S f(M) ds = \iint_G f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dudv.$$

## 9.3. Свойства поверхностного интеграла

По своим свойствам поверхностный интеграл близок к криволинейному интегралу 1-го рода, являясь, по существу, его двумерным аналогом. Отметим важнейшие: а) линейность, б) аддитивность, в) теорема об оценке интеграла (в частности, интеграл от неотрицательной функции всегда неотрицателен, а если подынтегральная функция непрерывна, то положителен). Эти свойства, как и ранее, являются следствием свойств интегральных сумм, сохраняющихся при предельном переходе от суммы к интегралу.

## 9.4. Поверхностный интеграл 2-го рода

Пусть у нас в пространстве задано поле скоростей текущей жидкости (или газа). Важной характеристикой процесса является количество жидкости, проходящей через ту или иную поверхность в пространстве. Например, количество жидкости, протекающей через сферу, говорит о том, какова мощность источников внутри сферы.

Выберем поверхность  $S$  в пространстве и предположим, что в каждой точке  $M \in S$  задан единичный вектор  $\mathbf{n}(M)$  нормали к поверхности, причем функция  $\mathbf{n}$ , являющаяся отображением с поверхности  $S$  в пространство  $\mathbb{R}^3$ , т.е. вектор-функцией, непрерывна на поверхности  $S$ . Построим разбиение поверхности на элементы  $\Delta S_i$ , в каждом элементе выберем точку  $N_i$ . Если элемент  $\Delta S_i$  достаточно мал, то перенос жидкости через этот элемент приближенно равен скалярному произведению  $\rho \mu(\Delta S_i) \mathbf{v}(N_i) \mathbf{n}(N_i)$  вектора скорости  $\mathbf{v}(N_i)$  на вектор нормали  $\mathbf{n}(N_i)$  частиц жидкости в районе  $\Delta S_i$ ,

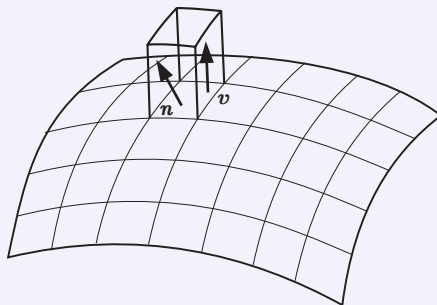


Рис. 9.2

умноженному на площадь элемента разбиения (рис. 9.2) и на плотность  $\rho$ . Суммируя результаты по всем элементам разбиения, получим интегральную сумму

$$\sigma = \rho \sum_i \mathbf{v}(N_i) \mathbf{n}(N_i) \mu(\Delta S_i).$$

В предельном переходе при диаметре разбиения, стремящемся к 0, мы получим поверхностный интеграл вида

$$M = \rho \iint_S \mathbf{v} \mathbf{n} dS. \quad (9.6)$$

Полагая, что вектор  $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  выражен через свои направляющие косинусы, вектор  $\mathbf{v} = (P, Q, R)$  также записан в координатах, получаем координатное представление интеграла (9.6):

$$M = \rho \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \quad (9.7)$$

Интеграл (9.7) — это поверхностный интеграл, но он играет особую роль. В нем в качестве элементов подынтегрального выражения участвуют направляющие косинусы нормали. Во-первых, не для всякой поверхности можно выбрать непрерывную нормаль. Пример — небезызвестный лист Мебиуса, на котором не существует непрерывного поля нормали. Выбор нормали фактически означает выбор стороны поверхности. Различают поверхности двусторонние (например, сфера) и односторонние (лист Мебиуса). Интеграл (9.7) можно корректно определить только для двусторонних поверхностей.

Во-вторых, сторона поверхности может быть выбрана двумя способами. Изменение стороны поверхности означает изменение знака у нормали и в конечном счете изменение знака интеграла. В рассмотренной задаче выбираемая нормаль означает положительное движение жидкости (например, для сферы может быть движение изнутри наружу и наоборот).

Выбор стороны у двусторонней поверхности по-иному называют выбором ее *ориентации*. Таким образом, интеграл (9.7) берется по ориентированным поверхностям. В этом смысле он ближе к криволинейному интегралу 2-го рода. Его и называют *поверхностным интегралом 2-го рода* в отличие от интеграла (9.4), который называют *поверхностным интегралом 1-го рода*.

## 9.5. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

Интеграл 2-го рода может быть вычислен как и любой поверхностный интеграл по формуле (9.5). Однако следует учесть, что выбор координат на поверхности (ее параметризации), например,  $u$  и  $v$ , означает и выбор ее ориентации, так как вектор  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$  нормален к поверхности, а для получения единичной нормали достаточно его разделить на длину  $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ . В результате из формулы (9.6) получаем

$$\iint_S \mathbf{v} \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{v} \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} dS = \iint_S \mathbf{v} (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dudv = \iint_S \begin{pmatrix} P & Q & R \\ \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} dudv,$$

где определитель выражает смешанное произведение трех векторов.

Наиболее просто поверхностный интеграл считается, когда координатами на поверхности являются две пространственные координаты. Например, если это координаты  $x$  и  $y$ , то

$$\iint_S R \cos \gamma \, dS = \iint_S R \cos \gamma \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \pm \iint_{\text{пр}_{Oxy} S} R(x, y, z(x, y)) \, dx dy.$$

В интеграле выбирается знак  $+$ , если направление нормали совпадает с направлением оси  $Oz$  (точнее, угол между этими направлениями острый). Это аналогично вычислению криволинейного интеграла 2-го рода по графику функции одной переменной. В связи с этим для указанного интеграла используется обозначение

$$\iint_S R \cos \gamma \, dS = \iint_S R \, dx dy.$$

Учитывая оставшиеся две составляющие, получим

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS = \iint_S P \, dy dz + Q \, dz dx + R \, dx dy.$$

## 9.6. Связь поверхностного интеграла с криволинейным и тройным

В интегральном исчислении важнейшую роль играют две формулы, которые аналогичны формуле Грина. Первая связывает поверхностный интеграл 2-го рода с криволинейным, а вторая — с тройным.

Пусть имеет двусторонняя поверхность  $S$ , на которой расположен простой контур  $\gamma$ . Этот контур ограничивает часть поверхности. Мы будем считать, что он проходится в таком направлении, что ограниченная им часть поверхности находится слева, если смотреть с выбранной стороны поверхности.

**Теорема 9.3 (формула Стокса).** Если функции  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  определены на поверхности  $S$  и непрерывно дифференцируемы, то для простого гладкого контура  $\gamma$ , расположенного на поверхности  $S$  ( $\text{int } \gamma$  — область, ограниченная контуром  $\gamma$ ) верно равенство

$$\oint_{\gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_{\text{int } \gamma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \, dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \, dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx dy.$$

◀ Формула Стокса линейна относительно входящих в нее трех функций. Поэтому она сводится к трем симметричным вариантам:  $(P, 0, 0)$ ,  $(0, Q, 0)$  и  $(0, 0, R)$ . В силу симметрии достаточно рассмотреть один из этих вариантов. Поэтому мы остановимся на доказательстве формулы

$$\oint_{\gamma} P \, dx = \iint_{\text{int } \gamma} \frac{\partial P}{\partial z} \, dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx dy.$$

Формула Стокса также аддитивна, т.е. если она верна для каждой из нескольких подобластей, на которые разделена область  $\text{int } \gamma$ , то она верна и для всей области. Это происходит потому, что поверхностные интегралы по прилегающим областям складываются, а интегралы по границам подобластей внутри  $\gamma$  взаимно уничтожаются, так как соответствующие кривые проходятся дважды в противоположных направлениях. Здесь повторяется та же ситуация, что и в формуле Грина.

Эти два рассуждения позволяют ограничиться случаем, когда поверхность  $S$  задана параметрически в виде (9.1). Так как соответствие между поверхностью  $S$  и областью  $G$  в переменных  $u$ ,  $v$  является взаимно однозначным и непрерывно дифференцируемым, контур  $\gamma$  соответствует контур  $C$  в плоскости  $uv$ , который описывается функциями  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Легко убеждаемся, что интеграл по  $\gamma$  транслируется в интеграл по  $C$  на плоскости  $uv$ :

$$\oint_{\gamma} P \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t)) (x'_u u'(t) + x'_v v'(t)) \, dt =$$

$$= \oint_C P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \varphi'_u du + P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \varphi'_v dv. \quad (9.8)$$

Поверхностный интеграл по  $\text{int } \gamma$  также может быть преобразован в двойной интеграл по области  $\text{int } C$ :

$$\iint_{\text{int } \gamma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_{\text{int } C} \begin{pmatrix} 0 & P'_z & P'_y \\ \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix} dudv, \quad (9.9)$$

Остается к правым частям формул (9.8) и (9.9) применить формулу Грина, чтобы убедиться в их равенстве. ►

**Следствие.** Если всюду в односвязной области  $G \subset \mathbb{R}^3$  выполняются условия

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

то значение интеграла

$$\int_A^B P dx + Q dy + R dz$$

не зависит от пути, соединяющего точки  $A$  и  $B$  и целиком лежащего в  $G$ .

◀ В самом деле, достаточно доказать, что интеграл по любому замкнутому контуру в  $G$  равен 0. На простой контур  $\gamma$  натягиваем поверхность  $S$ , целиком лежащую в  $G$ . Тогда по формуле Стокса заключаем, что интеграл по  $\gamma$  должен равняться 0. ►

**Замечание.** Понятие „трехмерная односвязная область“ надо понимать так, что любой простой контур является границей некоторой поверхности, лежащей в этой области. В этом смысле область между двумя концентрическими сферами — односвязная область, а тор — нет.

**Теорема 9.4 (формула Остроградского — Гаусса).** Пусть трехмерная область  $G$  ограничена гладкой поверхностью  $S$ . Если функции  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  определены и непрерывно дифференцируемы в  $G$  и на  $S$ , то

$$\oiint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

◀ Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство формулы Грина. Опять-таки, формула Остроградского линейна относительно тройки функций, и мы можем остановиться на частном случае, когда  $P \equiv 0$ ,  $Q \equiv 0$ . Формула Остроградского аддитивна, и мы можем ограничиться случаем стандартной области, которая ограничена графиками двух функций  $z = \varphi_1(x, y)$  (снизу) и  $z = \varphi_2(x, y)$  (сверху). Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz &= \iint_{G_{xy}} dxdy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{G_{xy}} R(x, y, \varphi_2(x, y)) dxdy - \iint_{G_{xy}} R(x, y, \varphi_1(x, y)) dxdy = \oiint_S R(x, y, z) dxdy, \end{aligned}$$

где  $G_{xy}$  — проекция области  $G$  на плоскость  $Oxy$ . ►

## Лекция 10

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Основные понятия теории поля. Скалярное поле и его характеристики. Векторное поле. Векторные линии и трубки. Дифференциальные уравнения векторных линий. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля. Формула Стокса. Вихрь (ротор) векторного поля и его свойства. Поток векторного поля. Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского — Гаусса. Формулы для вычисления дивергенции и ротора векторного поля.

### 10.1. Скалярные и векторные поля

Формулы для вычисления кратных, криволинейных и поверхностных интегралов громоздки и недостаточно удобны. Их можно упростить, если использовать векторную форму записи. Кроме того, векторные понятия имеют более наглядный смысл, так как берут свое начало в математических приложениях (механика, физика).

Простейшими математическими величинами, которыми оперируют в механике и физике, являются скаляры и векторы. Если в некоторой трехмерной области  $G$  в каждой точке определен скаляр (т.е. число), то говорят, что в  $G$  задано **скалярное поле**. Таким образом, скалярное поле — это функция точки, имеющая скалярные значения. Введя в пространстве систему координат, мы можем описывать точки тройками чисел. Соответственно, скалярное поле будет описываться функцией трех переменных. Короче говоря, скалярное поле с математической точки зрения есть скалярная функция от трех переменных.

Аналогично, если в каждой точке области  $G$  определен вектор, то говорят, что в  $G$  задано **векторное поле**. В заданной системе координат векторное поле описывается отображением  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  или тремя скалярными функциями от трех переменных.

Для представления скалярного поля используют его **поверхности уровня**, т.е. поверхности, на которых поле имеет постоянное значение. Если скалярное поле описывается функцией  $F(x, y, z)$ , то его поверхности уровня описываются уравнениями  $F(x, y, z) = C$ , где  $C$  — постоянная, конкретное значение которой определяет конкретную поверхность уровня. Через каждую точку проходит поверхность уровня, и при том только одна. Это значит, что область „расслаивается“ на поверхности уровня скалярного поля.

Если в некоторой (декартовой) системе координат скалярное поле описывается функцией  $F(x, y, z)$ , то вектор  $(F'_x, F'_y, F'_z)$ , координатами которого являются частные производные функции  $F$ , вычисленные в данной точке, имеет особое значение. Он показывает в данной точке направление наибольшего роста функции. В силу этого его выбор не связан с выбором системы координат, так как направление наибольшего роста не зависит от системы координат. Этот вектор называют **градиентом скалярного поля** и обозначают  $\text{grad } F$ . Так как градиент может быть вычислен в любой точке области определения скалярного поля, то мы, по-существу, получаем **векторное поле градиента**. Градиент в каждой точке перпендикулярен (ортогонален) поверхности уровня.

**Пример 10.1.** Рассмотрим поле температур  $U$  в пространстве. Тепло в пространстве движется в сторону убывания температуры, причем тем быстрее, чем быстрее убывает температура. Поэтому градиент температурного поля противоположен вектору потока тепла, так как вектор  $-\text{grad } U$  показывает направление наибольшего убывания температуры. Так как величина потока тепла пропорциональна скорости убывания температуры, получаем формулу для **векторного поля потока тепла**:  $\mathbf{q} = -k \text{grad } U$ .

### 10.2. Векторные трубки

Если скалярное поле характеризуется поверхностями уровня, то векторное поле может характеризоваться **векторными линиями**. Если векторное поле представляет собой поле скоростей текущей жидкости, то векторная линия указывает траекторию движения частиц жидкости. Эта траектория ха-

характеризуется тем, что в каждой ее точке вектор поля касается кривой (вектор поля попросту является вектором скорости движущейся частицы).

Пусть в области  $G$  задано векторное поле  $\mathbf{v}$ . Пусть в этой области параметрически задана кривая  $\gamma$  в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(\tau) \\ y = \psi(\tau) \\ z = \chi(\tau) \end{cases}$$

Тогда вектор с координатами  $\{\varphi'(\tau), \psi'(\tau), \chi'(\tau)\}$  является касательным к кривой. Если  $\gamma$  является векторной линией для  $\mathbf{v}$ , то этот вектор должен быть касателен к вектору  $\mathbf{v}(\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau))$ . Записав условие коллинарности:

$$\varphi'(\tau) = \lambda v_x(\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau)), \quad \psi'(\tau) = \lambda v_y(\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau)), \quad \chi'(\tau) = \lambda v_z(\varphi(\tau), \psi(\tau), \chi(\tau)),$$

где  $v_x, v_y, v_z$  — координаты векторного поля. Эти уравнения означают, что параметрически заданная кривая является решением системы дифференциальных уравнений

$$x' = \lambda v_x(x, y, z), \quad y' = \lambda v_y(x, y, z), \quad z' = \lambda v_z(x, y, z),$$

Коэффициент  $\lambda$  связан с выбором параметризации кривой (иными словами, со скоростью прохождения кривой). Избавляясь от него, приходим к уравнениям

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

которые называют **уравнениями векторных линий**.

Если поверхность  $S$  такова, что в каждой точке вектор  $\mathbf{v}$  касается этой поверхности, то ее называют **векторной поверхностью**. Векторная поверхность характеризуется тем, что если векторная линия начинается на этой поверхности, то она все время остается на ней. Векторную поверхность можно получить, если выбрать кривую  $\gamma$ , не являющуюся векторной линией, а затем образовать поверхность из всех векторных линий, пересекающих  $\gamma$ . Если кривая  $\gamma$  представляет собой простой контур, то построенную таким образом векторную поверхность называют **векторной трубкой** (рис. 10.1).

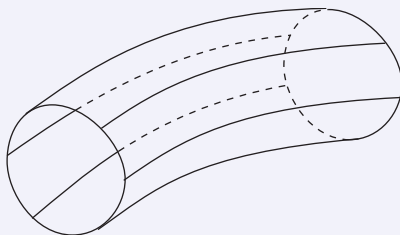


Рис. 10.1

### 10.3. Линейный интеграл и поток

Пусть в области  $G \subset \mathbb{R}^3$  задано векторное поле  $\mathbf{a}$  с координатами  $a_x, a_y, a_z$  в данной системе координат. Криволинейный интеграл

$$\int_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{\gamma} \mathbf{a} dr$$

на самом деле от системы координат не зависит, что и фиксирует его новая запись. В векторном анализе его называют **линейным интегралом**. Новая, векторная форма записи подчеркивает физическую интерпретацию этого интеграла как работу силового поля  $\mathbf{a}$  при перемещении материальной точки единичной массы.

Если линейный интеграл вычисляется по контуру, т.е. кривая  $\gamma$  замкнута, то его называют **циркуляцией векторного поля**.

Поверхностный интеграл 2-го рода

$$\iint_S a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS$$

называют **поток векторного поля через поверхность  $S$** . Физический смысл этого интеграла — количество жидкости, протекающей через площадку, если векторное поле представляет собой поле скоростей текущей жидкости. Альтернатива — явления переноса, например, тепла, газа, заряда и т.п.

## 10.4. Вихрь и формула Стокса

Циркуляция является протяженной характеристикой, но если контур исчезающе мал, то циркуляция уже характеризует поведение поля в окрестности точки. Пусть контур  $\gamma$  расположен в плоскости с единичным вектором нормали  $\mathbf{n}$ . Тогда по формуле Стокса

$$\oint_{\gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \oint_{\gamma} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint_{\text{int } \gamma} \left[ \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) n_x + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) n_y + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) n_z \right] dS$$

При фиксированном векторе нормали  $\mathbf{n}$  полученный поверхностный интеграл имеет предел при стягивании контура в точку, равный скалярному произведению  $\mathbf{bn}$  вектора

$$\mathbf{b} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

на вектор нормали. Этот вектор в теории поля называют **вихрем** или **ротором** векторного поля  $\mathbf{a}$ . Обозначение:  $\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}$ . Вихрь векторного поля  $\mathbf{a}$  с учетом правил раскрытия определителей может быть вычислен по формуле

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

где „умножение“, например,  $\frac{\partial}{\partial x}$  на  $a_y$  означает взятие соответствующей частной производной.

Хотя вихрь определен в координатной форме, на самом деле выбор системы координат не является существенным, так как проекции этого вектора

$$(\text{rot } \mathbf{a})_{\mathbf{n}} = \lim_{\mu(S_n) \rightarrow 0} \frac{\int_{S_n} \mathbf{a} d\mathbf{r}}{\mu(S_n)}$$

( $S_n$  — площадка, перпендикулярная вектору  $\mathbf{n}$ ) не зависят от какой-либо системы координат.

Формула Стокса принимает вид

$$\oint_{\gamma} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \iint_{\text{int } \gamma} \mathbf{n} \text{rot } \mathbf{a} dS,$$

в котором ее чаще всего и используют.

## 10.5. Дивергенция и формула Остроградского

Поток, также являясь интегральной, протяженной характеристикой, в пределе приводит к локальной характеристике. Пусть векторное поле гладко в области  $G$ . Выберем в  $G$  некоторый объем  $V$ , ограниченный гладкой поверхностью  $\partial V$ . Применим к нему формулу Остроградского:

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{a} n dS = \oiint_{\partial V} a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy = \iiint_V \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

В пределе, когда диаметр объема  $V$  стремится к 0, полученный тройной интеграл сходится к значению подинтегральной функции, если, конечно, эта функция непрерывна. Величина

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

вычисленная в точке, называется **дивергенцией векторного поля  $\mathbf{a}$**  в этой точке и обозначается  $\operatorname{div} \mathbf{a}$ . Другое определение дивергенции вытекает из формулы Остроградского:  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  — это число, равное

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\partial V} \mathbf{a} n dS}{\mu(V)}$$

(поток на единицу объема). Эта формула показывает, что дивергенция не связана с выбором системы координат. С учетом введенного понятия формула Остроградского принимает вид

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{a} n dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dv,$$

где  $dv$  — дифференциал объема,  $dv \equiv dx dy dz$ .

# Лекция 11

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Потенциальное векторное поле и его свойства. Соленоидальное векторное поле и его свойства. Гармоническое (лапласово) поле и его свойства. Оператор Гамильтона и его применение в теории поля. Векторные дифференциальные операции второго порядка.

### 11.1. Векторные дифференциальные операции 2-го порядка

Вихрь и дивергенция являются дифференциальными операциями, которые выполняются над векторными полями. Над скалярными полями может выполняться одна операция: взятие градиента. Эти три операции могут выполняться последовательно в определенных комбинациях, причем некоторые комбинации приводят к тривиальным результатам, а некоторые — к *дифференциальным операциям второго порядка*.

Если исходный объект является скалярным полем, то первой операцией, которую к нему можно применить — это градиент. Далее возможны два случая:

а) в первом второй операцией может быть ротор:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

б) во втором случае используем дивергенцию:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial f'_x}{\partial x} + \frac{\partial f'_y}{\partial y} + \frac{\partial f'_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$$

В результате получаем *оператор Лапласа*. Отметим, что функции  $f$ , для которых  $\Delta f = 0$ , называют *гармоническими*.

Если исходное поле  $\mathbf{a}$  является векторным, то для него определены комбинации:  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}$ ,  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a}$ ,  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}$ .

Можно убедиться, что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0$ . Поэтому имеется всего лишь три нетривиальных дифференциальных оператора 2-го порядка: оператор Лапласа  $\Delta$  для скалярных полей и операторы  $\operatorname{grad} \operatorname{div}$ ,  $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$  для векторных полей.

### 11.2. Оператор Гамильтона

Дифференциальные операторы теории поля удобно записывать при помощи специального „векторного“ оператора

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Применение любого линейного оператора можно трактовать как умножение. С учетом этого заключаем, что

$$\operatorname{grad} f = \nabla f, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}, \quad \Delta f = \nabla \nabla f = \nabla^2 f.$$

Характерно, что тривиальные дифференциальные операции согласовываются с правилами выполнения скалярного, смешанного и векторных произведений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \nabla (\nabla \times \mathbf{a}) = (\nabla \times \nabla) \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Из известной формулы для двойного векторного произведения:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

получаем следующее соотношение

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

где применение оператора Лапласа к векторному полю  $\mathbf{a}$  выполняется покомпонентно, т.е.  $\Delta \mathbf{a}$  — это векторное поле с компонентами  $(\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z)$ . Таким образом, мы получили связь между двумя дифференциальными операциями второго порядка, опираясь на формулу векторной алгебры.

Техника векторной алгебры остается верной в векторном анализе потому, что раскрытие соответствующих определителей для векторного и смешанного произведений происходит по тем же правилам, а участвующие в раскрытом определителе операции умножения (скалярное, векторное и умножение на число) обладают важнейшим свойством — ассоциативностью.

### 11.3. Потенциальное поле

**Потенциальным** называют векторное поле  $\mathbf{a}$ , которое может быть представлено как градиент некоторого скалярного поля:  $\mathbf{a} = \text{grad } f$ . В этом случае скалярное поле  $f$  называют **потенциалом векторного поля  $\mathbf{a}$** .

Из свойств дифференциальных операций для потенциального поля получаем:  $\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot grad } f \equiv \mathbf{0}$ . Таким образом, условие  $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$  является необходимым для того, чтобы поле  $\mathbf{a}$  было потенциальным.

Если  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  является потенциальным, то выражение  $a_x dx + a_y dy + a_z dz$  является полным дифференциалом, а первообразная представляет собой потенциал исходного векторного поля. Из свойств криволинейного интеграла получаем эквивалентность ряда условий:

- а) криволинейный интеграл  $\int a_x dx + a_y dy + a_z dz$  не зависит от пути;
- б) криволинейный интеграл  $\int a_x dx + a_y dy + a_z dz$  по любому контуру равен 0;
- в) дифференциал  $a_x dx + a_y dy + a_z dz$  является полным;
- г) линейный интеграл  $\int \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$  не зависит от пути;
- д) циркуляция  $\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$  равна 0 по любому контуру;
- е)  $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Все эти условия эквивалентны, если векторное поле определено в односвязной (точнее, поверхностно односвязной) области. При этом потенциал поля может быть вычислен при помощи линейного интеграла  $\int \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$  с переменным верхним пределом.

Указанные выше свойства получают естественную интерпретацию, если векторное поле — это поле сил. В этом случае потенциальность силового поля означает отсутствие внешних сил, а независимость линейного интеграла от пути означает, что от пути не зависит работа потенциального силового поля.

Потенциальное поле вполне характеризуется своим потенциалом. Так как потенциал определяется с точностью до постоянной, для его полной определенности достаточно знать его значение в некоторой точке. В случае неограниченной области потенциал часто выбирают так, что он равен 0 в  $\infty$ . Поверхности уровня потенциала называют **эквипотенциальными поверхностями**. Если векторное поле — это поле сил, то при движении по эквипотенциальной поверхности поле не производит работы.

### 11.4. Соленоидальное поле

Векторное поле  $\mathbf{a}$  называют **соленоидальным**, если оно является вихрем некоторого поля  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{b}$ . При этом векторное поле  $\mathbf{b}$  называют **векторным потенциалом поля  $\mathbf{a}$** . Необходимым условием такого соотношения является равенство  $\text{div } \mathbf{a} = \text{div rot } \mathbf{b} = 0$ . Следовательно, поток соленоидального поля через замкнутую поверхность равен 0. Если векторное поле представляет собой поле скоростей сплошной среды (жидкости), то поток этого поля через замкнутую поверхность характеризует суммарную мощность источников или стоков (если поток отрицателен).

Дивергенция есть точечная характеристика распределения источников и стоков. В случае соленоидального поля источники и стоки отсутствуют. Характерным примером такого поля является

поле магнитной напряженности. Эта составляющая электромагнитного поля отличается тем, что не является порождением статических элементов типа статического электрического заряда. Отсутствие магнитных зарядов в природе с математической точки зрения есть свойство соленоидальности поля магнитной напряженности.

Для соленоидального поля  $\mathbf{a}$  рассмотрим векторную трубку с направляющей  $\gamma$  (рис. 11.1). Пусть  $S_1$  и  $S_2$  два (трансверсальных) сечения трубки. В результате мы получаем трехмерную область  $G$ , ограниченную боковой поверхностью трубки и сечениями  $S_1$  и  $S_2$ . Поток через эту поверхность равен 0. К тому же равен 0 и поток через боковую поверхность трубки, так как в точках боковой поверхности векторное поле ортогонально нормали (иначе говоря, касается поверхности). С учетом ориентации приходим к заключению, что поток через любое сечение векторной трубки одинаков (постоянен). Эту постоянную величину называют **интенсивностью векторной трубки**.

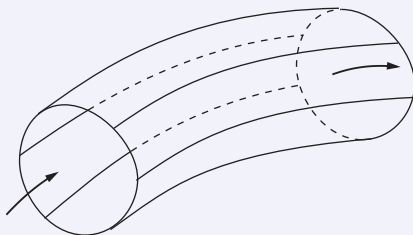


Рис. 11.1

Условие  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  является необходимым, чтобы поле  $\mathbf{a}$  было соленоидальным. Оно является достаточным при дополнительных ограничениях на область  $G$  определения поля. Именно, нужно, чтобы область была **объемно односвязной**, т.е. любая замкнутая поверхность в  $G$  ограничивала область, целиком лежащую в  $G$ .

Чтобы доказать утверждение, запишем уравнение  $\operatorname{rot} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{a}$  в координатах:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_z}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial z} = a_x, \\ \frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} = a_y, \\ \frac{\partial \xi_y}{\partial x} - \frac{\partial \xi_x}{\partial y} = a_z. \end{cases}$$

Эта система имеет заведомо неединственное решение даже с точностью, например, до постоянной. Если мы выберем пару функций  $\xi_z$  и  $\xi_y$ , удовлетворяющих первому уравнению, то второе и третье уравнения можно рассматривать как систему двух уравнений в частных производных относительно функции  $\xi_x$ . Как и в случае восстановления первообразной полного дифференциала, необходимо выполнение дополнительного условия для существования решения — равенства возникающих смешанных производных. В конечном счете это ограничение сводится к условию  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ .

Эти рассуждения показывают, что локально условие  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  является достаточным для соленоидальности  $\mathbf{a}$ .

## 11.5. Гармоническое поле

Если векторное поле  $\mathbf{a}$  является одновременно и потенциальным, и соленоидальным, то его называют **гармоническим** или **лапласовым**.

Будучи потенциальным, это поле (хотя бы локально) может быть описано скалярным потенциалом  $u$ . Соленоидальность поля означает, что

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \mathbf{a} = 0,$$

т.е. скалярный потенциал  $u$  удовлетворяет **уравнению Лапласа**  $\Delta u = 0$ . Такие функции называют **гармоническими**. Название поля берет свое начало из названия уравнения или типа функции.

Отметим важнейшие свойства гармонических функций. Во-первых, верна **теорема о среднем**: тройной интеграл от гармонической функции по шару, деленный на объем этого шара, равен значению

гармонической функции в центре шара. Иными словами, значение функции в центре шара (сферы) совпадает со средним значением функции в шаре (на сфере).

Из теоремы о среднем немедленно следует, что гармоническая функция не может иметь локальных экстремумов, так как тогда значение в точке экстремума должно быть больше любого близкого значения, а следовательно, и больше среднего. Векторные линии гармонического поля не могут быть замкнутыми, так как циркуляция по таким линиям должна быть ненулевой. Они всегда начинаются и заканчиваются на границе области.

## 11.6. Разложение поля на потенциальное и соленоидальное

Любое поле  $\mathbf{a}$  может быть представлено в виде суммы двух полей  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ , одно из которых, скажем,  $\mathbf{a}_1$ , является потенциальным, а второе — соленоидальным. Действительно, попробуем найти такое потенциальное поле  $\mathbf{a}_1$ , которое удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_1 = \operatorname{div} \mathbf{a}. \quad (11.1)$$

Так как  $\mathbf{a}_1$  потенциально, оно может быть описано скалярным потенциалом  $u$ . Сводя уравнение к этому потенциалу, получим уравнение  $\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{a}$ , которое называют **уравнением Пуассона**. Из курса уравнений математической физики следует, что это уравнение всегда имеет решения. Таким образом, и уравнение (11.1) имеет решения. Тогда векторное поле  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1$  удовлетворяет соотношению  $\operatorname{div} \mathbf{a}_2 = 0$ , т.е. является соленоидальным.

## 11.7. Криволинейные координаты

Все выкладки теории поля до сих пор делались в декартовой системе координат. Однако на практике могут использоваться и другие системы координат, связанные с течением процесса или развитием системы. Декартова система координат выгодна тем, что в ней наиболее просто записываются формулы для расстояний и углов. Может оказаться, что более важным являются не расстояния и углы, а вид уравнений, описывающих систему. Тогда вместо декартовой системы координат выбирается какая-то другая.

Под криволинейными координатами в области  $G$  мы понимаем некоторое отображение области  $G' \subset \mathbb{R}^3$  в  $G$ . „Точками“ в  $G'$  являются тройки чисел (строки длины 3). Если отображение  $G' \rightarrow G$  является взаимно однозначным, то каждой точке  $M \in G$  будет поставлено в соответствие тройка чисел, составляющих прообраз точки при заданном отображении.

Криволинейные координаты могут задаваться не всюду в данной области  $G$ , а локально, в некоторой окрестности точки. Это удобно, если не удастся построить координаты по всей области из-за потери однозначности.

Пусть заданы криволинейные координаты при помощи формул

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w), \\ y = \psi(u, v, w), \\ z = \chi(u, v, w), \end{cases} \quad (u, v, w) \in G',$$

где  $x, y, z$  — декартовы координаты точки в заданной области  $G$ ,  $u, v, w$  — криволинейные координаты. Тогда в каждой точке  $M \in G$  определены кривые, которые в области  $G'$  описываются уравнениями:

$$l_u : \begin{cases} u = u_0 + t, \\ v = v_0, \\ w = w_0, \end{cases} \quad l_v : \begin{cases} u = u_0, \\ v = v_0 + t, \\ w = w_0, \end{cases} \quad l_w : \begin{cases} u = u_0, \\ v = v_0, \\ w = w_0 + t. \end{cases}$$

В области  $G$  эти кривые (их называют **координатными**) описываются уравнениями

$$l_u : \begin{cases} x = \varphi(u_0 + t, v_0, w_0), \\ y = \psi(u_0 + t, v_0, w_0), \\ z = \chi(u_0 + t, v_0, w_0), \end{cases} \quad l_v : \begin{cases} x = \varphi(u_0, v_0 + t, w_0), \\ y = \psi(u_0, v_0 + t, w_0), \\ z = \chi(u_0, v_0 + t, w_0), \end{cases} \quad l_w : \begin{cases} x = \varphi(u_0, v_0, w_0 + t), \\ y = \psi(u_0, v_0, w_0 + t), \\ z = \chi(u_0, v_0, w_0 + t), \end{cases}$$

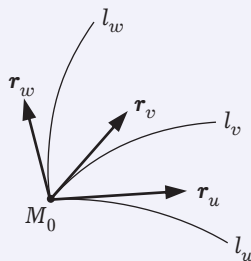


Рис. 11.2

Взяв у этих кривых касательные векторы  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$ ,  $\mathbf{r}_w$  в точке  $M_0(u_0, v_0, w_0)$ , получим векторный базис в трехмерном пространстве, называемый **репером** (рис. 11.2).

Если векторы репера попарно ортогональны, то криволинейную систему координат называют **триортогональной**. Примерами триортогональных систем координат являются цилиндрическая (полярная на плоскости) и сферическая. Длины векторов координатного репера триортогональной системы называют **коэффициентами Ламе**. В триортогональной системе координат вместо координатного репера  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$ ,  $\mathbf{r}_w$  удобно использовать ортонормированный репер  $\mathbf{e}_u$ ,  $\mathbf{e}_v$ ,  $\mathbf{e}_w$ , полученный нормированием векторов базиса.

Формулы для дифференциальных операций в криволинейных координатах достаточно сложны. Но в частном случае триортогональной системы координат удастся сочетать гибкость криволинейных координат и относительную простоту формул для дифференциальных операций.

**Градиент.** Градиент скалярного поля  $f$  в точке  $M_0$  — это вектор, указывающий направление наибольшего роста и имеющий длину, равную этому росту. В декартовой системе координат его координатами являются частные производные. Если  $(u, v, w)$  — криволинейная триортогональная система координат, то естественно выразить градиент через векторы ортонормированного координатного репера.

Чтобы выразить вектор, заданный координатами в одном базисе, через другой, достаточно знать матрицу перехода. Базис  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$ ,  $\mathbf{r}_w$  выражается через ортонормированный базис  $\mathbf{e}_u$ ,  $\mathbf{e}_v$ ,  $\mathbf{e}_w$  при помощи диагональной матрицы  $D$ , на диагонали которой стоят коэффициенты Ламе. С другой стороны, матрицей перехода из базиса  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  в базис  $\mathbf{r}_u$ ,  $\mathbf{r}_v$ ,  $\mathbf{r}_w$  является матрица Якоби  $J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ . Поэтому матрицей перехода из  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  в  $\mathbf{e}_u$ ,  $\mathbf{e}_v$ ,  $\mathbf{e}_w$  будет матрица  $JD^{-1}$ . Координаты вектора  $\text{grad } f$  в базисе  $\mathbf{e}_u$ ,  $\mathbf{e}_v$ ,  $\mathbf{e}_w$  могут быть записаны в виде (с учетом ортогональности матрицы  $JD^{-1}$ )

$$(JD^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} = (JD^{-1})^T \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} = D^{-1} J^T \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} f'_u \\ f'_v \\ f'_w \end{pmatrix}.$$

В координатной форме мы получаем следующую формулу:

$$\text{grad } f = \frac{1}{\lambda_u} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{\lambda_v} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{\lambda_w} \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{e}_w.$$

**Дивергенция.** Дивергенцию будем интерпретировать как „поток на единицу объема“. Для простоты будем считать, что система координат  $(u, v, w)$  является правой. Это равносильно тому, что якобиан перехода к этим координатам положителен.

Выберем в системе координат  $u, v, w$  прямоугольный параллелепипед

$$[u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v] \times [w_0, w_0 + \Delta w].$$

Этому параллелепипеду соответствует криволинейный параллелепипед в системе координат  $(x, y, z)$ . Объем этого криволинейного параллелепипеда вычисляется тройным интегралом

$$V = \iiint_{(V)} J(u, v, w) \, du \, dv \, dw,$$

где  $J(u, v, w)$  — якобиан координатного отображения.

Граница криволинейного параллелепипеда разбивается на 6 граней — поверхностей, параметризуемых парами криволинейных координат. По формуле считаем поверхностные интегралы, описывающие поток через всю границу. Группируем противоположные грани. Например, поток через грань  $u = u_0 + \Delta u$  имеет вид

$$P_{u1} = \iint_{u=u_0+\Delta u} \mathbf{a} \mathbf{n} dS = \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv \int_{w_0}^{w_0+\Delta w} \mathbf{a}(u_0 + \Delta u, v, w) (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)|_{u=u_0+\Delta u} dw,$$

а через противоположную ей — с учетом направления нормали

$$P_{u0} = - \iint_{u=u_0} \mathbf{a} \mathbf{n} dS = - \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv \int_{w_0}^{w_0+\Delta w} \mathbf{a}(u_0, v, w) (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)|_{u=u_0} dv dw.$$

Группируя эти интегралы, получаем

$$P_{u1} - P_{u0} = \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} \int_{w_0}^{w_0+\Delta w} \Delta u [\mathbf{a}(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)] dv dw,$$

где  $\Delta u$  обозначает приращение по переменной  $u$ . По теореме Лагранжа и теореме о среднем для двойного интеграла

$$P_{u1} - P_{u0} = \frac{\partial}{\partial u} [\mathbf{a}(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)](u_1, v_1, w_1) \Delta u \Delta v \Delta w.$$

Суммируя три пары граней и переходя к пределу, когда приращения стремятся к 0, получаем формулу

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{J} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{a}(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w)) + \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{a}(\mathbf{r}_w \times \mathbf{r}_u)) + \frac{\partial}{\partial w} (\mathbf{a}(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)) \right]. \quad (11.2)$$

В случае триортогональной системы координат якобиан равен произведению коэффициентов Ламе, а смешанные произведения в (11.2) легко считаются. Получаем формулу

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda_u \lambda_v \lambda_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} (\lambda_v \lambda_w a_u) + \frac{\partial}{\partial v} (\lambda_w \lambda_u a_v) + \frac{\partial}{\partial w} (\lambda_u \lambda_v a_w) \right].$$

**Ротор.** Рассуждения аналогичны. Чтобы вычислить проекции  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  на координатные векторы  $\mathbf{e}_u$ ,  $\mathbf{e}_v$ ,  $\mathbf{e}_w$  триортогональной системы координат, достаточно вычислить циркуляцию по границам граней рассмотренного выше криволинейного параллелепипеда и разделить на площадь грани. Параметризация ребер и граней параллелепипеда выбирается как и прежде. Приведем окончательную формулу (как и ранее для сокращения используем форму определителя):

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \lambda_u \mathbf{e}_u & \lambda_v \mathbf{e}_v & \lambda_w \mathbf{e}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ \lambda_u a_u & \lambda_v a_v & \lambda_w a_w \end{vmatrix}.$$

**Лапласиан.** Формулу для лапласиана можно получить, комбинируя формулы для дивергенции и градиента. Окончательный ответ для триортогональной системы координат:

$$\Delta f = \frac{1}{\lambda_u \lambda_v \lambda_w} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\lambda_v \lambda_w}{\lambda_u} \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\lambda_w \lambda_u}{\lambda_v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\lambda_u \lambda_v}{\lambda_w} \frac{\partial f}{\partial w} \right) \right].$$

# Лекция 12

## ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Понятие числового ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд. Свойства сходящихся числовых рядов : сложение и вычитание рядов, умножение ряда на число, принцип отбрасывания (теорема об остатке ряда). Знакоположительные числовые ряды и признаки их сходимости: признаки сравнения; признак Даламбера; признак Коши (радикальный). Интегральный признак Коши и ряды Дирихле.

### 12.1. Основные понятия

Пусть  $\{a_n\}$  — произвольная числовая последовательность. Запись этой последовательности в виде

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (12.1)$$

называют **числовым рядом**. Форма записи говорит об основной задаче, связанной с введенным понятием: суммировании членов последовательности в каком-либо смысле (количество слагаемых бесконечно и поэтому о сумме в обычном смысле слова говорить нельзя).

Введем первичные понятия. Сумма нескольких последовательных членов ряда  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  называется **частичной суммой**. Частичные суммы  $S_n$  образуют последовательность, называемую **последовательностью частичных сумм**. Предел последовательности частичных сумм, если он существует, называют **суммой ряда**. Таким образом, под суммой  $S$  ряда (12.1) понимается предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k \right).$$

Если указанный предел частичных сумм ряда существует, то говорят, что **ряд сходится**. В противном случае говорят, что **ряд расходится**.

Между последовательностями и рядами существует тесная связь. Каждый ряд  $\sum a_k$  генерирует специальную последовательность — последовательность своих частичных сумм  $\{S_n\}$ . В то же время любая числовая последовательность  $\{S_n\}$  является последовательностью частичных сумм некоторого ряда, именно, достаточно положить  $a_1 = S_1$ ,  $a_n = S_n - S_{n-1}$ . Это рассуждение показывает, что задачи определения суммы ряда и предела последовательности фактически совпадают или, точнее, являются различными формулировками одной задачи.

На практике последовательность членов ряда может задаваться различными способами. Простейший — задание с помощью формулы, т.е. как и любой другой функции (последовательность — это функция, определенная на натуральных числах). В этом случае определяющую формулу называют **общим членом ряда**. Например:

ряд	общий член
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	$a_n = \frac{1}{n}$
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$	$a_n = (-1)^n$

Но существуют и другие способы определения последовательностей. Например, рекуррентный:  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ,  $n = 2, 3, \dots$

**Пример 12.1.** Один из немногих рядов, которые можно суммировать непосредственно — геометрическая прогрессия. **Геометрической прогрессией** называют ряд, у которого отношение двух

соседних членов постоянно:  $a_{n+1}/a_n = \text{const}$ . Несложно убедиться, что общий член такого ряда задается формулой  $a_n = cq^n$ . Параметр  $q$  определяет отношение двух соседних членов прогрессии и называется ее **знаменателем**. Параметр  $c$  представляет собой значение „нулевого“ слагаемого (первого члена ряда, если этот ряд нумеровать с нуля).  $n$ -я частичная сумма прогрессии вычисляется непосредственно:

$$S_n = c \sum_{k=1}^n q^k = c \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Исходя из этой формулы, делаем вывод, что указанный ряд сходится при  $|q| < 1$  и расходится при  $|q| \geq 1$ . При этом его суммой является

$$\sum_{n=0}^{\infty} cq^n = \frac{c}{1 - q}.$$

**Теорема 12.1 (Необходимый признак сходимости).** Если ряд (12.1) сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

◀ Ряд сходится, если существует предел частичных сумм  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Но тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0.$$

▶

**Пример 12.2.** Ряд  $\sum (-1)^n$  расходится, так как последовательность его членов  $\{(-1)^n\}$  не имеет предела.

**Пример 12.3.** Необходимый признак сходимости рядов не является достаточным. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

называемый **гармоническим**, расходится. Действительно, для частичных сумм

$$S_{2n} = S_n + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq S_n + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2}.$$

Поэтому, если  $n = 2^p$ , то  $S_n > p/2$ . Последовательность частичных сумм не имеет конечного предела, т.е. ряд расходится. В то же время необходимый признак выполняется.

**Теорема 12.2 (об остатке).** Если ряд  $a_1 + \dots + a_k + \dots$  сходится, то и ряд  $a_k + a_{k+1} + \dots$  сходится. Обратно, из сходимости второго ряда следует сходимость первого.

Ряд, полученный выбрасыванием из данного ряда первых слагаемых, называют **остатком** исходного. Последовательность  $S_n$  частичных сумм исходного ряда и последовательность  $S'_l$  его остатка, полученного отбрасыванием первых  $k$  слагаемых, связаны соотношением:  $S'_l = S_{k+l} - S_k$ . При  $l \rightarrow \infty$  обе части равенства имеют один и тот же предел или не имеют его одновременно.

## 12.2. Операции над рядами

**Произведением ряда  $\sum a_n$  на число  $\lambda$**  называют ряд, полученный умножением каждого члена исходного ряда на число  $\lambda$ , т.е. ряд  $\sum (\lambda a_n)$ . **Суммой двух рядов  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$**  называют ряд  $\sum (a_n + b_n)$ .

**Теорема 12.3.** При умножении ряда на число его сумма умножается на число. При сложении двух рядов их суммы складываются:

$$\sum (\lambda a_n) = \lambda \sum a_n. \quad \sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n.$$

Сформулированное утверждение дает обобщение обычных правил операции над числовыми выражениями: свойства коммутативности и дистрибутивности. Чтобы доказать утверждение, нужно

убедиться, что свойство верно для частичных сумм, а затем воспользоваться свойствами пределов последовательностей.

Операция сложения рядов имеет обратную операцию вычитания. Именно, **разностью**  $A - B$  двух рядов  $A$  и  $B$  является такой ряд  $C$ , что  $B + C = A$ . Нетрудно убедиться, что разностью рядов  $A = \sum a_n$  и  $B = \sum b_n$  является ряд  $\sum (a_n - b_n)$ . Очевидно, что суммой разности двух рядов является разность их сумм:

$$\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n.$$

### 12.3. Знакоположительные числовые ряды

Особый интерес представляют ряды, у которых все члены имеют одинаковый знак, т.е. **знакопостоянные ряды**. Если все члены ряда отрицательны, то можно одновременно у них всех поменять знак, умножив ряд на  $-1$ . Получим ряд из положительных членов, который называют **знакоположительным**. Мы можем ограничиться рассмотрением знакоположительных рядов, так как (мы это показали) все знакоотрицательные ряды легко сводятся к знакоположительным.

Утверждение, что все члены ряда являются положительными, равносильно утверждению, что последовательность частичных сумм является монотонно возрастающей. Возрастание строгое, если ряд не имеет нулевых слагаемых. Последовательность частичных сумм знакоположительного ряда, будучи монотонной, всегда имеет предел, конечный или бесконечный. Конечность предела означает сходимость ряда. Таким образом, для сходимости знакоположительного ряда (и вообще знакопостоянного ряда) достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.

**Теорема 12.4 (1-й признак сравнения).** Пусть знакоположительные ряды  $A = \sum a_n$  и  $B = \sum b_n$  удовлетворяют условию  $a_n \leq b_n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ . Если ряд  $B$  сходится, то и ряд  $A$  сходится. Если ряд  $A$  расходится, то и ряд  $B$  расходится.

◀ Обозначив через  $\{s_n\}$  последовательность частичных сумм ряда  $A$ , через  $\{S_n\}$  — ряда  $B$ , заключаем, что  $s_n \leq S_n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ . Если ряд  $B$  сходится, то последовательность  $\{S_n\}$  монотонно возрастает и ограничена. Но тогда и монотонно возрастающая последовательность  $\{s_n\}$  ограничена, т.е. ряд  $A$  сходится. Второе утверждение является логическим отрицанием первого. ▶

**Замечание.** Если для рядов  $A = \sum a_n$  и  $B = \sum b_n$  выполняется условие  $a_n \leq b_n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , то мы будем обозначать это неравенством:  $A \leq B$ . В этом случае говорят, что ряд  $B$  является **мажорирующим** или **мажорантой** для  $A$ .

**Следствие 12.1 (2-й признак сравнения).** Пусть для знакоположительных рядов  $A = \sum a_n$  и  $B = \sum b_n$  существует конечный ненулевой предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c.$$

Тогда ряд  $A$  сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд  $B$ .

◀ Из условия вытекает, что последовательность  $a_n/b_n$ , имеющая конечный предел, ограничена, т.е.  $a_n/b_n \leq c$ . Но это значит, что ряд  $cB$  является мажорантой для  $A$ . Если ряд  $B$  сходится, то и ряд  $cB$  сходится. По теореме 13.1 сходится и ряд  $A$ . Обратное утверждение тоже верно в силу симметричности условия относительно пары рядов. ▶

**Замечание.** Условие в следствии можно ослабить, потребовав всего лишь, чтобы

$$0 < c_1 \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} \leq c_2 < \infty.$$

**Следствие 12.2 (3-й признак сравнения).** Если  $a_n \sim b_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , то ряды  $A = \sum a_n$  и  $B = \sum b_n$  сходятся или расходятся одновременно.

Напомним, что бесконечно малые последовательности эквивалентны, если существует предел их отношения, равный 1. Таким образом, 3-й признак сравнения является прямым следствием 2-го, но он имеет самостоятельное значение в силу эффективности техники бесконечно малых.

**Пример.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$$

расходится, так как

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - n + 1}} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Признаки сравнения позволяют решать задачу исследования сходимости ряда при помощи его сравнения с одним из известных. Однако ограничиться сравнением лишь с одним „универсальным“ рядом не удастся.

**Теорема 12.5.** Для любого сходящегося ряда  $\sum a_n$  существует сходящийся ряд  $\sum b_n$ , для которого  $a_n = o(b_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для любого расходящегося ряда  $\sum c_n$  существует расходящийся ряд  $\sum d_n$ , для которого  $d_n = o(c_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

◀ Пусть  $\sum a_n$  сходится. Положим

$$A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$  и

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sqrt{A_1} - \sqrt{A_{n+1}} \rightarrow \sqrt{A_1},$$

при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. ряд  $\sum b_n$  сходится. При этом при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{A_n} - \sqrt{A_{n+1}}}{A_n - A_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{A_n} + \sqrt{A_{n+1}}} \rightarrow \infty.$$

Второе утверждение доказывается аналогично. Необходимо положить  $d_n = \sqrt{C_{n+1}} - \sqrt{C_n}$ , где  $C_n$  — частичные суммы ряда  $\sum c_n$ . ▶

В простейшем случае сравнение с некоторым „стандартным“ рядом может быть сформулировано в виде самостоятельного признака сходимости, который на практике более удобен, чем непосредственное сравнение. К таким признакам относятся два наиболее известных (может быть, в силу своей простоты) — признаки Коши и Даламбера.

**Теорема 12.6 (признак Коши радикальный).** Если существует предел

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = q,$$

где  $a_n \geq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то:

- при  $q < 1$  ряд  $\sum a_n$  сходится;
- при  $q > 1$  ряд  $\sum a_n$  расходится.

◀ Если  $q < 1$ , то, выбрав произвольное число  $q'$ ,  $q < q' < 1$ , заключаем, что, начиная с некоторого номера,  $\sqrt[n]{a_n} < q'$ . Но тогда  $a_n < (q')^n$ , т.е. исходный ряд мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем  $q' < 1$  а потому сходится.

Если  $q > 1$ , то, начиная с некоторого номера  $\sqrt[n]{a_n} > 1$  или  $a_n > 1$ , откуда следует, что не выполняется необходимый признак сходимости рядов. Поэтому ряд  $\sum a_n$  расходится. ▶

**Теорема 12.7 (признак Даламбера).** Если существует предел

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

где  $a_n \geq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то:

- при  $q < 1$  ряд  $\sum a_n$  сходится;
- при  $q > 1$  ряд  $\sum a_n$  расходится.

Доказательство этого признака строится по той же схеме, что и для признака Коши, его предлагается освоить самостоятельно.

**Пример.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

сходится, так как по признаку Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

также сходится, так как по признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

**Теорема 12.8 (признак Коши интегральный).** Пусть функция  $f(x)$  определена на промежутке  $[0, +\infty)$ , неотрицательна и монотонно убывает на этом промежутке. Тогда несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  сходятся или расходятся одновременно.

◀ В силу монотонности функции  $f(x)$  для любого натурального числа  $n$  имеем неравенства

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$

Складывая эти неравенства для различных значений  $n$ , получаем

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n+1) \leq \sum_{n=0}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x) dx = \int_0^N f(x) dx$$

и

$$\int_1^N f(x) dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$  сходится, то его частичные суммы ограничены. Значит, для некоторого числа  $M$  верно неравенство

$$\int_1^N f(x) dx \leq M.$$

Таким образом, функция  $F(x) = \int_1^x f(x) dx$  монотонно возрастает, так как подынтегральная функция неотрицательна, причем  $F(N) \leq M$ . Значит,  $F(x)$  ограничена и имеет предел при  $x \rightarrow +\infty$ . Но существование предела равносильно сходимости несобственного интеграла  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ .

Если сходится несобственный интеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ , то функция, определенная равенством  $F(x) = \int_0^x f(x) dx$ , ограничена. Значит, ограничена последовательность частичных сумм  $S_N = \sum_{n=1}^N f(n)$ , что равносильно сходимости знакоположительного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ . ▶

**Замечание.** Если функция  $f(x)$  определена, неотрицательна и убывает на промежутке  $[a, +\infty)$ , для знакоположительного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  равенство  $a_n = f(n)$  выполняется, начиная с некоторого номера  $N$ , то утверждение теоремы 13.4 остается в силе. Действительно, в этом случае достаточно рассмотреть функцию  $\tilde{f}(x) = f(x + N)$ , определенную на  $[0, +\infty)$ , и остаток  $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$  исходного ряда. В этом случае условия теоремы будут выполненными и сходимость ряда будет равносильна сходимости интеграла. Предпринятые модификации интеграла и ряда не влияют на их сходимость.

**Пример.** Исследуем на сходимость *ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Если  $p \leq 0$ , данный ряд расходится согласно необходимому признаку. Поэтому остановимся на случае  $p > 0$ . В этом случае функция  $f(x) = 1/x^p$  неотрицательна и монотонно убывает на промежутке  $[1, +\infty)$ . Можно применить интегральный признак Коши, и мы заключаем, что сходимость ряда эквивалентна сходимости соответствующего интеграла, который можно вычислить непосредственно:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} \Big|_1^{+\infty} \quad \begin{cases} \text{сходится при } p > 1, \\ \text{расходится при } p \leq 1. \end{cases}$$

Итак, ряд Дирихле сходится, если показатель степени  $p$  превышает 1, и расходится в остальных случаях.

# Лекция 13

## ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Теорема о сходимости абсолютно сходящегося знакопеременного числового ряда. Признаки Дирихле и Абеля. Свойства знакопеременных числовых рядов (группирование, изменение порядка суммирования, умножение рядов). Знакопеременные числовые ряды. Признак Лейбница. Оценка суммы и остатка знакопеременного ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница.

**Теорема 13.1.** Если ряд  $\sum |a_n|$  сходится, то и ряд  $\sum a_n$  тоже сходится.

◀ Док-во использует критерий Коши. Если ряд  $\sum |a_n|$  сходится, то по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \implies \sum_{i=n+1}^{n+p} |a_i| < \varepsilon.$$

Но тогда для выбранного  $\delta$

$$\left| \sum_{i=N+1}^{N+p} a_i \right| \leq \sum_{i=N+1}^{N+p} |a_i| < \varepsilon,$$

что равносильно сходимости ряда  $\sum a_n$ . ▶

**Замечание.** Приведенное доказательство наиболее естественно. Для сравнения приведем другое, более красивое, хотя и не такое очевидное доказательство. Положим

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0, \\ 0, & a_n \leq 0, \end{cases} \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & a_n > 0, \\ -a_n, & a_n \leq 0. \end{cases}$$

Тогда  $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$  и  $a_n = a_n^+ - a_n^-$ . Из первого равенства вытекает сходимость знакоположительных рядов  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$ , а из второго — сходимость  $\sum a_n$ .

Ряд  $\sum a_n$ , для которого  $\sum |a_n|$  сходится, называют **абсолютно сходящимся**. Если ряд  $\sum a_n$  сходится, но  $\sum |a_n|$  расходится, то его называют **сходящимся условно**. Теорема 14.1 утверждает, что абсолютная сходимость влечет за собой обычную сходимость или, другими словами, абсолютная сходимость есть усиление требования обычной сходимости.

Признак абсолютной сходимости — простейший признак сходимости знакопеременных рядов. Этот признак, в частности, позволяет для анализа знакопеременных рядов применять признаки Даламбера и Коши. В самом деле, рассмотрим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q.$$

Если  $q < 1$ , то по признаку Коши ряд  $\sum |a_n|$  сходится, т.е. исходный ряд сходится абсолютно. Если же  $q > 1$ , то, как следует из доказательства признака Коши, последовательность  $\{|a_n|\}$  не стремится к 0. Но тогда это верно и для последовательности  $\{a_n\}$ , т.е. для ряда не выполняется необходимый признак сходимости и потому он расходится. Те же рассуждения верны и для признака Даламбера.

### 13.1. Другие признаки сходимости

Ряд  $\sum a_n$  называют **знакопеременным**, если любые два соседних члена ряда имеют противоположные знаки. Такой ряд можно записать в виде  $\sum (-1)^n |a_n|$ , разделив знак и абсолютное значение членов ряда.

**Теорема 13.2 (Признак Лейбница).** Пусть для знакопередающегося ряда  $\sum (-1)^n a_n$ ,  $a_n > 0$ , при  $n = \overline{1, \infty}$ , выполняются условия:

- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;  
 б)  $a_{n+1} \leq a_n$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ .

Тогда ряд сходится.

◀ Знак первого члена ряда не является существенным (при необходимости можно ряд умножить на  $-1$ ). Для определенности считаем, что он положителен. Тогда последовательность четных частичных сумм ряда является возрастающей, ограниченной сверху любой нечетной частичной суммой. С другой стороны, последовательность нечетных частичных сумм монотонно убывает и ограничена снизу любой четной частичной суммой. В самом деле,

$$\begin{aligned} S_{2n+2} &= S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}, \\ S_{2n+3} &= S_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \leq S_{2n+1} \\ S_{2n+1} &= S_{2n} + a_{2n+1} \geq S_{2n} \\ S_{2n+2} &= S_{2n+1} - a_{2n+2} \leq S_{2n+1} \end{aligned}$$

Эти выкладки означают, что последовательности четных и нечетных частичных сумм имеют предел. Но разность этих последовательностей есть последовательность членов ряда, т.е. стремится к 0. Поэтому единая последовательность частичных сумм имеет предел, т.е. ряд сходится. ▶

**Замечание.** Анализируя доказательство, можно получить неравенство

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}.$$

Значит, сумма остатка знакопередающегося ряда не превосходит первого отброшенного члена. Таким образом, теорема 14.2 дает не только доказательство сходимости ряда, но и оценку его остатка. Например, чтобы вычислить приближенно сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

с точностью 0.001, нужно взять 1000 первых членов ряда. Можно было бы точнее оценить остаток ряда, но в данном случае признак Лейбница дает завышение всего лишь в 2 раза.

Следующие два признака основываются на техническом приеме, аналогичном интегрированию по частям.

**Пример.** Рассмотрим интеграл

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Непосредственно трудно сказать, сходится ли этот несобственный интеграл. Но если его проинтегрировать по частям:

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x} d(\cos x) = - \frac{\cos x}{x} \Big|_{\pi}^{\infty} - \int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

то приходим к интегралу, сходящемуся абсолютно. Поэтому исходный интеграл сходится.

Рассмотрим две последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$ . Сумма

$$S = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \quad (13.1)$$

(*сегмент ряда*) может быть преобразована следующим образом. Выберем последовательность  $\{S_n\}$  так, что  $a_n = S_n - S_{n-1}$ ,  $n = \overline{1, \infty}$  (например,  $S_n$  — последовательность частичных сумм ряда  $\sum a_n$ ).

Подставим выражение  $a_n$  через  $S_n$  в сумму (13.1):

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^p (S_{n+k} - S_{n+k-1}) b_{n+k} = \sum_{k=1}^p S_{n+k} b_{n+k} - \sum_{k=1}^p S_{n+k-1} b_{n+k} = \\ &= \sum_{k=1}^p S_{n+k} b_{n+k} - \sum_{k=0}^{p-1} S_{n+k} b_{n+k+1} = S_{n+p} b_{n+p} - S_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} S_{n+k} (b_{n+k} - b_{n+k+1}). \end{aligned}$$

Полученное преобразование аналогично рассмотренному выше интегрированию по частям, роль производных играют первые разности последовательностей. Это преобразование иногда называют **преобразованием Абеля**.

**Теорема 13.3 (Признак Дирихле).** Пусть:

- 1) последовательность частичных сумм ряда  $\sum a_n$  ограничена;
- 2) последовательность  $b_n$  является монотонной и бесконечно малой.

Тогда ряд  $\sum a_n b_n$  сходится.

◀ Считаем, что  $b_n > 0$  для всех  $n$ . Пусть  $A_n$  — последовательность частичных сумм ряда  $\sum a_n$ . Применим к сегменту ряда  $\sum a_n b_n$  преобразование Абеля:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} A_{n+k} (b_{n+k} - b_{n+k+1}).$$

Оно приводит к оценке сегмента ряда (здесь  $M$  — некоторое положительное число):

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &\leq |A_{n+p} b_{n+p}| + |A_n b_{n+1}| + \sum_{k=1}^{p-1} |A_{n+k}| (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \leq \\ &\leq M \left[ b_{n+p} + b_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1}) \right] = M (b_{n+p} + b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+p}) = 2M b_{n+1}. \end{aligned}$$

Применение критерия Коши завершает доказательство. ▶

**Теорема 13.4 (Признак Абеля).** Пусть:

- 1) ряд  $\sum a_n$  сходится;
- 2) последовательность  $b_n$  является монотонной и ограниченной.

Тогда ряд  $\sum a_n b_n$  сходится.

Признак доказывается аналогично предыдущему. В качестве последовательности  $S_n$  нужно взять последовательность остатков ряда  $\sum a_n$ , которая стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ .

## 13.2. Группировки

Рассмотрим ряд  $\sum a_n$ . При помощи любой строго возрастающей последовательности  $\{n_k\}$  натуральных чисел, начинающейся с 0, можно образовать новый ряд  $\sum b_k$ , положив

$$b_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i.$$

В результате получим ряд

$$(a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots$$

который получается из исходного **группированием членов** (грубо говоря, расстановкой скобок). Такое преобразование может быть полезно при исследовании на сходимость.

Сформулируем два утверждения, касающиеся сходимости группированного ряда:

- если ряд  $\sum a_n$  сходится, то любой ряд  $\sum b_n$ , полученный группировкой исходного, сходится к той же сумме;
- если общий член ряда  $\sum a_n$  стремится к 0, ряд  $\sum b_n$  получен группировкой первого, причем каждый его член есть сумма не более  $K$  членов ряда  $\sum a_n$ , то из сходимости  $\sum b_n$  следует сходимость  $\sum a_n$ .

Отметим, что группировка ряда равнозначна выделению из последовательности  $S_n$  его частичных сумм некоторой подпоследовательности  $S_{n_k}$ . Таким образом, первое утверждение — это перефразировка следующего свойства сходящихся последовательностей: любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится. Если каждая группа содержит не более фиксированного числа  $K$  членов исходного ряда, то любая из отброшенных частичных сумм отличается от ближайшей оставшейся не более чем на сумму модулей  $K$  подряд идущих членов исходного ряда:

$$|S_n - S_{n_k}| \leq |a_{n_k+1}| + \dots + |a_{n_{k+1}}|, \quad n_k + 1 \leq n \leq n_{k+1}.$$

Если общий член ряда стремится к 0, то и указанная сумма как сумма  $K$  бесконечно малых, тоже стремится к 0.

Если в ряде часть членов (конечное или бесконечное их число) равна 0, то их можно выбросить из ряда. При этом вновь полученный ряд будет сходиться или расходиться наравне с исходным. Описанная операция может интерпретироваться как вариант группирования (нулевые члены группируются с последним ненулевым из предшествующих членов). Но в этом случае дополнительных условий не требуется. С точки зрения последовательности частичных сумм указанная операция есть исключение в последовательности идущих подряд повторений.

### 13.3. Перестановки

Рассмотрим взаимно однозначное отображение  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  множества натуральных чисел на себя,  $p(n)$  — значение отображения для аргумента  $n$ . Ряд  $\sum a_{p(n)}$  называется перестановкой ряда  $\sum a_n$ . Перестановка — расположение членов ряда в ином порядке. Утверждение, что после перестановки ряд сходится к той же сумме, является обобщением закона коммутативности для конечных сумм. Однако такое утверждение верно лишь при некоторых дополнительных условиях. Сформулируем некоторые из таких условий.

- Если существует такое число  $K$ , что  $p(n) - n < K$  при всех  $n$ , то исходный ряд и его перестановка сходятся или расходятся одновременно, причем если сходятся, то к одной сумме.
- Если ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно, то любая его перестановка сходится абсолютно и к той же сумме.
- Если ряд сходится условно, то в результате его перестановки можно получить как расходящийся ряд, так и ряд, сходящийся к любому наперед заданному числу (*теорема Римана*).

Первое утверждение близко по своей природе к соответствующему утверждению о группировках. Но наиболее существенным является второе. Теорема Римана, приведенная без доказательства, иллюстрирует необходимость требования абсолютной сходимости. Мы остановимся на втором утверждении подробнее. Оно распадается на два относительно самостоятельных утверждения:

- перестановка знакоположительного сходящегося ряда всегда сходится;
- при перестановке абсолютно сходящегося ряда сумма не меняется.

Для доказательства первого достаточно показать ограниченность частичных сумм переставленного ряда. Пусть исходный ряд  $\sum a_n$ , переставленный —  $\sum b_n$ , где  $b_n = a_{p(n)}$ . Положим  $K(n) = \max \{p(1), \dots, p(n)\}$ . Тогда частичные суммы рядов  $A_n$  и  $B_n$  связаны соотношением  $B_n < A_{K(n)}$ , так как все слагаемые левой частичной суммы входят в правую. Неравенство доказывает, что последовательность  $\{B_n\}$  ограничена.

Отметим, что перестановка является симметричной операцией: исходный ряд может быть восстановлен обратной перестановкой. Поэтому доказательство любого из утверждений в одну сторону является доказательством и в обратную сторону. В терминологии предыдущего рассуждения частная сумма  $B_n$  отличается от  $A_{p(n)}$  еще не добавленными членами, которые в ряде  $\sum b_n$  имеют номера более

$n$ . Если этот ряд сходится абсолютно, то для любого  $\varepsilon$  можно выбрать такой номер  $n$ , что выполняется неравенство

$$|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots < \varepsilon. \quad (13.2)$$

Во-первых, это означает, что частичная сумма  $B_n$  отличается от суммы  $B$  ряда  $\sum b_n$  не более чем на  $\varepsilon$ , так как  $|B_n - B| = |b_{n+1} + b_{n+2} + \dots|$ . Во-вторых, указанное неравенство приводит к соотношению  $|A_{K(n)} - B_n| < \varepsilon$ , так как  $A_{K(n)}$  получается из  $B_n$  добавлением некоторых из членов  $b_k$  с  $k > n$ . Поэтому  $|A_{K(n)} - B| < 2\varepsilon$ . Остается заметить, что последовательность  $K(n)$  стремится к  $\infty$ , а потому  $\{A_{K(n)}\}$  сходится к сумме  $A$  ряда  $\sum a_n$ . Тем самым доказано, что  $A = B$ .

### 13.4. Умножение рядов

При перемножении двух конечных сумм  $(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_m)$  необходимо вычислить все попарные произведения левых слагаемых с правыми, а потом все произведения сложить. Порядок сложения не является существенным. Все попарные произведения составляют матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_m \end{pmatrix}$$

В случае произведения двух рядов все попарные произведения образуют бесконечную в обе стороны матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_m & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

В общем случае сумма всех этих попарных произведений зависит от их порядка. Поэтому для получения содержательного смысла суммы всех слагаемых необходимо дополнительное требование абсолютной сходимости.

Если исходные ряды знакоположительны, то и ряд из их попарных произведений является знакоположительным. Суммируя „по квадратам“, в последовательности частичных сумм будем иметь подпоследовательность произведений частичных сумм исходных рядов. Это доказывает и сходимое, и то, что сумма произведения рядов в этом случае равна произведению сумм исходных рядов. Как и ранее, это сразу переносится на знакопеременные абсолютно сходящиеся ряды (если исходные ряды сходятся абсолютно, то ряд из попарных произведений сходится тоже абсолютно, его можно суммировать „по квадратам“).

Принято произведение рядов суммировать „по диагоналям“ с группировкой членов одной диагонали. Именно, под произведением рядов  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$  понимают ряд  $\sum c_n$  с членами

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}. \quad (13.3)$$

Группировка членов может обеспечить основную формулу (произведение сумм равно сумме произведений) при более слабых условиях. В частности, если указанные ряды сходятся, причем хотя бы один из них (не обязательно оба) сходится абсолютно, то ряд  $\sum c_n$  с общим членом (13.3) сходится абсолютно, и его суммой является произведение сумм исходных рядов (это утверждение не доказываем).

# Лекция 14

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Основные свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы ряда, почленное дифференцирование и интегрирование). Признаки равномерной сходимости Дирихле и Абеля.

### 14.1. Функциональные последовательности

**Функциональная последовательность** (ФП) представляет собой последовательность, составленную из функций. Другими словами, такая последовательность представляет собой отображение натурального ряда в некоторое пространство функций. Мы будем полагать, что все члены функциональной последовательности имеют одну и ту же область определения, которую будем называть **областью определения функциональной последовательности**. В этом случае можно сказать и так: ФП — это отображение  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , т.е. функция от 2-х переменных, причем первый аргумент является натуральным, а второй — действительным.

Фиксируя натуральный аргумент, получаем функцию действительного переменного, являющуюся **членом функциональной последовательности**. Если же фиксировать действительный аргумент, мы получим числовую последовательность — последовательность значений членов ФП в данной точке. Множество тех точек области, в которых такая числовая последовательность сходится, называют **областью сходимости функциональной последовательности**.

Если множество  $X$  принадлежит области сходимости данной ФП, то также говорят, что ФП сходится на  $X$  **поточечно**. Областью сходимости  $X$  часто оказывается область определения ФП. Поточечная сходимость проста и естественна, так как опирается на свойства числовых последовательностей. Однако она не сохраняет важнейших свойств, присущих функциям: непрерывности, дифференцируемости и т.п. Например, последовательность  $\{x^n\}$  непрерывных на  $[0, 1]$  функций сходится поточечно к функции, равной 0 на  $[0, 1)$  и 1 в точке 1. Эта функция, очевидно, не является непрерывной.

На понятие сходимости ФП можно посмотреть в более широком плане. Предположим, что все члены ФП являются элементами некоторого линейного пространства функций  $L$  (например, непрерывных, дифференцируемых и т.п.). Пусть в этом пространстве функций задано **расстояние**  $\rho(f, g)$  между любыми двумя функциями. Такое расстояние должно подчиняться **аксиомам расстояния**:

- $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ ;
- $\rho(f, g) \geq 0$ , причем  $\rho(f, g) = 0$  тогда и только тогда, когда  $f = g$ ;
- $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$  (**неравенство треугольника**).

С таким расстоянием пространство  $L$  становится **метрическим**, и в нем можно определить сходимость обычным образом: последовательность  $\{f_n\} \subset L$  сходится к некоторому пределу  $f \in L$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n (n > N \implies \rho(f_n, f) < \varepsilon).$$

Такой подход к понятию сходимости ФП дает неограниченное множество конкретных вариантов. Подход может быть расширен еще больше, если вместо расстояния использовать непосредственное описание окрестностей функций (превращая тем самым пространство функций в **топологическое пространство**). Если понятие окрестности определено, то под пределом ФП надо понимать следующее: функция  $f$  есть предел последовательности  $\{f_n\}$ , если для любой окрестности  $O(f)$  функции  $f$  существует такое натуральное  $N$ , что при  $n > N$  имеем  $f_n \in O(f)$ . Таким способом может быть введена поточечная сходимость.

Окрестности могут определяться расстоянием (метрикой). В свою очередь метрика в линейном функциональном пространстве может задаваться **нормой**. Норма в линейном пространстве — это функция, определенная на этом пространстве и обозначаемая  $\|f\|$ , которая удовлетворяет **аксиомам нормы**:

- $\|f\| \geq 0$ ;
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ ;
- $\|f\| = 0 \implies f = 0$ ;
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  (**неравенство треугольника**).

Каждой норме  $\|f\|$  соответствует расстояние  $\rho(f, g) = \|f - g\|$ . Приведем примеры норм:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|;$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Сходимость на основе первой из этих норм называют **равномерной сходимостью**, обозначение:  $f_n \xrightarrow{X} f$ . Сходимость на основе второй обычно называют **сходимостью в среднем квадратичном**.

Этот вариант сходимости встретится нам позже.

Альтернативные формулировки для равномерной сходимости:

- $f_n \xrightarrow{X} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ;
- $f_n \xrightarrow{X} f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \sup_{x \in X} \{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon$ .

Сравним первую из этих формулировок с определением на языке „ $\varepsilon$ - $\delta$ “ поточечной сходимости:

$$f_n \text{ to } f \iff \forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} \forall n > N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Как видим, изменился лишь порядок кванторов: квантор всеобщности, перемещенный влево (для  $x$ ), усиливает высказывание, так как в первом случае (равномерная сходимость)  $N$  зависит лишь от  $\varepsilon$ , в то время как во втором — еще и от  $x$ .

Равномерная сходимость, будучи сходимостью по норме, сохраняет основные свойства предела. Перечислим их:

- 1) если  $f_n \xrightarrow{X} f$ , то  $f_n \xrightarrow{X} f$  (см. выше);
- 2) если  $f_n \xrightarrow{X} f$ ,  $g_n \xrightarrow{X} g$ , то: а) для любых действительных  $\alpha$  и  $\beta$   $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{X} \alpha f + \beta g$ , б)  $f_n g_n \xrightarrow{X} f g$ ;
- 3) если  $f_n \xrightarrow{X} f$ , причем для некоторого действительного числа  $c > 0$  выполняется неравенство  $|f(x)| \geq c$  в каждой точке  $x \in X$ , то  $1/f_n \xrightarrow{X} 1/f$ .

◀ Из условия  $\inf_{x \in X} |f(x)| \geq c$  получаем, что в каждой точке  $x \in X$   $|f_n(x)| \geq |f(x)| - |f_n(x) - f(x)| \geq c/2$ . Поэтому

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| = \sup_{x \in X} \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \sup_{x \in X} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)| |f(x)|} \leq \frac{2}{c^2} \|f_n - f\| \quad \blacktriangleright$$

4) равномерно сходящаяся последовательность равномерно ограничена, т.е. если  $f_n \xrightarrow{X} f$ , то существует такая постоянная  $M > 0$ , что  $\|f_n\|_{\infty} < M$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  (другими словами  $|f(x)| < M$  в каждой точке  $x \in X$  и для любого  $n$ );

5) критерий Коши: последовательность  $\{f_n(x)\}$  равномерно сходится на множестве  $X$ , если и только если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (14.1)$$

(условие (14.1) означает, что последовательность  $\{f_n\}$  **равномерно фундаментальна** на  $X$ ).

Следующие свойства, отражающие связь понятия равномерной сходимости с такими свойствами, как непрерывность, являются ключевыми.

**Теорема 14.1.** Если  $f_n \in C(X)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и  $f_n \xrightarrow{X} f$ , то  $f \in C(X)$ .

◀ Выберем произвольную точку  $x_0 \in X$  и докажем, что функция  $f(x)$ , являющаяся равномерным пределом последовательности, непрерывна в этой точке. По условию для любого наперед выбранного

числа  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N(\varepsilon)$ , что при  $n > N$  и  $x \in X$  выполняется неравенство  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ . Выберем произвольное  $n > N$  и зафиксируем. Для выбранного нами числа  $\varepsilon$  можно также указать такие окрестности  $O_n(x_0)$  и  $O(x_0)$  точки  $x_0$ , что  $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$  при  $x \in O_n(x_0) \cap X$  и  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  при  $x \in O(x_0) \cap X$ . Если  $x \in O_n(x_0) \cap O(x_0) \cap X$ , то

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon$  выбиралось произвольно, мы тем самым доказали непрерывность функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ . ►

**Теорема 14.2.** Если  $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$ , то  $\int_a^x f_n(\xi) d\xi \xrightarrow{[a,b]} \int_a^x f(\xi) d\xi$ .

◀ В самом деле,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f_n(\xi) d\xi - \int_a^x f(\xi) d\xi \right| &= \left| \int_a^x (f_n(\xi) - f(\xi)) d\xi \right| \leq \\ &\leq \int_a^x |f_n(\xi) - f(\xi)| d\xi \leq \int_a^b |f_n(\xi) - f(\xi)| d\xi \leq \|f_n - f\| (b - a). \end{aligned}$$

Поэтому, обозначив первообразные функций  $f_n(x)$  и  $f(x)$  через  $F_n(x)$  и  $F(x)$  соответственно, получим  $\|F_n - F\| \leq (b - a)\|f_n - f\|$ . ►

**Следствие 14.1.** Если  $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$ , то  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ .

Сформулированное следствие говорит о том, что равномерно сходящиеся последовательности можно интегрировать почленно. Следующая теорема дает условия, достаточные для почленного дифференцирования функциональной последовательности.

**Теорема 14.3.** Пусть каждая из функций  $f_n(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и выполняются условия:

- последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится хотя бы в одной точке  $x_0 \in (a, b)$ ;
- $f'_n \xrightarrow{(a,b)} \varphi$ .

Тогда  $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$ , причем функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $f'(x) = \varphi(x)$  всюду на  $(a, b)$ .

◀ Если дополнительно предположить, что все производные непрерывны, то утверждение теоремы может быть получено из теоремы 15.2, так как в этом случае можно воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница. Положив  $g_n = f'_n$ ,  $G_n = f_n$ , получим, что

$$G_n(x) = G_n(x_0) + \int_{x_0}^x g_n(\xi) d\xi.$$

Остается применить теорему 15.2 к последовательности  $\{g_n\}$ .

Приведенная формулировка теоремы чуть более мягкая, так как не требует непрерывности производных, а доказательство опирается на теорему Лагранжа.

Сначала докажем, что при выполнении условий теоремы последовательность  $\{f_n\}$  на отрезке  $[a, b]$  сходится равномерно к некоторой функции  $f(x)$ . Для этого воспользуемся критерием Коши. Обозначим  $\psi_{nm}(x) = f_n(x) - f_m(x)$ . Тогда для любого  $x \in [a, b]$  имеем

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |\psi_{nm}(x)| \leq |\psi_{nm}(x) - \psi_{nm}(x_0)| + |\psi_{nm}(x_0)| = |\psi'_{nm}(\xi)| |x - x_0| + |\psi_{nm}(x_0)|$$

Последовательность  $\{f'_n(x)\}$  равномерно фундаментальна. Поэтому для произвольного наперед выбранного  $\varepsilon > 0$  можем выбрать число  $N$  так, что при  $m, n > N$  и  $a < x < b$  будет  $|\psi'_{nm}(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Для того же числа  $\varepsilon$  можно выбрать  $N'$  так, что при  $m, n > N'$  в точке  $x_0$  будет  $|\psi_{nm}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда для любых  $m, n > \max\{N, N'\}$  и произвольного  $x \in X$  получим

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |\psi'_{nm}(\xi)| |x - x_0| + |\psi_{nm}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (14.2)$$

Таким образом, мы доказали равномерную фундаментальность последовательности  $\{f_n\}$ , из которой, согласно критерию Коши, следует ее равномерная сходимость к некоторой функции  $f(x)$ . Покажем, что эта функция на  $(a, b)$  дифференцируема и что ее производной является функция  $\varphi(x)$ , предел последовательности  $\{f'_n(x)\}$ .

Выберем и зафиксируем произвольную точку  $\xi \in (a, b)$ . Рассмотрим функциональную последовательность  $\left\{ \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} \right\}$ . Члены этой последовательности непрерывны всюду, кроме точки  $\xi$ . Но в этой точке существует предел  $\lim_{x \rightarrow \xi} \left\{ \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} \right\} = f'_n(\xi)$ . Поэтому мы можем доопределить члены последовательности в точке  $\xi$  так, что они будут непрерывны на всем интервале  $(a, b)$ .

Выкладками, аналогичными (14.2), убеждаемся, что эта последовательность сходится на  $[a, b]$  равномерно:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} - \frac{f_m(x) - f_m(\xi)}{x - \xi} \right| &= \frac{|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(\xi) - f_m(\xi))|}{|x - \xi|} = \\ &= \frac{|[f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)](x - \xi)|}{|x - \xi|} = |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x) - f'_m(x)| = \|f'_n - f'_m\|_\infty. \end{aligned}$$

Видим, что последовательность  $\left\{ \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} \right\}$  равномерно фундаментальна, так как равномерно фундаментальна последовательность  $\{f'_n(x)\}$ . Следовательно, по критерию Коши она сходится равномерно. Но равномерный предел последовательности непрерывных функций является функцией непрерывной. Отметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(\xi)}{x - \xi} = \begin{cases} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, & x \neq \xi, \\ \varphi(x), & x = \xi, \end{cases}$$

Следовательно, из непрерывности равномерного предела получаем

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \varphi(\xi).$$

Полученное равенство означает, что функция  $f(x)$  имеет в точке  $\xi$  производную, равную  $\varphi(\xi)$ . ►

Анализ функциональной последовательности на равномерную сходимость достаточно трудоемок. При некоторых дополнительных ограничениях равномерная сходимость будет вытекать из поточечной.

**Теорема 14.4 (теорема Дини).** Если последовательность  $\{f_n(x)\}$  непрерывных функций сходится поточечно на компакте<sup>1</sup>  $X$  к некоторой непрерывной функции  $f(x)$ , причем для каждого  $x \in X$  числовая последовательность  $\{f_n(x)\}$  монотонна, то  $\{f_n\}$  сходится на  $X$  равномерно.

## 14.2. Функциональные ряды

**Функциональный ряд** (ФР) представляет собой особую форму записи функциональной последовательности: рядом называют запись

$$f_1(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

где  $\{f_k(x)\}$  — произвольная функциональная последовательность.

Для функциональных рядов вводят понятие  $n$ -й частичной суммы:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

<sup>1</sup>Множество  $K$  числовой прямой является компактом, если оно замкнуто и ограничено.

Суммой функционального ряда называют предел последовательности его частичных сумм. Этот предел может рассматриваться различными способами введением разных расстояний, норм и т.п. Соответственно этому варьируется и понятие сходимости функционального ряда. Отметим поточечную и равномерную сходимость.

Между функциональными последовательностями и функциональными рядами вне зависимости от способа предельного перехода сохраняется та же связь, что и между числовыми, а именно: любая функциональная последовательность может интерпретироваться как последовательность частичных сумм ряда, в то время как любой ряд ассоциируется со своей последовательностью частичных сумм. Поэтому большинство свойств функциональных последовательностей переносится на функциональные ряды:

- из равномерной сходимости ряда на данном множестве следует его поточечная сходимость на том же множестве;
- сумма равномерно сходящихся рядов, произведение равномерно сходящегося ряда на функцию равномерно сходятся;
- сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций есть функция непрерывная (на множестве равномерной сходимости);
- равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно, полученный при этом ряд из интегралов с переменным верхним пределом сходится равномерно;
- функциональный ряд из дифференцируемых на данном интервале функций можно дифференцировать почленно, если он сходится хотя бы в одной точке интервала, а ряд из производных сходится на интервале равномерно;
- если ряд  $\sum f_n$  из непрерывных и неотрицательных на компакте  $X$  функций  $f_n$  сходится к непрерывной на  $X$  функции  $f$  поточечно, то он сходится на  $X$  и равномерно (теорема Дини).

Тем не менее, как и для числовых рядов, исследование функциональных рядов может быть более простым по сравнению с последовательностями. Отметим основные факты, которыми ряды отличаются от последовательностей.

### 14.3. Признаки равномерно сходящихся рядов

**Теорема 14.5.** Пусть ФР  $\sum f_k(x)$  сходится на множестве  $X$  поточечно. Тогда этот ряд сходится на  $X$  равномерно  $\iff r_n(x) \xrightarrow{X} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , где

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

◀ Утверждение немедленно вытекает из соотношения  $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ , в котором  $S(x)$  — сумма ряда в точке  $x$ ,  $S_n(x)$  —  $n$ -я частичная сумма ряда в точке  $x$  и которое верно для любого натурального  $n$ . ▶

**Теорема 14.6 (необходимый признак сходимости).** Если ряд  $\sum f_k(x)$  сходится равномерно на множестве  $X$ , то  $f_k(x) \xrightarrow{X} 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Доказательство то же, что и в случае числовых рядов.

**Теорема 14.7 (признак Вейерштрасса).** Теорема 15.7 Если  $|f_n(x)| \leq a_n$  при  $x \in X$  и  $n \in \mathbb{N}$ , ряд  $\sum a_n$  сходится, то ряд  $\sum f_n(x)$  сходится на  $X$  равномерно.

◀ В каждой точке  $x \in X$  числовой ряд  $\sum f_n(x)$  сходится абсолютно в силу 1-го признака сравнения. Значит,  $\sum f_n$  сходится на  $X$  поточечно. Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся теоремой 15.4. В каждой точке  $x \in X$  имеем оценку

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \alpha_n,$$

откуда  $\|r_n\|_{\infty} \leq \alpha_n$ . В силу сходимости ряда  $\sum a_n$  последовательность  $\alpha_n$  его остатков сходится к 0. А это означает, что  $\|r_n\|_{\infty} \xrightarrow{X} 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . ▶

**Замечание 14.1.** Ряд  $\sum a_n$ , на основании которого делают вывод о равномерной сходимости ФР, называют *мажорантой*. Минимальной мажорантой для данного ФР на множестве  $X$  является ряд  $\sum \|f_n\|_\infty$ . Так что признак Вейерштрасса можно было бы сформулировать так: ряд  $\sum f_n$  сходится равномерно, если ряд  $\sum \|f_n\|_\infty$  сходится. В такой интерпретации признак Вейерштрасса представляет собой обобщение признака абсолютной сходимости.

**Замечание 14.2.** Признак Вейерштрасса не является необходимым. Именно, можно построить сходящийся равномерно ряд  $\sum f_n$ , для которого  $\sum \|f_n\|_\infty$  расходится. Далеко ходить не надо, так как для частного случая функционального ряда — числового — признак Вейерштрасса превращается в признак абсолютной сходимости!

Но даже если потребовать, чтобы  $f_n(x) \geq 0$ ,  $x \in X$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , избавляясь от эффекта абсолютной сходимости, признак Вейерштрасса не станет необходимым. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 4(n+1)((n+1)x-1)(1-nx), & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), \\ 0, & x \notin \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Ряд  $\sum f_n$  сходится поточечно на  $[0, 1]$ , так как в каждой точке отрезка только один из членов ряда отличен от 0. При этом

$$\|r_n\|_\infty = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right\|_\infty = \max_{k \geq n+1} \left\{ \frac{4(k+1)}{4k(k+1)} \right\} = \frac{1}{n+1},$$

т.е. сходимость равномерная. Однако  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ , так что  $\sum \|f_n\|_\infty = \infty$ .

**Теорема 14.8 (признак Дирихле).** Теорема 15.8 Пусть:

- последовательность частичных сумм ряда  $\sum \alpha_n(x)$  равномерно ограничена на множестве  $X$ ;
- последовательность  $\{\beta_n(x)\}$  монотонна для любого

Тогда функциональный ряд  $\sum \alpha_n(x)\beta_n(x)$  сходится на  $X$  равномерно.

◀ Вспоминаем преобразование Абеля:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)\beta_k(x) = A_{n+p}(x)\beta_{n+p}(x) - A_n(x)\beta_{n+1}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x)),$$

где  $A_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)$ . Учитывая, что частичные суммы  $A_n(x)$  для ряда  $\sum \alpha_n(x)$  равномерно ограничены, т.е. существует такая константа  $M$ , что  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X |A_n(x)| \leq M$ , заключаем, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x)\beta_k(x) \right| &\leq M|b_{n+p}(x)| + M|b_{n+1}(x)| + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| = \\ &= Mb_{n+p}(x) + Mb_{n+1}(x) + M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [b_k(x) - b_{k+1}(x)] = \\ &= Mb_{n+p}(x) + Mb_{n+1}(x) + M[b_{n+1}(x) - b_{n+p}(x)] = 2Mb_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\beta_k \right\|_\infty \leq \|b_{n+1}\|_\infty$ . Применение критерия Коши завершает доказательство. ▶

**Теорема 14.9 (признак Абеля).** Теорема 15.9 Пусть:

- ряд  $\sum \alpha_n(x)$  равномерно сходится на множестве  $X$ ;
- последовательность  $\{\beta_n(x)\}$  монотонна для любого  $x \in X$  и на  $X$  равномерно ограничена.

Тогда функциональный ряд  $\sum \alpha_n(x)\beta_n(x)$  сходится на  $X$  равномерно.

Доказательство аналогично предыдущей теореме, но использует несколько модифицированное преобразование Абеля. Как видно уже из доказательства предыдущей теоремы, практически воспроизводится обоснование аналогичного признака для числовых рядов. Детали предлагается восстановить самостоятельно.

# Лекция 15

## СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Первая теорема Абеля. Интервал сходимости. Формула Коши — Адамара. Теорема о равномерной сходимости. Основные свойства (непрерывность, почленное дифференцирование и интегрирование). Вторая теорема Абеля.

### 15.1. Интервал сходимости

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

называют **степенным**. Параметр  $x_0$  — это *центр степенного ряда*, а члены последовательности  $\{a_n\}$  — коэффициенты степенного ряда.

Область сходимости степенного ряда всегда непуста: ряд заведомо сходится в своем центре, точке  $x_0$ . Отметим, что область сходимости  $D_0$  степенного ряда  $\sum a_n x^n$  получается из области сходимости  $D$  ряда  $\sum a_n(x - x_0)^n$  сдвигом на величину  $x_0$  влево (если первый сходится в точке  $y$ , то второй сходится в точке  $x = y + x_0$ , значит между точками двух областей устанавливается взаимно однозначное соответствие  $y = x + x_0$ ). Это соображение позволяет остановиться на частном случае степенного ряда, имеющего центр в точке 0, и тем самым несколько упростить изложение материала.

Степенной ряд по своему характеру близок к геометрической прогрессии. Поэтому для него эффективно применение признаков Коши (радикального) и Даламбера.

**Пример 15.1.** Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Положив  $a_n = x^n/n$ , вычисляем вариант Даламбера  $q$ :

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x|.$$

При  $|x| < 1$  ряд сходится абсолютно, при  $|x| > 1$  ряд расходится (если вариант Даламбера превосходит 1, то нарушается необходимый признак). Наконец, при  $|x| = 1$ , т.е. в точках  $-1$  и  $1$ , признак Даламбера ничего сказать не может, и мы должны исследовать ряд дополнительно. В этих точках степенной ряд дает соответственно ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Первый из них (точка  $x = -1$ ) сходится согласно признаку Лейбница, второй расходится, так как является гармоническим рядом. Итак, областью сходимости указанного ряда является полуинтервал  $[-1, 1)$ .

В общем случае областью сходимости степенного ряда является интервал, полуинтервал или отрезок. Все варианты описываются термином „связное множество“. При этом граничные точки могут входить в область сходимости, а могут и не входить. Частным случаем интервала является вся числовая ось, а частным случаем отрезка — единственная точка, центр степенного ряда.

**Теорема 15.1 (первая теорема Абеля).** Если ряд  $\sum a_n x^n$  сходится в точке  $x_0$ , то он сходится абсолютно в любой точке  $x$ , для которой  $|x| < |x_0|$ .

◀ Так как ряд  $\sum a_n x_0^n$  сходится, последовательность  $\{a_n x_0^n\}$  является бесконечно малой и потому ограничена. Это значит, что существует такое положительное число  $M$ , что  $|a_n x_0^n| \leq M$ . Но тогда

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right| \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|,$$

т.е. ряд  $\sum a_n x^n$  при  $|x| < |x_0|$  мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем  $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ , а потому сходится согласно 1-му признаку сравнения. ▶

**Следствие 15.1.** Любой степенной ряд имеет такой интервал  $(-R, R)$ , внутри которого ряд сходится абсолютно, а вне — расходится. При этом на концах интервала ряд может как сходиться, так и расходиться.

◀ Рассмотрим область  $D$  сходимости ряда и пусть  $R = \sup\{|z| : z \in D\}$ . Тогда согласно определению числа  $R$  ряд при  $|x| > R$  расходится. Пусть  $|x| < R$ . Существует такое значение  $x_0$ , что ряд сходится в точке  $x_0$  и при этом  $|x| < |x_0| < R$ . Из первой теоремы Абеля заключаем, что в точке  $|x|$  ряд сходится абсолютно. ▶

Число  $R$  называют **радиусом сходимости** степенного ряда, интервал  $(-R, R)$  — **интервалом сходимости** этого ряда. Область сходимости степенного ряда представляет собой его интервал сходимости с добавлением, возможно, граничных точек интервала.

Применим к ряду  $\sum a_n x^n$  признак Коши (радикальный):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|q$$

Если предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$  существует, то согласно признаку ряд сходится абсолютно при  $|x| < 1/q$  и расходится при  $|x| > 1/q$ . Значит, число  $R = 1/q$  представляет собой радиус сходимости ряда. Итак,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (15.1)$$

Соотношение (15.1) известно как **формула Коши — Адамара**.

Предел в (15.1) может не существовать, тогда можно использовать более общую формулу

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (15.2)$$

Если использовать не признак Коши, а признак Даламбера, то получим еще одну формулу для радиуса сходимости:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

в которой также можно заменить обычный предел на верхний (если обычный не существует).

Применение формулы Коши — Адамара может приводить к ошибкам. Поэтому более предпочтительным является исследование степенного ряда непосредственно при помощи признака Коши или Даламбера.

**Пример 15.2.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k},$$

содержащий только четные степени. „Лобовое“ применение формулы Коши — Адамара к последовательности  $\{a_k\}$  приводит к пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n},$$

в то время как правильно применять эту формулу к последовательности

$$b_n = \begin{cases} a_k, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Это равносильно вычислению предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

(предел по нечетным членам последовательности равен 0). В результате предел  $\lim \sqrt[n]{a_n}$  дает неверный результат, если он отличен от 1. #

Радиус сходимости может быть нулевым. В этом случае область сходимости состоит из одного центра ряда. Радиус может быть и бесконечным, тогда область сходимости есть вся числовая ось.

**Пример 15.3.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$  расходится всюду, кроме точки 0, так как

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ , наоборот, сходится всюду на числовой оси, так как

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Теорема 15.2 (о равномерной сходимости).** Пусть  $R > 0$  — радиус сходимости степенного ряда  $\sum a_n x^n$ . Тогда на любом отрезке  $[-r, r]$ ,  $r < R$ , ряд  $\sum a_n x^n$  сходится равномерно.

◀ В точке  $r$  интервала сходимости ряд  $\sum a_n x^n$  сходится абсолютно, т.е. сходится ряд  $\sum |a_n| r^n$ . А так как  $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$  при  $x \in [-r, r]$ , то по признаку Вейерштрасса ряд на отрезке  $[-r, r]$  сходится равномерно. ▶

**Теорема 15.3 (вторая теорема Абеля).** Пусть ряд  $\sum a_n x^n$  имеет радиус сходимости  $R > 0$ . Если этот ряд сходится в точке  $R$  (точке  $-R$ ), то он сходится равномерно на любом отрезке  $[-r, R]$  (отрезке  $[-R, r]$ ),  $0 \leq r < R$ .

◀ Доказательство этого утверждения опирается на признак Абеля. Мы можем считать, что  $r = 0$ . В самом деле, например, для случая сходимости в точке  $R$  отрезок  $[r, R]$  содержится в  $[0, R]$  при  $r \geq 0$  и является объединением двух отрезков  $[r, 0]$  и  $[0, R]$  при  $r < 0$ . Но если ряд на каждом из двух множеств сходится равномерно, то он будет сходиться равномерно и на объединении этих множеств.

Положив  $\alpha_n(x) = a_n R^n$ ,  $\beta_n(x) = \left(\frac{x}{R}\right)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , получим, что ряд  $\sum \alpha_n(x)$  сходится равномерно на  $[0, R]$  (это просто числовой ряд), последовательность  $\{\beta_n(x)\}$  для каждого значения  $x \in [0, R]$  является монотонной и равномерно ограниченной на  $[0, R]$  (числом 1). По признаку Абеля ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \beta_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится на  $[0, R]$  равномерно. ▶

## 15.2. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Из изложенного ясно, что степенной ряд можно почленно интегрировать. Именно, если дан степенной ряд  $\sum a_n x^n$  с радиусом сходимости  $R > 0$ , то степенной ряд

$$\sum a_n \left( \int_0^x x^n dx \right) = \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

сходится равномерно на любом отрезке  $[-r, r]$ ,  $0 < r < R$ , причем

$$\sum a_n \left( \int_0^x x^n dx \right) = \int_0^x \left( \sum a_n x^n \right) dx.$$

Поскольку полученный в процессе почленного интегрирования ряд тоже является степенным, он по теореме 16.1 сходится на интервале  $(-R, R)$  абсолютно.

Остается неясным вопрос, может ли при интегрировании степенного ряда увеличиться радиус сходимости (из изложенного выше вытекает, что он не уменьшается)?

**Теорема 15.4.** Степенной ряд можно интегрировать почленно. При этом радиус сходимости проинтегрированного степенного ряда не изменяется.

◀ Нам осталось показать, что радиус сходимости степенного ряда при интегрировании не увеличивается. Пусть ряд  $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , полученный интегрированием ряда  $\sum a_n x^n$ , сходится в точке  $x_0$ . Тогда

$$|a_n x^n| = \left| a_n \frac{x_0^{n+1}}{n+1} \right| \frac{n+1}{|x_0|} \left( \frac{x}{x_0} \right)^n \leq M \frac{n+1}{|x_0|} q^n,$$

где  $M = \sup \left| a_n \frac{x_0^{n+1}}{n+1} \right|$ ,  $q = \frac{x}{x_0}$ . Нетрудно убедиться, что ряд  $\sum M \frac{n+1}{x_0} q^n$  сходится абсолютно при  $|q| < 1$ . Согласно признаку сравнения заключаем, что ряд  $\sum a_n x^n$  сходится при  $|x| < |x_0|$ , а это значит, что радиус сходимости исходного ряда не меньше, чем радиус сходимости проинтегрированного. ▶

**Теорема 15.5.** Если  $R$  — радиус сходимости степенного ряда  $\sum a_n x^n$ , то ряд  $\sum n a_n x^{n-1}$ , полученный почленным дифференцированием исходного, имеет тот же радиус сходимости  $R$  и, кроме того,

$$\left( \sum a_n x^n \right)' = \sum a_n (x^n)'. \quad (15.3)$$

◀ Это утверждение следует из предыдущей теоремы. Действительно, ряд  $\sum a_n x^n$  может быть получен из ряда  $\sum n a_n x^{n-1}$  почленным интегрированием. Значит радиусы сходимости этих двух рядов совпадают. При этом

$$\sum a_n x^n = \sum \left( \int_0^x n a_n \xi^{n-1} \right) = \int_0^x \left( \sum n a_n \xi^{n-1} \right).$$

Остается продифференцировать записанное равенство, и мы получим равенство (15.3). ▶

**Следствие 15.2.** Сумма степенного ряда является функцией, бесконечно дифференцируемой в интервале сходимости:  $\sum a_n x^n \in C^\infty(-R, R)$ .

### 15.3. Ряд Тейлора

**Теорема 15.6.** Если функция  $f(x)$  есть сумма ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ , сходящегося на интервале  $|x - x_0| < R$ , то  $f \in C^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$  и

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (15.4)$$

◀ Бесконечная дифференцируемость функции  $f$  констатируется следствием из предыдущей теоремы. Кроме того, из этой теоремы следует, что степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз в его интервале сходимости. Поэтому

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x - x_0)^n)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k} = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (x - x_0)^{n-k} = |n-k=m| = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (m+k)(m+k-1) \cdots (m+1) (x - x_0)^m \end{aligned}$$

Полагая  $x = x_0$ , получим  $f^{(k)}(x_0) = a_k k(k-1) \cdots 1$ , что равносильно (15.4). ▶

**Следствие 15.3.** Если  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ , то  $a_n = b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

◀ И коэффициенты  $a_n$ , и коэффициенты  $b_n$  определяются по формуле (15.4) одной и той же функцией, которая в окрестности точки  $x_0$  равна сумме каждого из рядов. ▶

**Определение 15.1.** Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

называют **рядом Тейлора** бесконечно дифференцируемой в окрестности точки  $x_0$  функции  $f(x)$ .

Очевидно, что бесконечная дифференцируемость функции является необходимым условием для разложения ее в ряд Тейлора. Если функция бесконечно дифференцируема, то ряд Тейлора для нее можно выписать, однако он может не сходиться к этой функции. Таким образом, условие бесконечной дифференцируемости функции не является достаточным для представления ее степенным рядом.

**Пример 15.4.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема всюду на действительной оси, ее производные  $f^{(n)}(0)$  в точке 0 все равны нулю. Следовательно, ее ряд Тейлора является тривиальным: все коэффициенты степенного ряда являются нулевыми. Сумма такого ряда есть тождественный нуль, что совпадает со значением функции только в точке 0. #

Чтобы убедиться в сходимости ряда Тейлора к самой функции  $f(x)$  нужно оценить по абсолютной величине разность  $r_n(x) = f(x) - S_n(x; f)$  между функцией и  $n$ -й частичной суммой ряда, взятой в произвольной точке  $x$ . Эта разность фигурирует в формуле Тейлора как остаток, который может быть записан в различной форме. Наиболее известна запись остатка в форме Лагранжа.

Отметим, что остаток в формуле Тейлора — это не есть остаток ряда Тейлора. Их совпадение, собственно, и означает, что функция равна сумме своего ряда Тейлора. Необходимым и достаточным условием такого совпадения является условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - S_n(x; f)) = 0, \quad (15.5)$$

которое должно выполняться в каждой точке  $x$  некоторой окрестности точки  $x_0$  — центра ряда Тейлора.

Отметим важный частный случай, когда выполняется сформулированный критерий (15.5).

**Теорема 15.7.** Пусть  $f \in C^\infty(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Если существует такая константа  $M > 0$ , что  $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) |f^{(n)}(x)| \leq M$ , то функция  $f(x)$  в интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  равна сумме своего ряда Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

◀ Запишем остаток  $r_n(x; f)$  формулы Тейлора в форме Лагранжа и оценим его абсолютную величину:

$$|r_n(x; f)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta \Delta x)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M \delta^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

где  $0 \leq \vartheta \leq 1$ ,  $\Delta x = x - x_0$  и  $|\Delta x| \leq \delta$ . Так как остаток стремится к 0 в каждой точке интервала  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , функция совпадает на этом интервале с суммой своего ряда Тейлора. ▶

## 15.4. Стандартные разложения в ряд Тейлора

Исходя из формулы Тейлора для основных элементарных функций, можно получить разложение этих функций в ряд Тейлора.

**Показательная функция  $e^x$ .** Так как для этой функции  $f^{(n)}(x) = e^x$ , заключаем, что в каждом интервале  $(-R, R)$  выполняется неравенство  $|f^{(n)}(x)| \leq M$ , где в качестве  $M$  можно взять  $M = e^R$ . Согласно теореме 16.7 получаем представление

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

верное в каждом интервале  $(-R, R)$ , а потому и на всей числовой оси.

**Тригонометрические функции.** Для тригонометрических функций  $\sin x$  и  $\cos x$  рассуждения те же, что и для показательной функции. Нужно воспользоваться формулами

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

из которых следует, что все производные функций  $\sin x$  и  $\cos x$  ограничены на всей числовой оси константой  $M = 1$ . Применение соответствующих формул Тейлора и теоремы 16.7 дает

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Степенная функция  $(1+x)^p$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .** Разложение этой функции в степенной ряд с центром в 0 возможно в только пределах интервала  $(-1, 1)$ , так как при действительных отрицательных  $p$  функция не определена в точке  $-1$ . Вычислим  $n$ -ю производную функции

$$[(1+x)^p]^{(n)} = p(p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1)(1+x)^{p-n}.$$

Поэтому ряд Тейлора для этой функции имеет вид

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Чтобы доказать, что степенная функция действительно равна сумме своего ряда Тейлора в интервале  $(-1, 1)$ , нужно использовать запись остатка не в форме Лагранжа, а в форме Коши

$$r_n(x; f) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta \Delta x)(1-\vartheta)^n}{n!} (x-x_0)^{n+1}.$$

В нашем случае

$$r_n(x; f) = p(p-1) \dots (p-n) \frac{(1+\vartheta x)^{p-n}(1-\vartheta)^n}{n!} x^{n+1} = p(p-1) \dots (p-n)(1+\vartheta x)^p \frac{(1-\vartheta)^n x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^n n!}.$$

При  $|x| < \delta < 1$  имеем

$$|r_n(x; f)| \leq |1+\vartheta x|^p \left| \frac{1-\vartheta}{1-\vartheta\delta} \right|^n \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n!(1-\delta)^{\min\{0,p\}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Если  $p$  является натуральным, то разложение функции  $(1+x)^p$  в ряд Тейлора приводит к биному Ньютона. Важен также частный случай  $p = -1$ , в котором мы приходим к формуле суммы геометрической прогрессии со знаменателем  $-x$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1). \quad (15.6)$$

Отметим также случай  $p = -2$ , в котором разложение имеет вид

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

**Логарифмическая функция**  $\ln(1+x)$ . Так как указанная функция не определена в точке  $-1$ , то разложение этой функции в степенной ряд с центром в  $0$  возможно только в пределах интервала  $(-1, 1)$ . Конкретный вид разложения можно получить интегрированием формулы (15.6)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

# Лекция 16

## ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Ортогональные системы в функциональных пространствах. Задача о наилучшем приближении. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Полные и замкнутые ортогональные системы. Тригонометрическая система функций.

### 16.1. Определение

Мы приступаем к изучению *тригонометрических рядов*, которые записываются в виде

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (16.1)$$

Исследование таких рядов может идти с различных точек зрения. Наиболее общий подход состоит в том, чтобы интерпретировать ряд (16.1) как ряд вида  $\sum \alpha_n f_n(x)$ , построенный по некоторой последовательности функций  $\{f_n\}$  и последовательности коэффициентов  $\{\alpha_n\}$ . Такой ряд является обобщением понятия *линейной комбинации* в линейной алгебре. Мы ограничимся некоторым линейным пространством функций (называемым также *функциональным пространством*). Рассмотрение разложений функций по базису наиболее просто, когда линейное пространство евклидово, а базис — ортонормированный.

Рассмотрим линейное пространство  $R[a, b]$  функций, определенных и интегрируемых на отрезке  $[a, b]$ . В этом пространстве определим *скалярное произведение* по формуле

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что в этом случае выполняются все *аксиомы скалярного произведения*, кроме последней. Последняя аксиома, утверждающая, что если  $\|f\| = 0$ , то  $f = 0$ , конечно, неверна. Из положения выходят, считая, что равны любые функции  $f$  и  $g$ , для которых

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b |f - g|^2 dx = 0.$$

Введенное нами евклидово пространство  $R[a, b]$  является бесконечномерным, так как ему принадлежат все функции  $x^n$ , любой конечный набор которых образует линейно независимую систему функций. Возьмем функции  $1, x, \dots, x^n$ . Тогда их линейной комбинацией  $\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$  является многочлен, который обращается в 0, только если всего его коэффициенты равны 0.

Функциональную последовательность  $\{f_n\}$ ,  $f_n \in R[a, b]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , называют *ортогональной системой*, если все функции этой последовательности попарно ортогональны, т.е.  $\langle f_n, f_m \rangle = 0$  для любой пары натуральных чисел  $n$  и  $m$ ,  $n \neq m$ . Если к тому же  $\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n \rangle = 1$  для каждой функции  $f_n$ , то такую последовательность называют *ортонормированной системой*.

**Пример 16.1.** Последовательность  $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots$  является ортогональной в пространстве  $R[-l, l]$ . Чтобы убедиться в этом, нужно вычислить попарные скалярные произведения:  $\langle \cos \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{m\pi x}{l} \rangle$ ,  $n \neq m$ ;  $\langle \sin \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{m\pi x}{l} \rangle$ ,  $n \neq m$ ;  $\langle \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{m\pi x}{l} \rangle$ ;  $\langle 1, \cos \frac{m\pi x}{l} \rangle$ ;  $\langle 1, \sin \frac{m\pi x}{l} \rangle$ . Например,

$$\begin{aligned} \langle \cos \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{m\pi x}{l} \rangle &= \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[ \cos \left( \frac{(n+m)\pi x}{l} \right) + \cos \left( \frac{(n-m)\pi x}{l} \right) \right] dx = \\ &= \frac{l}{n+m} \sin \left( \frac{(n+m)\pi x}{l} \right) \Big|_{-l}^l + \frac{l}{n-m} \sin \left( \frac{(n-m)\pi x}{l} \right) \Big|_{-l}^l = 0. \end{aligned}$$

Эта последовательность не является ортонормированной, так как квадрат нормы функции 1 равен  $2l$ , а квадраты норм для остальных функций все равны  $l$ . Ортонормированной будет следующая последовательность функций:

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{2\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots$$

**Пример 16.2.** Последовательность *многочленов Лежандра*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

является ортогональной системой в пространстве  $R[-1, 1]$ . Действительно,

$$\begin{aligned} 2^{n+m} n! m! \langle P_n, P_m \rangle &= \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n)} [(t^2 - 1)^m]^{(m)} dt = \\ &= [(t^2 - 1)^n]^{(n-1)} [(t^2 - 1)^m]^{(m)} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n-1)} [(t^2 - 1)^m]^{(m+1)} dt = \\ &= - \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n-1)} [(t^2 - 1)^m]^{(m+1)} dt, \end{aligned}$$

так как многочлен  $(t^2 - 1)^n$  имеет корни  $-1$  и  $1$  кратности  $n$ , и его производные до порядка  $n - 1$  включительно в этих точках обращаются в  $0$ .

Предполагая, что  $n > m$ , повторяем интегрирование по частям  $n$  раз и в конечном счете приходим к равенству

$$\langle P_n, P_m \rangle = \frac{(-1)^n}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n [(t^2 - 1)^m]^{(m+n)} dt.$$

Но  $(m+n)$ -я производная многочлена  $(t^2 - 1)^m$  степени  $2m$  равна  $0$ , так что под знаком интеграла стоит функция, которая тождественно равна нулю. Значит,  $\langle P_n, P_m \rangle = 0$ .

Если  $n = m$ , мы получаем

$$\|P_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1) [(t^2 - 1)^n]^{(2n)} dt = (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt.$$

Полученный интеграл интегрируем по частям и приходим к рекуррентному соотношению:

$$T_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt = t(t^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 - 2n \int_{-1}^1 t^2 (t^2 - 1)^{n-1} dt = -2n(T_n + T_{n-1}),$$

откуда

$$T_n = -\frac{2n}{2n+1} T_{n-1}.$$

Непосредственно убеждаемся, что  $T_1 = -4/3$ , а по рекуррентной формуле получаем значение интеграла:

$$T_n = 2(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2(-1)^n (2^n n!)^2}{2n+1 (2n)!}$$

Следовательно, многочлен  $P_n$  имеет квадрат нормы, равный  $\frac{2}{2n+1}$ . Система многочленов не является ортонормированной.

**Замечание.** Последовательность многочленов  $\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t)$  можно построить, если последовательность простейших мономов  $\{t^n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , подвергнуть процессу ортогонализации Грама — Шмидта.

## 16.2. Задача о наилучшем приближении

Пусть в пространстве  $R[a, b]$  задана ортогональная система из  $n$  функций  $f_1, \dots, f_n$  ( $n$  фиксировано). Поставим следующую задачу: для произвольной функции  $f \in R[a, b]$  найти такие коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , чтобы величина

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right\| \quad (16.2)$$

имела наименьшее значение. Другими словами, требуется найти такую линейную комбинацию функций  $f_1, \dots, f_n$ , которая наиболее близка к функции  $f$ . Такую задачу называют **задачей о наилучшем приближении**.

Рассмотрим квадрат величины (16.2). Его можно записать через скалярное произведение и преобразовать:

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, f - \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \right\rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - \left\langle f, \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \right\rangle - \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, f \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \right\rangle = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle f, f_i \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle f_i, f_j \rangle = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle f, f_i \rangle + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \|f_i\|^2. \quad (16.3) \end{aligned}$$

Мы получили, что квадрат нормы относительно неизвестных коэффициентов  $\alpha_i$  представляет собой многочлен 2-й степени от  $n$  переменных. Этот многочлен имеет точку минимума, которую можно найти обычным порядком, используя *необходимое условие локального экстремума*. Приравняв все частные производные нулю, получим систему уравнений:

$$2\alpha_i \|f_i\|^2 - 2\langle f, f_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

откуда

$$\alpha_i = \frac{\langle f, f_i \rangle}{\|f_i\|^2} \quad (16.4)$$

Если система  $f_1, \dots, f_n$  ортонормирована, формулы (16.4) упрощаются:

$$\alpha_i = \langle f, f_i \rangle.$$

Пусть задана бесконечная ортогональная система  $\{f_n\}$ . Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k, \quad (16.5)$$

коэффициенты  $\alpha_k$  которого вычисляются по формулам (16.4), обладает тем свойством, что его частичные суммы  $S_n(f)$  являются наилучшими приближениями функции  $f$ . Отсюда, в частности, следует, что последовательность норм  $\|f - S_n(f)\|$  монотонно убывает. Действительно, частичную сумму  $S_n(f)$  можно рассматривать как линейную комбинацию функций  $f_1, \dots, f_{n+1}$  с коэффициентами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0$  ( $\alpha_i$  вычисляются по формулам (16.4)), которая дает худшее приближение, чем линейная комбинация с коэффициентами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ , т.е. частичная сумма  $S_{n+1}(f)$ .

Ряд (16.5) называют **рядом Фурье** функции  $f$  по ортогональной системе  $\{f_k\}$ , а формулы (16.4), по которым вычисляются коэффициенты ряда Фурье, называют **формулами Эйлера — Фурье**.

### 16.3. Свойства ряда Фурье

**Теорема 16.1.** Если ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$  по ортогональной системе  $\{f_i\}$  сходится по норме к функции  $f$ , то коэффициенты  $\alpha_i$  этого ряда вычисляются по формулам (16.4).

◀ Пусть  $S_n$  — последовательность частичных сумм рассматриваемого ряда. При помощи неравенства Коши — Буняковского получаем оценку

$$|\langle f - S_n, f_i \rangle| \leq \|f - S_n\| \|f_i\| \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Однако при  $n > i$

$$\langle f - S_n, f_i \rangle = \langle f, f_i \rangle - \langle S_n, f_i \rangle = \langle f, f_i \rangle - \alpha_i \|f_i\|^2,$$

так что рассматриваемая последовательность  $|\langle f - S_n, f_i \rangle|$ , начиная с  $n = i + 1$ , является постоянной. Поэтому на самом деле при  $n > i$  выполняется равенство  $\langle f - S_n, f_i \rangle = 0$ , так как предел последовательности равен 0. Следовательно,

$$\langle f, f_i \rangle - \alpha_i \|f_i\|^2 = 0$$

и коэффициент  $\alpha_i$  равен коэффициенту Эйлера — Фурье функции  $f$ . ▶

**Теорема 16.2 (неравенство Бесселя).** Теорема 17.2 Если  $\{\alpha_n\}$  — последовательность коэффициентов Фурье для функции  $f \in R[a, b]$  по ортонормированной системе  $\{f_n\}$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$  сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq \|f\|^2$$

◀ Поскольку речь идет о знакоположительном ряде, нам достаточно доказать, что все частичные суммы  $S_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$  ограничены числом  $\|f\|^2$ . Тогда монотонная последовательность частичных сумм будет иметь предел, равный сумме ряда, который не превосходит  $\|f\|^2$ .

Рассмотрим норму разности между функцией и  $n$ -й частичной суммой ее ряда Фурье. Согласно (16.3) и формулам (16.4) получаем

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle f, f_i \rangle + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \|f_i\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \geq 0,$$

что равносильно утверждению теоремы. ▶

**Замечание 16.1.** Неравенство Бесселя легко переносится на произвольные ортогональные системы. В этом случае это неравенство имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|f\|^2.$$

**Замечание 16.2.** Отметим важное соотношение, которое мы получили при доказательстве теоремы. Если  $\alpha_i$  — коэффициенты Фурье функции  $f$  по ортонормированной системе  $\{f_i\}$ , то

$$\|f\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \right\|^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.6)$$

**Теорема 16.3 (равенство Парсеваля).** Теорема 17.3 Пусть  $\{\alpha_n\}$  — последовательность коэффициентов Фурье для функции  $f \in R[a, b]$  по ортонормированной системе  $\{f_n\}$ . Ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$  сходится к функции  $f$  тогда и только тогда, когда верно следующее **равенство Парсеваля**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \|f\|^2 \quad (16.7)$$

◀ Воспользуемся соотношением (16.6). Сходимость последовательности  $S_n(f)$  ряда Фурье функции  $f$  к самой функции означает, что  $\|f - S_n(f)\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Согласно (16.6), это равносильно соотношению  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \rightarrow \|f\|^2$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. равенству (16.7). ▶

## 16.4. Условия сходимости ряда Фурье к функции

Нельзя надеяться на то, что ряд Фурье данной функции  $f$  по произвольной ортогональной системе будет сходиться по норме к самой функции. Действительно, убрав из ортогональной системы одну функцию, мы, вообще говоря, получим другой ряд, так как из него уйдет одно слагаемое, и этот ряд не может иметь ту же сумму, что и исходный.

Это умозаключение наталкивает на мысль, что сто́ит рассматривать только такие ортогональные системы, которые нельзя расширить добавлением к ним новых функций. Такие ортогональные системы называют **полными**. Именно, ортогональная система  $\{f_n\}$  полна, если условие  $\langle f, f_n \rangle = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , выполняется только при  $f \equiv 0$ .

**Теорема 16.4.** Если каждая функция  $f \in R[a, b]$  является суммой своего ряда Фурье по данной ортогональной системе  $\{f_n\}$ , то эта система полна.

◀ Действительно, если для некоторой функции  $f$  верны соотношения  $\langle f, f_n \rangle = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то рядом Фурье функции  $f$  будет тривиальный ряд, у которого все коэффициенты равны 0. Сумма такого ряда, очевидно, равна 0, т.е. функция, равная сумме своего ряда Фурье, есть тождественный 0. ▶

Итак, полнота ортогональной системы является необходимым условием для представления всякой функции рядом Фурье. Чтобы получить достаточное условие, введем еще одно понятие. Ортогональную систему  $\{f_n\}$  называют **замкнутой**, если всевозможные конечные линейные комбинации функций системы плотны в  $R[a, b]$ , т.е. множество всех функций, которые можно представить в виде  $\sum_{i=1}^m c_i f_i$  с некоторым набором коэффициентов  $c_i$ , имеет замыкание в пространстве  $R[a, b]$ , совпадающее со всем пространством<sup>1</sup>.

**Теорема 16.5.** Для любой ортогональной системы  $\{f_n\}$  следующие условия эквивалентны:

- система  $\{f_n\}$  замкнута;
- любая функция есть сумма своего ряда Фурье;
- для любой функции  $f$  верно равенство Парсеваля.

◀ Эквивалентность второго и третьего условий доказана ранее. Докажем эквивалентность этих условий первому.

Если система  $\{f_n\}$  замкнута, то для произвольной функции  $f$  в любой ее окрестности  $U_\varepsilon(f) = \{h \in R[a, b]: \|h - f\| < \varepsilon\}$  имеется хотя бы одна линейная комбинация  $h = \sum_{i=1}^m c_i f_i$  функций системы. Но вспомним, что  $m$ -я частичная сумма  $S_m(f)$  ряда Фурье функции  $f$  обеспечивает наименьшее отклонение от  $f$ , т.е.  $\|f - S_m(f)\| \leq \|f - h\| < \varepsilon$ . Так как последовательность  $\{\|f - S_n(f)\|\}$  является монотонной, то, начиная с номера  $m$ , имеем  $S_m(f) \in U_\varepsilon(f)$ . Так как  $\varepsilon$  можно выбрать произвольным образом, последовательность  $S_n(f)$  сходится к функции  $f$ , т.е. эта функция равна сумме своего ряда Фурье.

Если любая функция  $f$  есть сумма своего ряда Фурье, то каждая такая функция является пределом последовательности частичных сумм ряда, которые представляют собой линейные комбинации функций ортогональной системы. Значит, в любой окрестности любой функции  $f$  содержатся линейные комбинации функций системы. Поэтому система функций  $\{f_n\}$  замкнута. ▶

Условие замкнутости для конкретной системы проверить сложно, введенное понятие, скорее, дает ориентир, как исследовать данную систему функций. Зачастую такое исследование требует привлечения некоторых тонких и неочевидных фактов из теории функций. Условие полноты системы функций проще, но оно является лишь необходимым.

Все рассказанное об ортогональных системах касалось конкретного функционального пространства  $R[a, b]$ , но на самом деле верно для произвольных бесконечномерных евклидовых пространств.

<sup>1</sup>Напомним, что замыкание множества получается присоединением к этому множеству всех его предельных точек.

Отметим, что замкнутая ортогональная система всегда полна, так как полнота вытекает из условия представимости любой функции рядом Фурье, равносильного замкнутости системы. В определенных евклидовых пространствах понятия замкнутости и полноты совпадают, т.е. полнота ортогональной системы в таком пространстве означает и ее замкнутость.

Пусть  $f \in R[a, b]$  и  $\sum \alpha_i f_i$  — ее ряд Фурье. Тогда последовательность  $S_n(f)$  частичных сумм этого ряда по норме евклидова пространства является **фундаментальной**, т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n, m > N \|S_n(f) - S_m(f)\| < \varepsilon$ . Действительно,

$$\|S_n(f) - S_m(f)\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^m \alpha_i f_i \right\|^2 = \sum_{i=n+1}^m \alpha_i^2,$$

и фундаментальность  $\{S_n(f)\}$  по норме следует из сходимости ряда  $\sum \alpha_i^2$ .

Сходящаяся последовательность всегда фундаментальна. Критерий Коши утверждает, что фундаментальная числовая последовательность сходится. Это утверждение легко распространяется на произвольные конечномерные евклидовы пространства, так как сходимость в конечномерном пространстве равносильна сходимости по координатам в фиксированном базисе. Однако в произвольном бесконечномерном пространстве фундаментальность уже не означает сходимость.

Евклидово пространство называют **полным**, если в этом пространстве любая фундаментальная последовательность сходится. Любое конечномерное евклидово пространство является полным. Бесконечномерное полное евклидово пространство называют **гильбертовым**. Рассмотренное ранее пространство  $R[a, b]$  не является полным, так как по норме пространства функциональная последовательность может сходиться к неограниченной функции, которая неинтегрируема по Риману. Например, пределом последовательности интегрируемых функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/n, \\ 1/x, & x \geq 1/n \end{cases}$$

является неограниченная функция  $1/x$ .

Проблема неполных евклидовых пространств решается при помощи их пополнения. Если  $E$  — неполное евклидово пространство, то можно построить такое полное евклидово пространство  $\tilde{E}$ , что  $E$  является линейным всюду плотным подпространством в  $\tilde{E}$ , причем скалярные произведения двух пространств на  $E$  совпадают. Построение такого линейного пространства  $\tilde{E}$  и называют пополнением  $E$ . Пополнение евклидова пространства  $R[a, b]$  есть гильбертово пространство  $L_2[a, b]$  функций, суммируемых с квадратом.

**Теорема 16.6.** В полном евклидовом пространстве всякая полная ортогональная система замкнута.

◀ Как уже было показано, последовательность частичных сумм ряда Фурье по ортогональной системе  $\{\varphi_n\}$  произвольного элемента  $f$  евклидова пространства  $E$  является фундаментальной по норме пространства. Если  $E$  полно, то это означает сходимость ряда Фурье к некоторому элементу  $f_0$ . При этом ряд Фурье элемента  $f$  является и рядом Фурье своей суммы  $f_0$ , т.е.  $\langle f, \varphi_n \rangle = \langle f_0, \varphi_n \rangle$ . Положим  $g = f - f_0$ . Тогда

$$\langle g, \varphi_n \rangle = \langle f - f_0, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle - \langle f_0, \varphi_n \rangle = 0,$$

т.е. элемент  $g$  ортогонален всем элементам  $\varphi_n$ . Если система  $\{\varphi_n\}$  полна, то для любого элемента  $f$  заключаем, что  $g = 0$ . Но тогда  $f = f_0$  и элемент  $f$  есть сумма своего ряда Фурье. Согласно теореме 17.5, это равносильно замкнутости системы  $\{\varphi_n\}$ . ▶

## 16.5. Тригонометрическая система

**Тригонометрической системой** называют систему функций  $1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$ , рассматриваемую на отрезке  $[-l, l]$ . Эта система ортогональна, но не является ортонормированной:

$$\|1\|^2 = 2l, \quad \left\| \cos \frac{n\pi x}{l} \right\|^2 = \left\| \sin \frac{n\pi x}{l} \right\|^2 = l.$$

Она замкнута и, следовательно, полна (это будет доказано позже). Ряд Фурье произвольной функции  $f$  по этой системе записывается следующим образом:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

где коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  определяются по формулам Эйлера — Фурье:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, \dots, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Неравенство Бесселя в данном случае имеет вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx$$

и фактически является равенством (равенством Парсеваля) в силу свойства замкнутости.

**Задача.** Является ли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$  рядом Фурье какой-либо функции?

# Лекция 17

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Теорема о равномерной сходимости. Гладкость функции и скорость сходимости ряда Фурье. Условия сходимости ряда Фурье в точке. Разложение четных и нечетных функций. Разложение функций по косинусам и синусам. Разложение на произвольном отрезке.

Наряду с понятиями сходимости тригонометрических рядов Фурье в среднем квадратичном (т.е. по норме, введенной в евклидовом пространстве  $R[a, b]$ ) важное значение имеют поточечная и равномерная сходимости. Однако, записав ряд Фурье данной функции, мы априори не можем утверждать, что этот ряд сходится к функции хотя бы в одной точке. Сходимость в среднем квадратичном дает лишь уверенность, что по ряду Фурье можно восстановить функцию. Это восстановление упрощается, если ряд Фурье сходится к функции поточечно, а еще лучше, равномерно.

### 17.1. О равномерной сходимости ряда Фурье

**Теорема 17.1.** Если тригонометрический ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (17.1)$$

сходится равномерно на отрезке  $[-l, l]$  к некоторой функции  $f(x)$ , то он является рядом Фурье функции  $f(x)$  и, следовательно, сходится к  $f(x)$  в среднем квадратичном.

◀ Отметим, что равномерный предел интегрируемых функций есть интегрируемая функция<sup>1</sup>. Учитывая это, мы получим утверждение теоремы, доказав, что из равномерной сходимости вытекает сходимость к той же функции в среднем квадратичном.

Пусть последовательность  $S_n(x)$  (в нашем случае это последовательность частичных сумм тригонометрического ряда) сходится на отрезке  $[-l, l]$  равномерно к некоторой функции  $S(x)$ . Это значит, что

$$\sup_{x \in [-l, l]} |S_n(x) - S(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Используя это, находим

$$\|S_n(x) - S(x)\|_2^2 = \int_{-l}^l (S_n(x) - S(x))^2 dx \leq \int_{-l}^l \sup_{x \in [-l, l]} (S_n(x) - S(x))^2 dx = 4l^2 \sup_{x \in [-l, l]} (S_n(x) - S(x))^2.$$

Следовательно,

$$\|S_n(x) - S(x)\|_2 \leq 2l \sup_{x \in [-l, l]} (S_n(x) - S(x)).$$

Из последнего неравенства вытекает, что если последовательность  $\{S_n(x)\}$  сходится к  $S(x)$  на  $[-l, l]$  равномерно, то сходится и в среднем квадратичном. Согласно теореме 17.1 тригонометрический ряд есть ряд Фурье своей суммы в смысле сходимости в среднем квадратичном. ►

О равномерной сходимости ряда Фурье можно судить непосредственно по его виду. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty,$$

<sup>1</sup>В нашем случае такое сильное утверждение не нужно, так как члены тригонометрического ряда непрерывны, а равномерный предел непрерывных функций есть непрерывная функция.

то ряд Фурье (17.1) сходится равномерно. Это вытекает непосредственно из признака Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда, так как

$$\left| a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right| \leq |a_n| + |b_n|, \quad n = 1, 2, \dots$$

## 17.2. Порядок малости коэффициентов и дифференцируемость

**Теорема 17.2.** Если

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{p+\varepsilon}}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{p+\varepsilon}}\right),$$

где  $p$  — натуральное число, то ряд (17.1) сходится на отрезке  $[-l, l]$  к функции  $f(x)$ , имеющей  $p - 1$  непрерывную производную.

◀ Условия теоремы позволяют применить последовательно  $p - 1$  раз теорему о почленном дифференцировании функционального ряда. При каждом дифференцировании мы получаем равномерно сходящийся ряд, что означает законность почленного дифференцирования. Последнее  $(p - 1)$ -е дифференцирование дает равномерно сходящийся ряд, сумма которого является непрерывной функцией. Эта сумма есть  $(p - 1)$ -я производная суммы исходного ряда. ▶

Отметим, что сумма тригонометрического ряда, сходящегося поточечно на отрезке  $[-l, l]$ , есть периодическая с периодом  $2l$  функция, так как все члены ряда имеют период  $2l$ , а сходимость будет на всей числовой оси. Поэтому, например, функция  $f(x) = x$ , рассматриваемая на отрезке  $[-l, l]$ , несмотря на всю свою гладкость, не может быть суммой своего ряда Фурье на всем отрезке. Действительно, сумма ряда Фурье этой функции есть периодическая функция  $S(x)$ , которая удовлетворяет условию  $S(-l) = S(l)$ . Но  $f(l) \neq f(-l)$ .

Итак, говоря о представимости функции своим рядом Фурье, мы должны предполагать либо периодичность функции, либо равенство значений функции на концах отрезка. Последнее позволяет продолжить функцию как периодическую на всю числовую ось. Отметим, что изменение функции в одной или конечном числе точек не повлияет на ее ряд Фурье, так как коэффициенты этого ряда выражаются интегралами. Поэтому на самом деле мы всегда можем считать выполненным условие периодичности, изменяя, если нужно, значения функции на концах отрезка. Но при этом периодическое продолжение функции может оказаться разрывным в точках  $(2k + 1)l$ , где  $k$  — любое целое.

**Теорема 17.3.** Если периодическая с периодом  $2l$  функция  $f(x)$  имеет непрерывную  $(p - 1)$ -ю производную, являющуюся кусочно непрерывно дифференцируемой функцией, то для ее коэффициентов Фурье верны соотношения

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

◀ Из формул Эйлера — Фурье, используя дифференцируемость функции и формулу интегрирования по частям, получаем для  $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f(x) d \sin \frac{n\pi x}{l} = \\ &= \frac{1}{n\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_{-l}^l - \frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{l}{n\pi} b_n^{(1)}, \end{aligned}$$

где  $b_n^{(1)}$  — синус-коэффициент функции  $f'(x)$ . Аналогично

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi} a_n^{(1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Повторяя процедуру интегрирования по частям, получаем соотношение

$$c_n = \pm \frac{l^p}{(n\pi)^p} c_n^{(p)}$$

где символ  $c$  использован для общего обозначения коэффициентов,  $c_n^{(p)}$  обозначает соответствующий коэффициент Фурье функции  $f^{(p)}(x)$ , являющейся кусочно непрерывной функцией. Для такой функции, согласно неравенству Бесселя,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n^{(p)}|^2 + |b_n^{(p)}|^2) < +\infty.$$

Поэтому  $|c_n^{(p)}| \leq M < +\infty$  как сходящаяся к нулю последовательность, а для коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  получаем нужное соотношение. ►

**Замечание 17.1.** Две доказанные теоремы имеют зазор в две единицы: если  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ , то  $f \in C^{p-2}$ , а если  $f \in C^p$ , то  $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ . Этот зазор, к сожалению, неустраним. Однако примеры, подтверждающие этот тезис, построить непросто. Мы их приводить не будем.

Тем не менее, на практике эти две теоремы позволяют судить о порядке малости коэффициентов Фурье по виду функции. Пусть функция  $f(x)$  кусочно непрерывна, причем всюду имеет кусочно непрерывные производные первого и второго порядка (в точках разрыва односторонние производные<sup>2</sup>). Тогда функцию можно представить в виде  $f(x) = f_0(x) + l(x)$ , где  $f_0(x)$  — дважды непрерывно дифференцируема, а  $l(x)$  кусочно линейная функция, которая, возможно, имеет разрывы первого рода. Коэффициенты Фурье функции  $f_0(x)$ , согласно теореме 18.3, имеют порядок  $1/n^2$ , в то время как порядок коэффициентов Фурье функции  $l(x)$  равен  $1/n$  (это проверяется непосредственно). Значит, функция  $f(x)$  имеет коэффициенты Фурье порядка  $1/n$ .

Если функция  $f(x)$  имеет непрерывную производную (с учетом условия периодичности), а вторая производная кусочно непрерывна, то коэффициенты Фурье будут иметь порядок малости  $1/n^2$ .

**Замечание 17.2.** Доказанных теорем достаточно, чтобы обосновать замкнутость тригонометрической системы в евклидовом пространстве  $R[-l, l]$  и его пополнении. В самом деле, интеграл любой интегрируемой функции аппроксимируется своей интегральной суммой, т.е. для любого  $\varepsilon$  можно выбрать разбиение отрезка так, что

$$\left| \int_{-l}^l f(x) dx - \sum_{k=1}^m f(\xi_k) \Delta x_k \right| < \varepsilon.$$

Но указанная интегральная сумма может рассматриваться как интеграл кусочно постоянной функции

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(\xi_1), & x_0 \leq x \leq x_1; \\ f(\xi_2), & x_1 < x \leq x_2; \\ \dots & \dots \\ f(\xi_n), & x_{n-1} < x \leq x_n. \end{cases}$$

Выбрав в качестве точек  $\xi_k$  те, в которых достигается минимум  $f(x)$  на отрезке  $[x_{k-1}, x_k]$ , получим

$$\left| \int_{-l}^l f(x) dx - \int_{-l}^l \tilde{f}(x) dx \right| = \left| \int_{-l}^l [f(x) - \tilde{f}(x)] dx \right| = \int_{-l}^l |f(x) - \tilde{f}(x)| dx < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\int_{-l}^l |f(x) - \tilde{f}(x)|^2 dx \leq \max_{[-l, l]} |f(x) - \tilde{f}(x)| \int_{-l}^l |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \leq 2M\varepsilon,$$

где  $M$  — верхняя грань функции  $|f(x)|$ . Таким образом, для любой интегрируемой функции  $f(x)$  можно выбрать кусочно постоянную функцию  $\tilde{f}(x)$ , отличающуюся от  $f(x)$  по норме на сколь угодно малую величину.

<sup>2</sup>Таковы составные функции, совпадающие с элементарными функциями на частичных интервалах области определения.

Любая кусочно постоянная функция есть линейная комбинация функций вида

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta], \end{cases}$$

где  $-l \leq \alpha \leq \beta \leq l$ . Но любую подобного вида функцию можно изменить в малой окрестности точек  $\alpha$  и  $\beta$  так, что получится бесконечнодифференцируемая функция (рис. 17.1). При этом разность исходной и модифицированной функций может быть сколь угодно мала по норме.

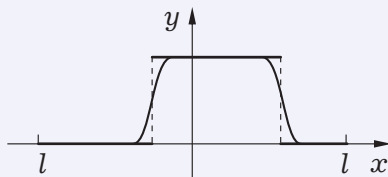


Рис. 17.1

Бесконечнодифференцируемая функция есть сумма своего ряда Фурье, как следует из теорем 18.1 и 18.3. Значит, ее можно аппроксимировать частичными суммами ряда Фурье, являющимися линейными комбинациями тригонометрической системы.

Итак, получилась цепочка последовательных приближений (рис. 17.2).



Рис. 17.2

### 17.3. Условия сходимости ряда Фурье в точке

Частичные суммы можно представить в интегральной форме, если в соответствующую сумму вместо коэффициентов Фурье подставить их выражения по формулам Эйлера — Фурье.

Для упрощения рассмотрим частный случай  $l = \pi$ . В сумму

$$S_N(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

подставим интегральные формулы для коэффициентов. Получим

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \left( \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kt dt + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kt dt \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos k(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(x-t) \right) dt. \end{aligned}$$

Выражение в скобках, зависящее от  $x-t$ , определяет функцию

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos kt. \quad (17.2)$$

Так как

$$\sum_{k=1}^N \cos k\alpha = \frac{1}{2\sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^N 2\sin \frac{\alpha}{2} \cos k\alpha = \frac{1}{2\sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^N \left[ \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \alpha - \sin \left( k - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] = \frac{\sin \left( N + \frac{1}{2} \right) \alpha - \sin \frac{\alpha}{2}}{2\sin \frac{\alpha}{2}},$$

закключаем, что

$$D_N(t) = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Поэтому

$$S_N(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)(x-t)}{2 \sin \frac{x-t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Функцию  $D_N(t)$  называют **ядром Дирихле**. Через эту функцию частичные суммы ряда Фурье представляются следующим образом:

$$S_N(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt.$$

Ядро Дирихле обладает двумя важнейшими свойствами:

- ядро Дирихле — четная и периодичная (период  $2\pi$ ) функция;
- $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) dt = 1$ .

Первое свойство вытекает из вида ядра Дирихле. Второе свойство нетрудно проверить непосредственно, проинтегрировав сумму (17.2). Это свойство можно также интерпретировать как представление рядом Фурье функции  $h(x) \equiv 1$ . Эта функция входит в тригонометрическую систему, и поэтому ее ряд Фурье содержит единственное ненулевое слагаемое. Очевидно, что он сходится всюду, причем все частичные суммы, начиная со второй одинаковы и равны сумме ряда, т.е. самой функции.

**Лемма 17.1 (лемма Римана).** Для любой интегрируемой на отрезке  $[a, b]$  функции  $f$  и любого числа  $p$  верно соотношение

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(px) dx = 0.$$

◀ Если  $f(x)$  непрерывно дифференцируема, то, интегрируя по частям, получаем:

$$\int_a^b f(x) \sin(px) dx = -\frac{1}{p} \int_a^b f(x) d(\cos(px)) = -\frac{1}{p} f(x) \cos(px) \Big|_a^b + \frac{1}{p} \int_a^b f'(x) \cos(px) dx.$$

Следовательно,

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(px) dx \right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{p} + \frac{1}{p} \int_a^b |f'(x)| dx \leq \frac{M(b-a+2)}{p} \rightarrow 0$$

при  $p \rightarrow \infty$ , где  $M$  — общая верхняя грань функций  $|f(x)|$  и  $|f'(x)|$ .

Для произвольной функции  $f \in R[a, b]$  и любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такую непрерывно дифференцируемую функцию  $h(x)$ , что  $\|f - h\| < \varepsilon$ . Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(px) dx \right| &\leq \left| \int_a^b h(x) \sin(px) dx \right| + \left| \int_a^b (f(x) - h(x)) \sin(px) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^b h(x) \sin(px) dx \right| + \|f - h\| \|\sin(px)\|. \end{aligned}$$

Так как утверждение верно для функции  $h(x)$ , величина

$$\left| \int_a^b h(x) \sin(px) dx \right|$$

будет меньше  $\varepsilon$ , начиная с некоторого номера. Значит,

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(px) dx \right| \leq (1 + \|\sin(px)\|)\varepsilon,$$

начиная с некоторого номера. Но это равносильно существованию нулевого предела. ►

**Замечание 17.3.** Если  $a = -l$ ,  $b = l$ ,  $p = \frac{n\pi}{l}$ , то интеграл под знаком предела в лемме Римана дает значение коэффициентов Фурье (с точностью до числового множителя). В этом частном случае равенство предела нулю вытекает из свойства коэффициентов Фурье, стремящихся к нулю при возрастании номера.

**Теорема 17.4 (Дини).** Теорема 18.4 Пусть интегрируемая на  $[-\pi, \pi]$  функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0 \in [-\pi, \pi]$  разрыв первого рода и в этой точке для некоторого  $\delta > 0$  выполнены *условия Дини*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)|}{t} dt < +\infty.$$

Тогда ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится в точке  $x_0$  к значению

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

◀ Доказательство сводится к использованию интегрального представления частичных сумм ряда Фурье и к анализу этого представления.

Итак,

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt = \int_{-\pi}^0 f(x-t) D_N(t) dt + \\ &+ \int_0^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt = \int_0^{\pi} [f(x-t) + f(x+t)] D_N(t) dt. \end{aligned}$$

Из свойств ядра Дирихле вытекает тождество

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} D_N(t) dt = \int_0^{\pi} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)] D_N(t) dt.$$

Вычитая это тождество из представления  $S_N(f)$ , получаем

$$\begin{aligned} S_N(f) - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} &= \\ &= \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x+0)] D_N(t) dt + \int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x-0)] D_N(t) dt. \quad (17.3) \end{aligned}$$

Рассмотрим один из этих двух похожих интегралов, например первый. Для него имеем

$$\int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x+0)] D_N(t) dt = \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( N + \frac{1}{2} \right) t dt.$$

Так как функция

$$\varphi_+(t) = \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

интегрируема на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , по лемме Римана приходим к выводу, что интеграл стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Аналогичное утверждение верно и для второго интеграла в (17.3). Значит,

$$S_N(f) - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ . ►

**Следствие.** Если интегрируемая на  $[-\pi, \pi]$  функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то ряд Фурье этой функции в точке  $x_0$  сходится к значению  $f(x_0)$ .

◀ Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = f'(x_0).$$

Поэтому условия Дини в точке  $x_0$  выполнены и можно применить теорему Дини. ►

**Замечание 17.4.** Из доказанной теоремы вытекает, что если функция  $f$  в точках  $-\pi$  и  $\pi$  имеет односторонние производные, то ряд Фурье в этих точках сходится к значению  $\frac{1}{2}[f(-\pi) + f(\pi)]$ . По условиям периодичности функции  $f$  правосторонний предел в точке  $-\pi$  следует рассматривать как правосторонний предел и в точке  $\pi$ , и аналогично трактуется левосторонний предел.

**Замечание 17.5.** Из теоремы Дини получаем следующее. Если интегрируемые функции  $f(x)$  и  $g(x)$  совпадают в окрестности точки  $x_0$ , то их разность  $f(x) - g(x)$ , равная нулю в окрестности  $x_0$ , удовлетворяет условиям теоремы Дини. Ряд Фурье разности функций сходится к нулю в точке  $x_0$ . Таким образом, ряды Фурье функций  $f(x)$  и  $g(x)$  сходятся или расходятся одновременно, причем, если сходятся, то к одному и тому же значению.

Описанное свойство означает, что поведение ряда Фурье функции в фиксированной точке определяется поведением функции в окрестности этой точки, а характер функции в удаленных точках на ряд Фурье в данной точке совершенно не влияет. Поэтому это свойство иногда называют локальностью ряда Фурье.

**Теорема 17.5 (Дирихле).** Ряд Фурье функции  $f$  ограниченной вариации сходится в каждой точке  $x \in [-\pi, \pi]$  к значению

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}. \quad (17.4)$$

Эта теорема дается без доказательства. Однако отметим, что функция  $f(x)$  имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда представима в виде разности двух монотонных функций. Из этого критерия нетрудно заключить, что функция ограниченной вариации в каждой точке имеет односторонние пределы и, следовательно, в каждой точке отрезка  $[-\pi, \pi]$  определено выражение (17.4).

**Следствие.** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет *условиям Дирихле*:

- функция  $f(x)$  кусочно непрерывна на  $[-\pi, \pi]$ ;
- функция  $f(x)$  кусочно монотонна на  $[-\pi, \pi]$ .

Тогда ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится всюду на  $[-\pi, \pi]$  к значению (17.4).

◀ Условие кусочной монотонности означает, что отрезок  $[-\pi, \pi]$  можно разбить на конечное число отрезков так, что на каждом частичном отрезке функция монотонна. Нетрудно увидеть, что при заданных условиях функция  $f(x)$  имеет ограниченную вариацию. ►

## 17.4. Ряд Фурье по косинусам (синусам) кратных углов

Если функция  $f(x)$  определена на  $[-l, l]$  и четна, то ее синус-коэффициенты Фурье равны нулю, так как их значение определяется интегралом от нечетной функции по симметричному промежутку. Аналогично косинус-коэффициенты Фурье для нечетной функции также равны нулю. В этих случаях формулы для ненулевых коэффициентов можно модифицировать, используя значения функции только на половине отрезке, например правой. Для четной функции:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

для нечетной функции:

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим, на отрезке  $[0, l]$  определена функция  $f(x)$ . Ее можно продолжить на симметричный отрезок  $[-l, l]$  двумя способами: четным способом  $f(x) = f(-x)$ ,  $x \in [-l, 0)$ , и нечетным способом  $f(x) = -f(-x)$ ,  $x \in [-l, 0)$  (в последнем случае нужно также изменить на 0 значение при  $x = 0$ ). Если исходная функция была интегрируема на отрезке  $[0, l]$ , то продолженная функция будет интегрируемой на отрезке  $[-l, l]$ . Значит, ее можно представить рядом Фурье, который сходится к функции в среднем квадратичном. Но при четном продолжении в этом ряде будут присутствовать только слагаемые с косинусами:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

коэффициенты в которых можно вычислять по формулам

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.5)$$

Если же было выбрано нечетное продолжение, то функция будет представлена рядом

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

коэффициенты которого можно вычислять по формулам

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17.6)$$

Сказанное означает, что на отрезке  $[0, l]$  системы функций  $\cos \frac{n\pi x}{l}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и  $\sin \frac{n\pi x}{l}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , замкнуты. Нетрудно убедиться, что эти системы являются на  $[0, l]$  ортогональными, а формулы (17.5) и (17.6) представляют собой формулы Эйлера — Фурье для этих систем.

## 17.5. Разложение функции на произвольном отрезке

Пусть функция  $f(x)$  определена и интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Тогда ее можно продолжить периодически на всю числовую ось, переопределив, если необходимо, в концах отрезка. Продолженную функцию можно представить рядом Фурье с периодом  $T = 2l = b - a$ . При этом, в силу периодичности

и продолженной функции  $f(x)$ , и тригонометрических функций,

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{b-a} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Итак, на любом отрезке  $[a, b]$  есть замкнутая система функций

$$1, \cos \frac{2\pi x}{b-a}, \sin \frac{2\pi x}{b-a}, \cos \frac{4\pi x}{b-a}, \sin \frac{4\pi x}{b-a}, \dots, \cos \frac{2n\pi x}{b-a}, \sin \frac{2n\pi x}{b-a}, \dots$$

Несложно убедиться, что эта система ортогональна.

## 17.6. Комплексная форма записи ряда Фурье

Можно расширить понятие линейного пространства, допуская, что его элементы могут умножаться не только на действительные числа, но и на комплексные. В результате возникает понятие **линейного пространства над полем комплексных чисел**, или, короче, **комплексного линейного пространства**. Аксиомы в таком линейном пространстве те же, что и в действительном линейном пространстве. Однако аксиомы скалярного произведения немного другие: вместо коммутативности скалярного произведения используется аксиома  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$ , где черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Линейное пространство с таким измененным скалярным произведением называют **эрмитовым** или **унитарным пространством**.

Примеры комплексных линейных пространств дают функциональные пространства, элементами которых являются функции действительного переменного с комплексными, вообще говоря, значениями. Комплекснозначная функция интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируемы ее действительная и мнимая части. В линейном пространстве  $R^c[a, b]$  комплекснозначных интегрируемых функций скалярное произведение можно ввести следующим образом:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Представление функции  $f$  ее тригонометрическим рядом Фурье можно рассматривать в рамках унитарного пространства  $R^c[-l, l]$ . Это позволяет при помощи формул Эйлера перейти от тригонометрических функций к показательной функции. Действительно,

$$\cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} + e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2}, \quad \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{e^{\frac{in\pi x}{l}} - e^{-\frac{in\pi x}{l}}}{2i}.$$

Поэтому тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

можно записать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (a_n - ib_n) e^{\frac{in\pi x}{l}} + (a_n + ib_n) e^{-\frac{in\pi x}{l}} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}},$$

где

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n > 0; \\ \frac{a_0}{2}, & n = 0; \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & n < 0. \end{cases}$$

Коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  выражаются через коэффициенты  $c_n$  следующим образом:

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ряд  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l}$  называют *тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме*.

Его коэффициенты могут быть найдены по формулам

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (17.7)$$

что можно записать через скалярное произведение в комплексном пространстве:

$$c_n = \frac{\langle f, e^{\frac{in\pi x}{l}} \rangle}{\|e^{\frac{in\pi x}{l}}\|^2},$$

так как

$$\|e^{\frac{in\pi x}{l}}\|^2 = \int_{-l}^l e^{\frac{in\pi x}{l}} e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx = \int_{-l}^l dx = 2l.$$

Формулы (17.7) вытекают из формул Эйлера — Фурье для произвольной ортогональной системы, но могут быть получены и из формул Эйлера — Фурье для тригонометрической системы. Например, при  $n > 0$  имеем:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx - \frac{i}{2l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left( \cos \frac{n\pi x}{l} - i \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx. \end{aligned}$$

## Лекция 18

# ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Предельный переход в ряде Фурье. Обоснование интеграла Фурье. Интеграл Фурье четных и нечетных функций. Косинус- и синус-преобразования Фурье. Комплексная форма записи. Интегральное преобразование Фурье и его основные свойства. Преобразование Фурье дельта-функции Дирака.

Рассмотрим ряд Фурье функции  $f$  на произвольном отрезке  $[-l, l]$ :

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Подставим в него формулы для коэффициентов:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \cos \frac{n\pi x}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt + \sin \frac{n\pi x}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt \right] = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l} (x-t) dt \right]. \end{aligned}$$

Если  $f(x)$  абсолютно интегрируема на числовой оси, то при  $l \rightarrow \infty$  первый интеграл сходится к нулю. Оставшаяся часть напоминает интегральную сумму, составленную для разбиения положительной полуоси на равные интервалы длиной  $\pi/l$ . Это, конечно, не интегральная сумма, так как такая сумма составляется для конечного интервала, но если пренебречь строгостью, то в пределе при  $l \rightarrow \infty$  мы приходим к интегралу от функции

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt$$

и представлению исходной функции в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt. \quad (18.1)$$

Интеграл в правой части (18.1) называют **интегралом Фурье**, а само равенство (18.1) — **формулой Фурье**.

Формула Фурье может быть доказана путем указанного предельного перехода, который мы не обосновали. Однако проще поступить по-другому. Вспомним, что представление функции рядом Фурье было получено подстановкой интегралов вместо коэффициентов Фурье и перестановкой интегралов со знаком суммы. Здесь мы вместо знака суммы имеем второй интеграл. Переставим в повторном интеграле пределы интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^{\infty} \cos(y(x-t)) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \cdot \frac{\sin(y(x-t))}{x-t} \Big|_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Мы получили некорректное выражение, говорящее о том, что вот так „в лоб“ менять порядок интегрирования в несобственном интеграле нельзя. Попробуем поступить немного иначе:

$$\int_0^T dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \cdot \frac{\sin(y(x-t))}{x-t} \Big|_0^T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(T(x-t))}{x-t} dt.$$

Получился интеграл, весьма близкий к тому, который мы анализировали при доказательстве теоремы Дини и который можно рассматривать как аналог интеграла, представляющего с помощью ядра Дирихле частичные суммы ряда Фурье. Далее используем прежнюю схему. Разбиваем интеграл Фурье на два:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(T(x-t))}{x-t} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) \frac{\sin(Tt)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} f(x+t) \frac{\sin(Tt)}{t} dt + \int_0^{\infty} f(x-t) \frac{\sin(Tt)}{t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(Tt)}{t} dt. \end{aligned}$$

Отметим без доказательства, что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(Tt)}{t} dt = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(T(x-t))}{x-t} dt - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[f(x+t) - f(x+0)]}{t} \sin(Tt) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[f(x-t) - f(x-0)]}{t} \sin(Tt) dt. \end{aligned}$$

Итак, оцениваемая разность свелась к двум однотипным интегралам вида

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) \sin(Tt) dt.$$

Если функция  $\varphi$  абсолютно интегрируема, то указанный интеграл сходится к нулю при  $T \rightarrow \infty$ . Отметим, что если  $T = n\pi/l$  и функция  $\varphi(t)$  равна нулю вне отрезка  $[0, l]$ , то этот интеграл дает  $n$ -й коэффициент Фурье этой функции на отрезке  $[-l, l]$ . Последовательность коэффициентов Фурье интегрируемой функции стремится к нулю. Это, разумеется, лишь ассоциация и ничего всерьез не доказывает. Доказательство же проводится модификацией леммы Римана.

Итак, изложен эскиз вывода интеграла Фурье, в котором не были проверены утверждения:

1) возможность перестановки пределов интегрирования в несобственном интеграле (после замены одного из пределов на  $T$  интеграл остался несобственным);

2) равенство  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(Tt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ ;

3) лемма Римана, согласно которой  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \varphi(t) \sin(Tt) dt = 0$  для абсолютно интегрируемой функции  $\varphi$ .

Окончательный результат такой.

**Теорема 18.1 (Дини).** Если в точке  $x$  абсолютно интегрируемая функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Дини

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{t} \right| dt < +\infty,$$

то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (18.2)$$

**Теорема 18.2 (Дирихле).** Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на  $\mathbb{R}$  и удовлетворяет условиям Дирихле (кусочно непрерывна и кусочно монотонна на любом конечном отрезке), то в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$  верно представление (18.2).

## 18.1. Четные и нечетные функции

Для четных и нечетных функций, как и в рядах Фурье, интеграл Фурье можно упростить. Если  $f(x)$  четна, то

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos xy \cos ty + \sin xy \sin ty] dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} f(t) \cos xy \cos ty dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xy dy \int_0^{\infty} f(t) \cos ty dt. \end{aligned}$$

Формула Фурье распадается на две симметричные формулы:

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ty dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(y) \cos xy dx, \quad (18.3)$$

По существу, это одна и та же формула, определяющая в линейном пространстве абсолютно интегрируемых функций линейный оператор, а представление функции интегралом Фурье означает, что указанный оператор является обратным самому себе.

Разумеется, четные функции можно получать как четное продолжение функций, определенных на промежутке  $[0, +\infty)$ . Значит, формулы (18.3) верны для любой функции на  $[0, +\infty)$ . Указанный линейный оператор называют **косинус-преобразованием Фурье**.

Для нечетных функций на  $\mathbb{R}$  или функций на  $[0, +\infty)$ , продолженных нечетным образом, рассуждая аналогично, получаем **синус-преобразование Фурье**:

$$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ty dt, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(y) \sin xy dx. \quad (18.4)$$

## 18.2. Симметричная форма интеграла Фурье

Симметричная форма интеграла Фурье, аналогичная косинус- или синус-преобразованию Фурье, в общем случае может быть получена в классе комплекснозначных функций. Отметим, что в силу четности косинуса

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt = \left| y = -z \right| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 dz \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(z(x-t)) dt.$$

Поэтому формулу Фурье можно переписать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(y(x-t)) dt.$$

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(x-t)) dt, \quad (18.5)$$

если сходится, равняется нулю как интеграл от нечетной функции на симметричном промежутке. Но в любом случае

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(y(x-t)) dt = 0.$$

Величину

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \varphi(x) dx$$

называют **главным значением несобственного интеграла**  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$ . Таким образом, интеграл (18.5) равен нулю в смысле главного значения. Сложим интеграл Фурье с этим, равным нулю интегралом, умноженным на мнимую единицу. Получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos y(x-t) + i \sin y(x-t)] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iy(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, формула Фурье распадается на две:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt} dt, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy. \quad (18.6)$$

Формулы (18.6) определяют **прямое** и **обратное** преобразование Фурье. Прямое преобразование Фурье определено для любой абсолютно интегрируемой функции. Обратное преобразование Фурье описывает линейный оператор, обратный прямому преобразованию Фурье, и позволяет восстановить функцию по ее образу. Интеграл Фурье показывает, что любая „приличная“ функция восстанавливается по своему преобразованию Фурье. Но при этом интеграл в обратном преобразовании Фурье понимается в смысле главного значения.

Преобразование Фурье функции  $f$  будем обозначать  $F[f]$ . Таким образом,  $F[f](w)$  — значение функции  $F[f]$  в точке  $w$ .

**Замечание.** В теории преобразования Фурье исходную функцию часто называют **оригиналом**, а ее преобразование Фурье — **изображением**. Преобразование Фурье данной функции также называют ее **спектром**.

### 18.3. Свойства преобразования Фурье

**Свойство 1.** Если функциональная последовательность  $\{f_n\}$  абсолютно интегрируемых функций сходится к некоторой функции  $f$  в среднем, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n - f| dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то  $F[f_n] \rightrightarrows F[f]$  при  $n \rightarrow \infty$ .

◀ Это утверждение вытекает из неравенства  $\|F[f]\|_\infty \leq \|f\|_1$ , где

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_w |\varphi(w)|, \quad \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad \blacktriangleright$$

**Свойство 2.** Если функция  $f$  и все ее производные до порядка  $k$  включительно абсолютно интегрируемы на  $\mathbb{R}$ , то

$$|F[f](w)| \leq \frac{M}{|w|^k}.$$

◀ Если  $f$  и  $f'$  абсолютно интегрируемы, то, используя правило интегрирования по частям, получаем

$$F[f'](w) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iwt} dt = f(t)e^{-iwt} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(iw)e^{-iwt} dt = (iw)F[f](w).$$

Здесь мы использовали следующее соображение. Если  $f'$  абсолютно интегрируема, то  $f(t)$  имеет предел при  $t \rightarrow \infty$ , определяемый несобственным интегралом от  $f'(t)$ . Этот предел равен нулю в силу абсолютной интегрируемости функции  $f$ . Поэтому подстановки  $\infty$  в выражение  $f(t)e^{-iwt}$  дают нулевое значение.

Итак,

$$F[f'](w) = (iw)F[f](w). \quad (18.7)$$

Поэтому  $|F[f](w)| = |w|^{-k}|F[f^{(k)}](w)| \leq M|w|^{-k}$ , так как, в силу свойства 1, изображение любой абсолютно интегрируемой функции ограничено. ▶

**Замечание.** Важное соотношение (18.7) часто называют *теоремой о дифференцировании изображения*. Оно открывает путь для решения линейных дифференциальных уравнений. Действительно,

$$F[y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y](w) = [(iw)^n + a_1(iw)^{n-1} + \dots + a_n]F[y],$$

и линейное дифференциальное уравнение  $L(y) = f$  в изображениях оказывается алгебраическим:  $L(iw)Y = F$ , где  $Y$  и  $F$  — изображения функций  $y$  и  $f$ . Недостаток предложенной схемы — в том, что неизвестное решение, как, впрочем и правая часть уравнения, не обязаны быть абсолютно интегрируемыми и иметь изображение. Этот недостаток удалось обойти в рамках операционного исчисления, которое базируется на идеях, очень близких к преобразованию Фурье.

**Свойство 3.** Если функция  $t^k f(t)$  абсолютно интегрируема, то  $F[f]$  имеет  $k$  производных.

◀ Дело сводится к последовательному дифференцированию интеграла по параметру. Покажем основную идею для случая  $k = 1$ . По определению

$$F[f](w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt.$$

Продифференцировав по параметру, получаем:

$$\frac{d}{dw} F[f](w) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(t) e^{-iwt} dt,$$

причем интеграл справа сходится, в силу абсолютной интегрируемости  $tf(t)$ , равномерно на всей числовой оси. Это доказывает законность дифференцирования по параметру под знаком интеграла. ▶

Для абсолютно интегрируемых функций  $f$  и  $g$  интеграл

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt,$$

если сходится, дает абсолютно интегрируемую функцию, которую называют **сверткой функций**  $f$  и  $g$ . Ее обычно обозначают так:  $h = f * g$ . Указанный интеграл сходится, если функции  $f$  и  $g$  абсолютно интегрируемы и ограничены. Действительно, если  $|g(t)| \leq M$ , то  $|f(t)g(x-t)| \leq M|f(t)|$ , и интеграл сходится для любого  $x$  равномерно на  $\mathbb{R}$  согласно признаку Вейерштрасса. При этом функция  $h(x)$  абсолютно интегрируема, так как в этом случае сходится несобственный двойной интеграл

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(t)g(x-t)| dt dx.$$

Можно показать, что операция свертки коммутативна и ассоциативна, а по отношению к сложению функций дистрибутивна, т.е. обладает свойствами, характерными для операции умножения. Однако функции, играющей для этой операции роль единицы, нет. Операция свертки настолько часто используется в приложениях, что естественно попытаться расширить класс функций так, чтобы свертка имела свою единицу. Такое расширение приводит к обобщенным функциям, а роль единицы по отношению к свертке играет известная в физических приложениях дельта-функция Дирака.

**Свойство 4.** Для абсолютно интегрируемых функций  $f$  и  $g$  верно тождество

$$F[f * g] = F[f] F[g].$$

◀ Доказательство основано на том, что преобразование Фурье свертки представляет собой несобственный повторный интеграл, в котором можно переставить пределы интегрирования. Действительно,

$$\begin{aligned} F[f * g](w) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(y) e^{-i w(y+t)} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-iwy} dy = F[f](w) F[g](t). \end{aligned}$$

Возможность перестановки пределов вытекает, например, из того, что соответствующий несобственный двойной интеграл по области  $\mathbb{R}^2$  сходится абсолютно. ▶

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Лекция 1. Мера Жордана</b>	1
1.1. Площадь плоского множества . . . . .	1
1.2. Двойной интеграл . . . . .	3
1.3. Кратный интеграл . . . . .	3
<b>Лекция 2. Вычисление кратных интегралов</b>	6
2.1. Двойной интеграл . . . . .	6
2.2. Общий случай . . . . .	8
2.3. Техника вычисления . . . . .	8
<b>Лекция 3. Замена переменных в кратном интеграле</b>	11
3.1. Двойной интеграл . . . . .	11
3.2. Произвольный кратный интеграл . . . . .	13
3.3. Полярные координаты . . . . .	13
3.4. Цилиндрические и сферические координаты . . . . .	14
<b>Лекция 4. Приложения кратных интегралов</b>	15
4.1. Площадь . . . . .	15
4.2. Объем . . . . .	16
4.3. Механические приложения . . . . .	16
4.4. Плоский случай . . . . .	17
<b>Лекция 5. Несобственные интегралы</b>	18
5.1. Интеграл от неотрицательной функции . . . . .	19
5.2. Абсолютная сходимость . . . . .	19
5.3. Расстановка пределов в несобственных интегралах . . . . .	21
5.4. Замена переменных в несобственном интеграле . . . . .	21
5.5. Интегралы, зависящие от параметра . . . . .	22
<b>Лекция 6. Криволинейный интеграл</b>	26
6.1. Криволинейный интеграл 1-го рода . . . . .	26
6.2. Криволинейный интеграл 2-го рода . . . . .	28
<b>Лекция 7. Формула Грина</b>	31
7.1. Интеграл по замкнутому контуру . . . . .	31
7.2. Формула Грина . . . . .	32
7.3. Вычисление площадей при помощи криволинейных интегралов . . . . .	34
<b>Лекция 8. Полный дифференциал</b>	35
8.1. Криволинейные интегралы, не зависящие от пути . . . . .	35
8.2. Условия независимости интеграла от пути . . . . .	36
8.3. Циклические постоянные . . . . .	37
8.4. Трехмерный случай . . . . .	38
<b>Лекция 9. Поверхностный интеграл</b>	39
9.1. Площадь поверхности . . . . .	39
9.2. Поверхностный интеграл . . . . .	41
9.3. Свойства поверхностного интеграла . . . . .	41
9.4. Поверхностный интеграл 2-го рода . . . . .	41
9.5. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода . . . . .	42
9.6. Связь поверхностного интеграла с криволинейным и тройным . . . . .	43

<b>Лекция 10. Элементы теории поля</b>	45
10.1. Скалярные и векторные поля . . . . .	45
10.2. Векторные трубки . . . . .	45
10.3. Линейный интеграл и поток . . . . .	46
10.4. Вихрь и формула Стокса . . . . .	47
10.5. Дивергенция и формула Остроградского . . . . .	47
<b>Лекция 11. Специальные векторные поля</b>	49
11.1. Векторные дифференциальные операции 2-го порядка . . . . .	49
11.2. Оператор Гамильтона . . . . .	49
11.3. Потенциальное поле . . . . .	50
11.4. Соленоидальное поле . . . . .	50
11.5. Гармоническое поле . . . . .	51
11.6. Разложение поля на потенциальное и соленоидальное . . . . .	52
11.7. Криволинейные координаты . . . . .	52
<b>Лекция 12. Числовые ряды</b>	55
12.1. Основные понятия . . . . .	55
12.2. Операции над рядами . . . . .	56
12.3. Знакоположительные числовые ряды . . . . .	57
<b>Лекция 13. Знакопеременные числовые ряды</b>	61
13.1. Другие признаки сходимости . . . . .	61
13.2. Группировки . . . . .	63
13.3. Перестановки . . . . .	64
13.4. Умножение рядов . . . . .	65
<b>Лекция 14. Функциональные ряды</b>	66
14.1. Функциональные последовательности . . . . .	66
14.2. Функциональные ряды . . . . .	69
14.3. Признаки равномерно сходящихся рядов . . . . .	70
<b>Лекция 15. Степенные ряды</b>	72
15.1. Интервал сходимости . . . . .	72
15.2. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов . . . . .	74
15.3. Ряд Тейлора . . . . .	75
15.4. Стандартные разложения в ряд Тейлора . . . . .	77
<b>Лекция 16. Ортогональные системы</b>	79
16.1. Определение . . . . .	79
16.2. Задача о наилучшем приближении . . . . .	81
16.3. Свойства ряда Фурье . . . . .	82
16.4. Условия сходимости ряда Фурье к функции . . . . .	83
16.5. Тригонометрическая система . . . . .	84
<b>Лекция 17. Тригонометрические ряды Фурье</b>	86
17.1. О равномерной сходимости ряда Фурье . . . . .	86
17.2. Порядок малости коэффициентов и дифференцируемость . . . . .	87
17.3. Условия сходимости ряда Фурье в точке . . . . .	89
17.4. Ряд Фурье по косинусам (синусам) кратных углов . . . . .	93
17.5. Разложение функции на произвольном отрезке . . . . .	93
17.6. Комплексная форма записи ряда Фурье . . . . .	94
<b>Лекция 18. Интеграл Фурье</b>	96
18.1. Четные и нечетные функции . . . . .	98
18.2. Симметричная форма интеграла Фурье . . . . .	98
18.3. Свойства преобразования Фурье . . . . .	99