Задача об объёме цилиндрического тела

ЛЕКЦИЯ 1. Пусть в плоскости x_1Ox_2 замкнутый контур Γ_G ограничивает область G конечного диаметра $d(G)$ и конечной площади $m(G)$. Если

$$S \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x_1, x_2) \geq 0, \ \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in G \right\} -$$

непрерывная поверхность, то тело T, ограниченное поверхностью S, цилиндрической поверхностью C, ортогональной плоскости x_1Ox_2, и частью плоскости x_1Ox_2, представленной G, будем называть цилиндрическим телом.

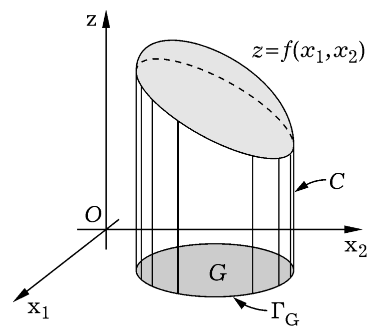

Рис. 1

Задача о нахождении объема цилиндрического тела T решается аналогично задаче о нахождении площади плоской фигуры.

1. G произвольным образом разбиваем на систему подобластей $\{G_k\}_{k=1}^n$, пересекающихся, быть может, лишь по границам, т.е. $m(G_k \cap G_j) = 0, \ \forall \ k \neq j$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k = G$.

2. Полагаем $m_k \triangleq \inf\limits_{G_k} f(x_1, x^2)$ и $M_k \triangleq \sup\limits_{G_k} f(x_1, x^2)$.

3. Т.к. цилиндр с основанием G_k и высотой m_k целиком содержится в T, а цилиндр с основанием G_k и высотой M_k целиком содержит соответствующую часть тела T, то для ступенчатых тел A_n и B_n, образованных этими цилиндрами соответственно, имеем: $A_n \subset T \subset B_n$.

4. Из свойств объемов объемлемых и объемлющих тел следует:

$$V(A_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot m(G_k) \leq V(T) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot m(G_k) = V(B_n) \tag{$*$}$$

5. Пусть $x_{1k}, x_{2k} \in G_k$ – произвольная отмеченная точка. Тогда из неравенства $m_k \leq f(x_{1k}, x_{2k}) \leq M_k$ следует:

$$V(A_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot m(G_k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(x_{1k}, x_{2k}) \cdot m(G_k) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot m(G_k) = V(B_n) \tag{$**$}$$

6. При дроблении подобластей $\{G_k\}$ объем $V(A_n)$ будет монотонно возрастать, оставаясь меньше числа $\max\limits_{G} f(x_1, x_2) \cdot m(G)$, а $V(B_n)$ – монотонно убывать, оставаясь больше числа $\min\limits_{G} f(x_1, x_2) \cdot m(G)$. Т.о. $\left(\exists \lim\limits_{\max d(G_k) \to 0} V(A_n)\right) \wedge \left(\exists \lim\limits_{\max d(G_k) \to 0} V(B_n)\right)$. При этом тела A_n и B_n все более точно повторяют тело T.

7. Если считать, что $\lim\limits_{\max d(G_k) \to 0} V(A_n) = \lim\limits_{\max d(G_k) \to 0} V(B_n)$, то согласно $(*)$ и $(**)$

$$V(T) = \lim_{\max d(G_k) \to 0} V(A_n) = \lim_{\max d(G_k) \to 0} V(B_n) = \lim_{\max d(G_k) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_{1k}, x_{2k}) m(G_k)$$

Определение. Пусть в замкнутой области G плоскости x_1Ox_2 конечной площади $\sigma = m(G)$ и конечного диаметра $d(G)$ определена скалярная функция $z = f(x_1, x_2)$. Пусть $\{G_k\}$ – произвольное разбиение G на систему подобластей, пересекающихся, быть может, лишь по границам, а $M_k = (x_{1k}, x_{2k}) \in G_k$ – произвольная отмеченная точка. Если вне зависимости от выбора разбиения $\{G_k\}$ и системы отмеченных точек $\{M_k\}$

$\exists \lim\limits_{\max d(G_k)\to 0} \sum\limits_k f(M_k)\cdot m(G_k)$, то его называют *двойным интегралом функции* f по области G и обозначают $\iint\limits_G f(x_1,x_2)dx_1dx_2$ или $\iint\limits_G f(x_1,x_2)d\sigma$.

Теорема существования. Для любой функции $z = f(x_1, x_2)$, непрерывной в ограниченной замкнутой области $G \in \mathbb{R}^2$, имеющей конечную площадь $\sigma = m(G)$ и конечный диаметр $d(G)$, существует $\iint\limits_G f(x_1,x_2)dx_1dx_2$.

Основные свойства двойных интегралов, следующие из определения

1. $\iint\limits_G \sum\limits_{k=1}^N C_k f_k(x_1,x_2)d\sigma = \sum\limits_{k=1}^N C_k \iint\limits_G f_k(x_1,x_2)d\sigma$ – линейность.

2. $\iint\limits_G C\cdot d\sigma = C\cdot m(G)$.

3. $\left\{G = \bigcup\limits_{k=1}^N G_k\right\} \wedge \left\{m(G_k\cap G_j) = 0\,,\ \forall\, k\neq j\right\} \Longrightarrow \iint\limits_G f\,d\sigma = \sum\limits_{k=1}^N \iint\limits_{G_k} f d\sigma$

4. $\left\{f \gtrless 0,\ \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in G\right\} \Longrightarrow \iint\limits_G f\,d\sigma \gtrless 0.$

5. $\left\{f \gtreqqless 0 \wedge f \not\equiv 0\,,\ \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in G\right\} \Longrightarrow \iint\limits_G f\,d\sigma \gtrless 0.$

6. $\left\{f \leqslant \varphi \wedge f \not\equiv \varphi,\ \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in G\right\} \Longrightarrow \iint\limits_G f\,d\sigma < \iint\limits_G \varphi\,d\sigma$

7. $\left|\iint\limits_G f\,d\sigma\right| \leqslant \iint\limits_G |f|\,d\sigma$

Теорема о среднем. Если f и φ непрерывны в замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^2$, имеющей конечные $d(G)$ и $m(G)$, и хоть одна из них знакопостоянна в G (пусть φ), тогда $\exists \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} \in G\ :\ \iint\limits_G f\cdot\varphi\cdot d\sigma = f(x_1^0, x_2^0)\iint\limits_G \varphi d\sigma$.

Доказательство. Пусть для определенности в G функция $\varphi > 0$. Тогда $\forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in G$ $m \triangleq \max\limits_G f \leqslant f(x_1,x_2) \leqslant M \triangleq \max\limits_G f \iff m\varphi \leqslant f\varphi \leqslant M\varphi$, $\forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in G$. Так как случай $f \equiv C - \mathrm{const}$ на G тривиален, то, согласно свойствам 1 и 7 двойного интеграла, имеем:

$$m\iint\limits_G \varphi\,d\sigma < \iint\limits_G f\,\varphi\,d\sigma < M\iint\limits_G \varphi\,d\sigma$$

Таким образом $\exists\,\mu \in (m; M)\ :\ \mu = \iint\limits_G f\,\varphi\,d\sigma \Bigg/ \iint\limits_G \varphi\,d\sigma$. Но f непрерывна в G и принимает все промежуточные значения из $[m : M]$, т.е. $\exists \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} \in G \ : f(x_1^0, x_2^0) = \mu$, что и требовалось доказать.

Следствие из теоремы. Если $\varphi \equiv 1$ в G, то $\exists \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} \in G \ : \iint\limits_G f\, d\sigma = f(x_1^0, x_2^0) \cdot m(G)$.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Пусть $\text{Пр}_{OX_1} G = [a; b]$ и граница Γ_G области G пересекается прямой, ортогональной OX_1 и проходящей через любую точку $(a; b)$, в двух точках. Тогда $x_2 = \psi_1(x_1)$ и $x_2 = \psi_2(x_1)$ – уравнения нижнего и верхнего участков Γ_G соответственно.

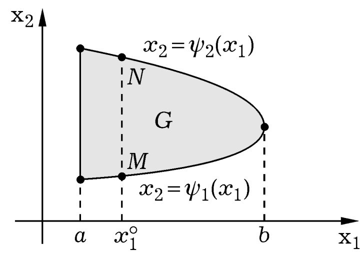

Рис. 2

Рассекаем тело T плоскостью $x_1 = x_1^0 \in (a; b)$ и получаем пластину P с площадью $S(x_1^0) = \int\limits_{\psi_1(x_1^0)}^{\psi_2(x_1^0)} f(x_1^0, x_2) dx_2$.

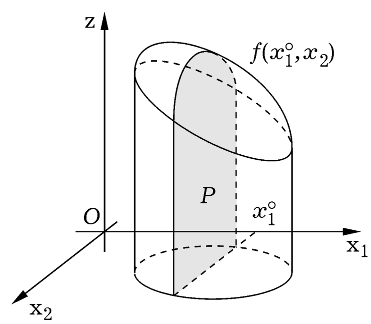

Рис. 3

А т.к. точка $x_1^0 \in (a; b)$ – произвольная, то, с использованием известной формулы, находим:

$$V(T) = \iint\limits_G f d\sigma = \int\limits_a^b S(x_1) dx_1 = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\psi_1(x_1)}^{\psi_2(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right\} dx_1 \equiv \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\psi_1(x_1)}^{\psi_2(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 dx_2$$

P.S. Оси Ox_1 и Ox_2 – равноправны и при выполнении оговоренных условий мы можем проектировать G на Ox_2.

Пример. Пусть G представлена на рис.4. Тогда

$$\iint\limits_G x_1 d\sigma = \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dx_2 \int\limits_{x_2}^{\sqrt{1-x_2^2}} x_1 dx_1 = \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x_1^2}{2} \Big|_{x_2}^{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \left\{ 1 - x_2^2 - x_2^2 \right\} dx_2 = \frac{1}{2} \left\{ x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right\} \Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} \right\} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

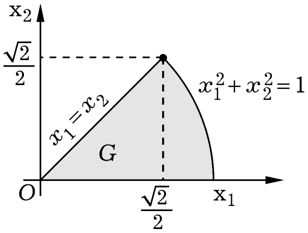

Рис. 4

ЛЕКЦИЯ 2. Пусть $f(x_1,x_2)<0$ на G. В этом случае $-f(x_1,x_2)>0$ в G и объем $V(T)$ цилиндрического тела T равен: $\iint\limits_G \{-f\}d\sigma = \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\psi_1(x_1)}^{\psi_2(x_1)} \{-f\}dx_2 = -\int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\psi_1(x_1)}^{\psi_2(x_1)} f dx_2$. При этом

$$\iint\limits_G f d\sigma = -\iint\limits_G \{-f\}d\sigma = \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\psi_1(x_1)}^{\psi_2(x_1)} f dx_2.$$

Если в G функция f меняет знак, то разбиваем G на систему подобластей $\{G_k\}$, кои могут пересекаться лишь по границам и в каждой подобласти $\{G_k\}$ f сохраняет знак. Тогда $\iint\limits_G f d\sigma = \sum\limits_k \iint\limits_{G_k} f d\sigma$ и каждый интеграл в правой части вычисляем стандартным способом.

Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть существует $\iint\limits_G f(x_1,dx_2)dx_1dx_2$, но его непосредственное вычисление затруднительно. Произведем замену переменных:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\varphi_1(u,v) \\ x_2=\varphi_2(u,v) \end{array}\right] \qquad (1),$$

где φ_1 и φ_2 определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой области $D\subset\mathbb{R}^2$ изменения новых независимых переменных. Кроме того, будем предполагать, что ни в одной точке области D функциональный определитель

$$J(u,v) \triangleq \begin{vmatrix} \partial\varphi_1/\partial u & \partial\varphi_1/\partial v \\ \partial\varphi_2/\partial u & \partial\varphi_2/\partial v \end{vmatrix} \qquad (2),$$

называемый *якобианом*, не обращается в нуль, т.е. $J(u,v)$ – непрерывная знакопостоянная в D функция.

Сделанные предположения гарантируют существование обратного к (1) отображения G в D:

$$\left.\begin{array}{l} u=\Phi(x_1,x_2) \\ v=\Psi(x_1,x_2) \end{array}\right] \qquad (3).$$

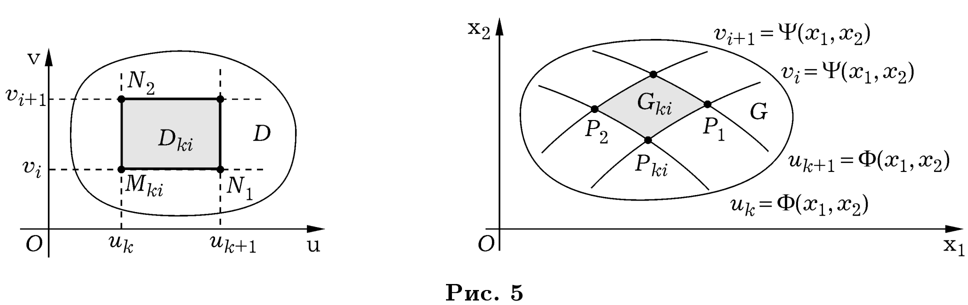

Рис. 5

При этом граничные точки переходят в граничные, а внутренние точки – во внутренние.

Для записи искомого интеграла при использовании преобразования (1) разбиваем D на систему подобластей двумя семействами прямых $\{u = u_k\} \wedge \{v = v_i\}$. В этом случае область G двумя семействами кривых $\{u_k = \Phi(x_1, x_2)\} \wedge \{v_i = \Psi(x_1, x_2)\}$ также разбивается на систему подобластей $\{G_{ki}\}$, которые могут пересекаться лишь по границам.

Пусть для определенности $M_{ki} \longleftrightarrow P_{ki}$ и $N_i \leftrightarrow P_i$. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка $m(G_{ki})$ равна площади параллелограмма, "натянутого" на векторы $\overrightarrow{P_{ki}P_1}$ и $\overrightarrow{P_{ki}P_2}$, т.е.

$$m(G_{ki}) \approx \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \varphi_1(M_{ki}) & \varphi_2(M_{ki}) & 1 \\ \varphi_1(N_1) & \varphi_2(N_1) & 1 \\ \varphi_1(N_2) & \varphi_2(N_2) & 1 \end{vmatrix} \equiv \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \varphi_1(M_{ki}) & \varphi_2(M_{ki}) & 1 \\ \varphi_1(N_1) - \varphi_1(M_{ki}) & \varphi_2(N_1) - \varphi_2(M_{ki}) & 0 \\ \varphi_1(N_2) - \varphi_1(M_{ki}) & \varphi_2(N_2) - \varphi_2(M_{ki}) & 0 \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \varphi_1(N_1) - \varphi_1(M_{ki}) & \varphi_2(N_1) - \varphi_2(M_{ki}) \\ \varphi_1(N_2) - \varphi_1(M_{ki}) & \varphi_2(N_2) - \varphi_2(M_{ki}) \end{vmatrix} \approx \operatorname{mod} \begin{vmatrix} \partial\varphi_1(M_{ki})/\partial u & \partial\varphi_2(M_{ki})/\partial u \\ \partial\varphi_1(M_{ki})/\partial v & \partial\varphi_2(M_{ki})/\partial v \end{vmatrix} \Delta u_k \cdot \Delta v_i \equiv$$

$$\equiv |J(M_{ki})| \cdot m(D_{ki})$$

Таким образом, имеем:

$$\iint\limits_G f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \lim_{\max d(G_{ki}) \to 0} \sum_{k,i} f(P_{ki}) m(G_{ki}) =$$

$$= \lim_{\max d(D_{ki}) \to 0} \sum_{k,i} f(P_{ki}) |J(M_{ki})| m(D_{ki}) =$$

$$= \iint\limits_G f\big((\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)\big) |J(u,v)| du dv$$

Замечания.

1. Можно показать корректность полученного результата и в случае обращения в нуль якобиана $J(u,v)$ преобразования (1) в одной или нескольких точках области D.

Пример 1. Пусть $d > 0$ и $0 < \alpha < \beta$. В интеграле $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y) dy$ нужно сделать замену переменных: $\left.\begin{matrix} x = u - uv \\ y = uv \end{matrix}\right\}$. Имеем $J(u,v) = \begin{vmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$.

$\big(y = \alpha x\big) \Longrightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x + y = (1+\alpha)x \\ uv = \alpha x \end{matrix} \right\} \Longrightarrow \Big(v = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\Big)$

$\big(y = \beta x\big) \Longrightarrow$ (совершенно аналогично) $\Longrightarrow \Big(v = \dfrac{\beta}{1+\beta}\Big)$.

А так как $(0 < \alpha < \beta)$, то $\dfrac{\alpha}{1+\alpha} < \dfrac{\beta}{1+\beta}$.

$(x = d) \Longrightarrow (d = u - uv) \Longrightarrow \Big(v = 1 - \dfrac{d}{u}\Big)$.

$(x = 0 = y) \Longrightarrow (u = 0)$.

Равенство $J(0,v) = 0$ приводит к вырождению угловой точки в отрезок (см. рис.6 и рис.7).

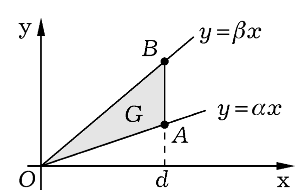

Рис. 6

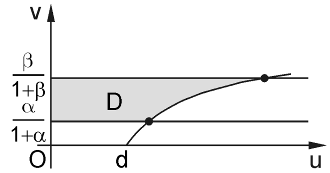

Рис. 7

$$\int\limits_0^d dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)dy = \int\limits_{\alpha/(1+\alpha)}^{\beta/(1+\beta)} dv \int\limits_0^{d/(1-v)} f(u-uv;uv)udu.$$

2. Переход к полярным координатам:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\varphi \end{array}\right\} \Longrightarrow J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} \equiv r$$

$$\iint\limits_G f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi$$

Пример 2.

$$\iint\limits_{1\le x_1^2+x_2^2\le 4} (x_1^2+x_2^2)^{-1/2}\exp(\sqrt{x_1^2+x_2^2})dx_1dx_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^2 \frac{1}{r}\,e^r \cdot rdr = 2\pi(e^2-e).$$

3. Площадь плоской фигуры $G = \{r = r(\varphi);\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$:

$$m(G) = \iint\limits_G dx_1dx_2 = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi$$

4. Переход к обобщенным полярным координатам:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = ar\cos\varphi \\ x_2 = br\sin\varphi \end{array}\right\} \Longrightarrow J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\sin\varphi \end{vmatrix} = abr$$

$$\iint\limits_G f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_D f(ar\cos\varphi, br\sin\varphi)abrdrd\varphi$$

Пример 3. Найти объем V, ограниченный эллипсоидом с полуосями a, b, c: $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 + x_3^2/c^2 = 1$.

$$V = 2\iint\limits_{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}\le 1} c\sqrt{1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}}\,dx_1dx_2 = \left\{\begin{array}{l|l} x_1 = ar\cos\varphi & 0\le r\le 1 \\ x_2 = br\sin\varphi & 0\le\varphi\le 2\pi \end{array}\right\} =$$

$$= 2abc\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr = 4\pi abc\int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\,rdr = \frac{4}{3}\pi abc$$

Площадь поверхности

ЛЕКЦИЯ 3. Пусть функция $z = f(x_1,x_2)$ определена и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^2 \,:\, d(G) < \infty,\ m(G) < \infty$. В этом случае поверхность

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = f(x_1,x_2),\ \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in G \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

является гладкой, т.е. в любой точке к ней может быть проведена касательная плоскость, нормаль которой непрерывно зависит от точки касания.

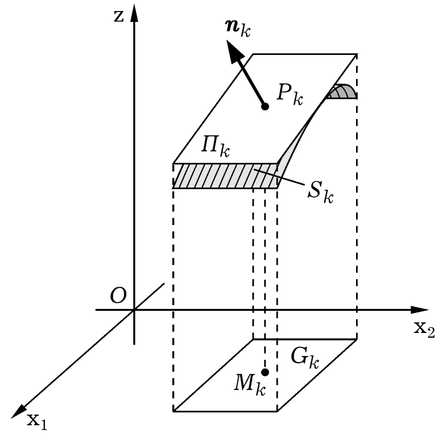

Рис. 8

Область G произвольным образом разбиваем на систему подобластей $\{G_k\}$, пересекающихся, быть может, лишь по границам. В каждой подобласти G_k произвольным образом выбираем отмеченную точку M_k с координатами (x_{1k}, x_{2k}) и в точке $P_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ f(x_{1k}, x_{2k}) \end{bmatrix} \in S$ проводим к S касательную плоскость, вектор нормали $\vec{n}_k \equiv \vec{n}(P_k)$ которой образует с осью OZ острый угол. Пусть далее S_k – часть поверхности S, которая проектируется в G_k; Π_k – часть плоскости, касательной к S в точке P_k, которая проектируется в G_k. Таким образом, $S = \bigcup\limits_k S_k$, $m(S) = \sum\limits_k m(S_k)$, $\text{Пр}_{x_1Ox_2}\Pi_k = G_k = \text{Пр}_{x_1Ox_2}S_k$ и поверхность S оказываются покрытой "чешуйчатой" поверхностью $\Pi = \bigcup\limits_k \Pi_k$, грани которой – плоские фигуры $\{\Pi_k\}$, лежащие в касательных к S плоскостях и

$$\left(m(\Pi) = \sum_k m(\Pi_k)\right) \wedge \left(m(S) \triangleq \lim_{\max d(G_k)\to 0} \sum_k m\Pi_k.\right)$$

Из геометрии известно, что $m(G_k) = m(\Pi_k)\cos\gamma_k$, где γ_k – угол между $\overrightarrow{OZ}$ и $\vec{n}_k$, т.е.

$$\cos\gamma_k = 1\Big/\sqrt{1 + \{f'_x(M_k)\}^2 + \{f'_y(M_k)\}^2}.$$

Таким образом

$$m(S) = \lim_{\max d(G_k)\to 0} \sum_k \frac{m(G_k)}{\cos\gamma_k} = \lim_{\max d(G_k)\to 0} \sum_k \sqrt{1 + \{f'_x(M_k)\}^2 + \{f'_y(M_k)\}^2}\, m(G_k) =$$

$$= \iint\limits_G \sqrt{1 + \{f'_x\}^2 + \{f'_y\}^2}\, dx_1 dx_2\,,$$

т.к. поверхность S – гладкая и подынтегральная функция – непрерывна в G.

Тройной интеграл

Масса неоднородного тела. Пусть в $\mathbb{R}^3$ определено неоднородное тело T конечного ненулевого объема $m(T)$ и конечного диаметра $d(T)$. Пусть $\mu(X) \equiv \mu(x_1, x_2, x_3)$ – плотность вещества тела T, являющаяся непрерывной функцией своих аргументов и необходимо определить $M(T)$ – массу тела T.

Для нахождения $M(T)$ разбиваем T на систему трехмерных областей $\{T_k\}$, пересекающихся, быть может, лишь по границам:

$$\Big(\bigcup_k T_k = T\Big) \wedge \Big(m(T_k \cap T_j) = 0,\ \forall\, k \neq j\Big).$$

В каждом теле T_k произвольным образом выбираем отмеченную точку $P_k = (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) \in T_k$ и считаем, что $\mu(P_k) \approx \mu(X),\ \forall\, X \in T_k$.

А так как с точностью до бесконечно малых $M(T_k) \approx \mu(P_k) m(T_k)$, то естественно считать, что

$$M(T) \triangleq \lim_{\max\, d(T_k)\to 0} \sum_k \mu(P_k)\, m(T_k).$$

Определение. Пусть функция $z = f(x_1, x_2, x_3)$ определена в области $T \subset \mathbb{R}^3$ конечного объема $m(T)$ и конечного диаметра $d(T)$. Если вне зависимости от выбора разбиения T на систему подобластей $\{T_k\}$, пересекающихся, быть может, лишь по границам, и выбора отмеченных точек $\{P_k\}:\ P_k \in T_k\ ,\ \forall\, k$ существует $\displaystyle\lim_{\max\, d(T_k)\to 0} \sum_k f(P_k)\, m(T_k)$, то его *называют тройным интегралом функции* f по области T и обозначают $\displaystyle\iiint_T f(x_1, x_2, x_3) dx_1, dx_2, dx_3$ или $\displaystyle\int_T f(X) dX$.

Замечания.

1. Если f определена и непрерывна в $T \subset \mathbb{R}^3$ и $0 < m(T) < \infty$, $d(T) < \infty$, то $\exists \displaystyle\iiint_T f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$.

2. $\displaystyle\iiint_T dx_1 dx_2 dx_3 = m(T)$ – объем T.

3. Тройной интеграл обладает теми же свойствами, что и двойной.

Вычисление тройного интеграла.

Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ – замкнутая область конечного объема $m(T)$ и конечного диаметра $d(T)$, ограниченная поверхностью S, которая любой прямой, параллельной оси OX_3 пересекается не более чем в двух точках. Если $f(x_1, x_2, x_3)$ определена и непрерывна в T, то $\exists \displaystyle\iiint_T f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$.

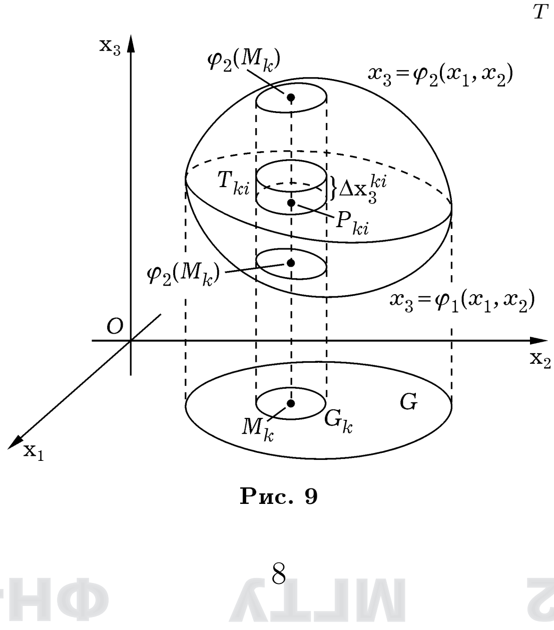

Рис. 9

Область $G = \text{Пр}_{x_1Ox_2} T$ произвольным образом разбиваем на систему подобластей $\{G_k\}$, пересекающихся, быть может, лишь по границам. В каждой подобласти G_k произвольным образом выбираем отмеченную точку M_k с координатами (x_1^k, x_2^k). Отрезок $[\varphi_1(M_k); \varphi_2(M_k)]$ плоскостями $x_3 = \text{const}$ произвольным образом разбиваем на N частей. Если $T_k \subset T$ – часть T такая, что $\text{Пр}_{x_1Ox_2} T_k = G_k$, то T_{ki} – часть T_k, заключенная между плоскостями $x_3 = x_3^{ki}$ и $x_3 = x_3^{ki+1}$, где $x_3^{ki} < x_3^{ki+1}$. Таким образом, за исключением крайних "срезанных" подобластей, T_{ki} – прямой цилиндр с основанием G_k и высотой $\Delta_3^{ki} = x_3^{ki+1} - x_3^{ki}$, т.е. в общем случае $m(T_{ki}) \approx m(G_k) \cdot \Delta x_3^{ki}$.

Выбор отмеченной точки $P_{ki} \in T_{ki}$ реализуем, исходя из следующих соображений:

(1) $\text{Пр}_{x_1Ox_2} P_{ki} \equiv M_k$, $\forall i \geq 1$, т.е. $P_{ki} = (x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}^i)$;

(2) $f(P_{ki}) \Delta x_3^{ki} = \int\limits_{x_3^{ki}}^{x_3^{ki}} f(x_{1k}, x_{2k}, x_3) dx_3$ – теорема о среднем.

А так как искомый интеграл существует, то его значение не зависит от выбора разбиения и отмеченных точек. Поэтому

$$\iiint\limits_T f(x_1, x_2, x_3) = \lim_{\max d(T_{ki}) \to 0} \sum_{ki} f(P_{ki})\, m(T_{ki}) = \lim_{\max d(T_{ki}) \to 0} \sum_k \sum_i f(P_{ki})\, m(G_k)\, \Delta x_3^{ki} =$$

$$= (\text{теорема о среднем}) = \lim_{\max d(T_{ki}) \to 0} \sum_k \Big\{ \sum_i \int\limits_{x_3^{ki}}^{x_3^{ki+1}} f(x_{1k}, x_{2k}, x_3) dx_3 \Big\}\, m(G_k) =$$

$$= \lim_{\max d(G_k) \to 0} \sum_k \Big\{ \int\limits_{\varphi_1(M_k)}^{\varphi_2(M_k)} f(M_k, x_3) dx_3 \Big\}\, m(G_k) = \iint\limits_G \Big\{ \int\limits_{\varphi_1(x_1,x_2)}^{\varphi_2(x_1,x_2)} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \Big\}\, dx_1\, dx_2$$

Пример. Найти массу шара $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 2ax_3$, если плотность вещества в каждой его точке обратно пропорциональна ее расстоянию до начала координат, т.е.

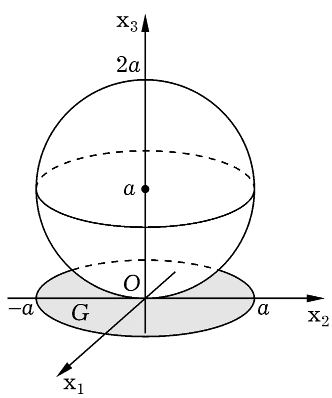

Рис. 10

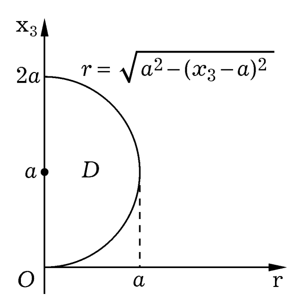

Рис. 11

$$M = \iiint\limits_T \frac{\lambda}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \lambda \iint\limits_G dx_1 dx_2 \int\limits_{a-\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}}^{a+\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2}} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2} dx_3 =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\varphi \end{array} \right\} = \lambda \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \int\limits_{a-\sqrt{a^2-r^2}}^{a+\sqrt{a^2-r^2}} (r^2 + x_3^2)^{-1/2} dx_3 = 2\pi\lambda \iint\limits_D (r^2 + x_3^2)^{-1/2} r dr\, dx_3 =$$

$$= 2\pi\lambda \int\limits_0^{2a} dx_3 \int\limits_0^{\sqrt{a^2-(x_3-a)^2}} \frac{r\,dr}{\sqrt{x_3^2+r^2}} = 2\pi\lambda \int\limits_0^{2a} \sqrt{x_3^2+r^2}\,\Big|_0^{\sqrt{a^2-(x_3-a)^2}} d\,x_3 =$$

$$= 2\pi\lambda \int\limits_0^{2a} \left\{ \sqrt{x_3^2+a^2-(x_3-a)^2} - x_3 \right\} dx_3 = 2\pi\lambda \int\limits_0^{2a} \left\{ \sqrt{2ax_3} - x_3 \right\} dx_3 = \frac{4}{3}\pi\lambda a^2$$

Замена переменных в тройном интеграле.

Пусть для вычисления тройного интеграла $\iiint\limits_T f(x_1,x_2,x_3)\ dx_3$ произведена замена переменных: $\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(y_1,y_2,y_3) \\ x_2 = \varphi_2(y_1,y_2,y_3) \\ x_3 = \varphi_3(y_1,y_2,y_3) \end{array}\right\}$, где функции $\{\varphi_k\}_{k=1}^3$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой трехмерной области B. Если при этом якобиан преобразования $J(y_1,y_2,y_3) \triangleq \det\left[\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial y_j}\right] \neq 0;\ \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_3 \end{bmatrix} \in B,$

то, рассуждая как и в случае двойного интеграла, можно показать, что при высказанных предположениях:

$$\iiint\limits_T f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \iiint\limits_B f\big(\varphi_1(y_1,y_2,y_3),\dots\varphi_3(y_1,y_2,y_3)\big)|J(y_1,y_2,y_3)|\,dy_1\,dy_2\,dy_3$$

Переход к цилиндрическим координатам

ЛЕКЦИЯ 4.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = r\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\varphi \\ x_3 = t \end{array}\right\} \Longrightarrow J(r,\varphi,t) = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial r & \partial x_1/\partial\varphi & \partial x_1/\partial t \\ \partial x_2/\partial r & \partial x_2/\partial\varphi & \partial x_2/\partial t \\ \partial x_3/\partial r & \partial x_3/\partial\varphi & \partial x_3/\partial t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \iiint\limits_T f\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = \iiint\limits_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t)r\,dr\,d\varphi\,dt$$

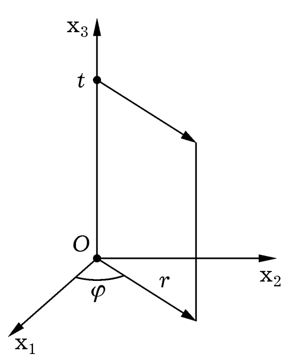

Рис. 12

Пример. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $\left.\begin{array}{l} z = 6 - x^2 - y^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{array}\right\}$, если плотность пропорциональна расстоянию до оси OZ, т.е. $\mu \equiv \mu_0 \cdot \sqrt{x^2+y^2}$.

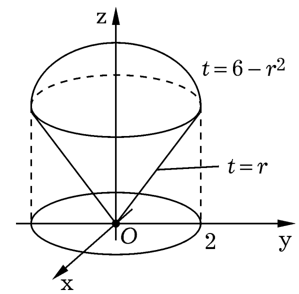

Рис. 13

Имеем:

$$M = \iiint\limits_T \mu \, dx\, dy\, dz = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = t \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} z = 6 - x^2 - y^2 & \Longleftrightarrow & t = 6 - r^2 - \text{верх} \\ z^2 = x^2 + y^2 & \Longleftrightarrow & t = r \ - \text{низ} \\ & & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$M = \iiint\limits_B \mu_0 \cdot r \cdot r dr\ d\varphi\ dt = \mu_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r dr \int\limits_r^{6-r^2} r dt = 2\pi\mu_0 \int\limits_0^2 r^2(6 - r^2 - r) dr = \frac{56\pi\mu_0}{5}.$$

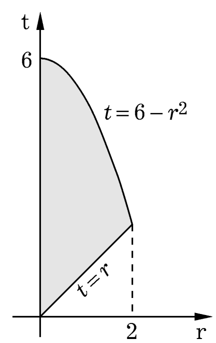

Рис. 14

Переход к обобщенной сферической системе координат

$\left.\begin{array}{l} x_1 = ar\cos\varphi\cos\psi \\ x_2 = br\sin\varphi\cos\psi \\ x_3 = cr\sin\psi \end{array}\right]$. Если $a = b = c = 1$, то имеем обычную сферическую систему координат.

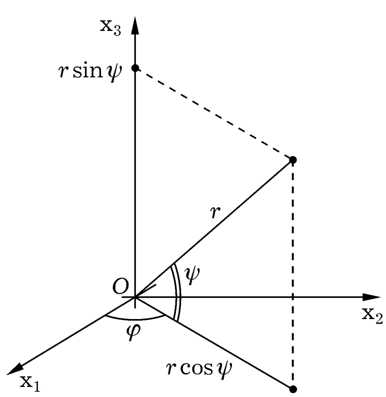

Рис. 15

$$J(r,\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \partial x_1/\partial r & \partial x_1/\partial\varphi & \partial x_1/\partial\psi \\ \partial x_2/\partial r & \partial x_2/\partial\varphi & \partial x_2/\partial\psi \\ \partial x_3/\partial r & \partial x_3/\partial\varphi & \partial x_3/\partial\psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\psi & -ar\sin\varphi\cos\psi & -ar\cos\varphi\sin\psi \\ b\sin\varphi\cos\psi & br\cos\varphi\cos\psi & -br\sin\varphi\sin\psi \\ c\sin\psi & 0 & cr\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= abc\, r^2 \left\{ \sin\psi \begin{vmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi \end{vmatrix} \cos\psi \right\} = abc\, r^2 \cos\psi$$

Пример. Найдем объем эллипсоида с полуосями a, b, c:

$$V(T) = \iiint\limits_{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}\le 1} dx_1 dx_2 dx_3 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = ar\cos\varphi\cos\psi \\ x_2 = br\sin\varphi\cos\psi \\ x_3 = cr\sin\psi \\ J = abcr^2\cos\psi \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \le r^2 \le 1 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \\ -\pi/2 \le \psi \le \pi/2 \end{array} \right. \right\} =$$

$$= adc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int\limits_0^1 r^2 dr = \frac{4}{3}\pi abc$$

Криволинейный интеграл

Работа переменной силы по криволинейному пути. Пусть в каждой точке трехмерной области $T \subset \mathbb{R}^3$ на материальную точку $M(x, y, z)$ действует сила $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. При перемещении материальной точки $M(x, y, z)$ в области $T \subset \mathbb{R}^3$ по некоторой траектории $L = \left\{[x, y, z]^T \in T : x = x(t), y = y(t), z = z(t); t \in [t_A; t_B]\right\}$ совершается работа W, которую и необходимо найти.

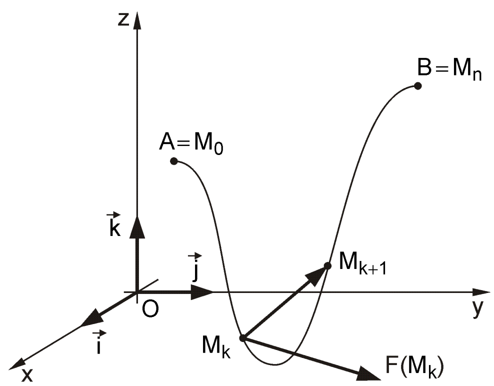

Рис. 16

Далее предполагаем:

(1) контур L является гладким, т.е. обладает непрерывно изменяющейся касательной, что означает непрерывную дифференцируемость функций $x(t), y(t)$ и $z(t)$ в множестве $[t_A; t_B]$ и $\forall\, t \in [t_A; t_B]$ должно иметь место неравенство $|x'(t)| + |y'(t)| + |z'(t)| > 0$;

(2) точка $M(x, y, z)$ описывает L при монотонном изменении параметра t от t_A до t_B;

(3) функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны на L.

Отрезок $[t_A; t_B]$ точками $\{t_k\}_{k=0}^n : t_A = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t_B$ разбиваем на n частей. Каждому значению параметра $t = t_k$ соответствует точка $M_k \in L$ с координатами $x(t_k), y(t_k), z(t_k)$. Соединив все точки $\{M_k\}_{k=0}^0$ отрезками, получаем ломаную с вершинами в этих точках.

Работу ΔW_k силы $\vec{F}(x, y, z)$ на участке $\overset{\smile}{M_k M}_{k+1}$ траектории L приближенно считаем равной $(\vec{F}(M_k); \overrightarrow{M_k M}_{k+i})$. При этом

$$\left.\begin{array}{r} \Delta x_k \stackrel{\triangle}{=} x(t_{k+1}) - x(t_k) \\ \Delta y_k \stackrel{\triangle}{=} y(t_{k+1}) - y(t_k) \\ \Delta z_k \stackrel{\triangle}{=} z(t_{k+1}) - z(t_k) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \Delta W_k \approx P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k$$

и естественно считать, что

$$W = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta W_k = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n} \Big[P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k \Big].$$

Замечание 1. Если предел в правой части последнего равенства существует и не зависит от выбора системы точек $\{t_k\}$, то его называют *криволинейным интегралом векторной функции* $\vec{F}(x, y, x)$ по ориентированному контуру L и обозначают

$$\int_L P dx + Q dy + R dz \quad \text{или} \quad \int_{\overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy + R dz$$

Замечание 2. Пусть выполнены исходные допущения и

$$S_n^x \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} P(M_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} P\big(x(t_k), y(y_k), z(t_k)\big)\{x'(t_k)\Delta t_k + o(\Delta t_k)\},$$

где $\Delta t_k \triangleq t_{k+1} - t_k$. А так как P и x' - непрерывны, то

$$\exists \lim_{\max \Delta t_k \to 0} S_n^x = \int_{tA}^{tB} P\big(x(t_k), y(y_k), z(t_k)\big)x'(t)dt$$

Проведя аналогичные рассуждения для

$$S_n^y \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} Q(M_k)\Delta y_k \quad ; \quad S_n^z \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} R(M_k)\Delta z_k$$

мы не только докажем существование криволинейного интеграла, но и получим формулу для его вычисления:

$$\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_{tA}^{tB} \Big\{ P(x(t_k), y(y_k), z(t_k))\, x'(t) + Q(x(t_k), y(y_k), z(t_k))\, y'(t) +$$
$$+ R(x(t_k), y(y_k), z(t_k))\, z'(t) \Big\} dt$$

Замечание 3. Если $A = B$, т.е. контур L является замкнутым, то используют следующее обозначение: $\oint_L P dx + Q dy + R dz$, указывая стрелкой ориентацию замкнутого контура L.

Замечание 4. Непосредственно из определения криволинейного интеграла и замечания 2 следует:

(А) При изменении направления обхода контура $L = \overset{\frown}{AB}$ криволинейный интеграл меняет знак, т.е. $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy + R dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P dx + Q dy + R dz$;

(Б) $\displaystyle\int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L P dx + \int_L Q dy + \int_L R dz$;

(В) $\{L = \bigcup\limits_{k=1}^{N} L_k\} \wedge \{m(L_k \cap L_j) = 0,\ \forall\, k \neq j\} \Longrightarrow \int\limits_{L} = \sum\limits_{k=1}^{N} \int\limits_{L_k}$;

(Г) $\{\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}\ \} \wedge \left\{ L = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\ :\ y = f(x),\ x \in [a,b] \right\} \right\} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{ L = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\ :\ \begin{matrix} x = t \\ y = f(t) \end{matrix}\ ;\ t \in [a,b] \right\} \right\} \wedge \int\limits_{L} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b} \Big\{ P(t, f(t)) + Q(t, f(t)) f'(t) \Big\} dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} P(x, f(x))dx + \int\limits_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} Q(f^{-1}(y), y)dy$$

Пример 1. Пусть $A = (0,0)$ и $B = (1,1)$. Нужно вычислить $H_k \stackrel{\triangle}{=} \int\limits_{L_k} 2xydx + x^2dy$.

$$L_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\ :\ y = x,\ 0 \le x \le 1 \right\} \Longrightarrow \Big(dx = dy \Big) \Longrightarrow H_1 = \int\limits_{0}^{1} (2x^2 + x^2)dx = x^3 \Big|_0^1 = 1\ ;$$

$$L_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\ :\ y = x^2,\ 0 \le x \le 1 \right\} \Longrightarrow \Big(dy = 2xdx \Big) \Longrightarrow H_2 = \int\limits_{0}^{1} (2x^2 + 2x^3)dx = x^4 \Big|_0^1 = 1\ ;$$

$$L_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\ :\ x = y^2,\ 0 \le x \le 1 \right\} \Longrightarrow \Big(dx = 2ydy \Big) \Longrightarrow H_3 = \int\limits_{0}^{1} (4y^4 + y^4)dy = y^5 \Big|_0^1 = 1\ ,$$

т.е. в рассматриваемом случае результат не зависит от профиля L и определяется лишь концевыми точками.

Пример 2.

$$\oint\limits_{x^2+y^2=1} \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy = \left\{ \begin{matrix} x = \cos t & ; & dx = -\sin t dt \\ y = \sin t & ; & dy = \cos t dt \end{matrix} \right\} = \int\limits_{0}^{2\pi} \Big\{ \sin^2 t + \cos^2 t \Big\} dt = 2\pi$$

Формула Грина

При дальнейших рассуждениях область $G \subset \mathbb{R}$, ограниченную замкнутым контуром L, будем называть односвязной, если любой замкнутый контур $l \subset G$ может быть стянут в точку без пересечения Γ_G.

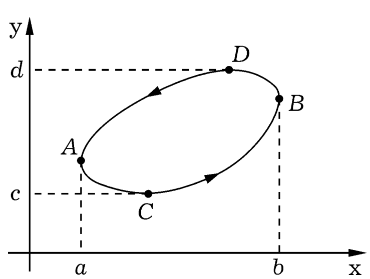

Рис. 17

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ - односвязная область, ограниченная кусочно-гладким замкнутым контуром L, и в замкнутой области $G \cup L$ определены и непрерывны скалярные функции $P(x,y)$, $P'_y(x,y)$, $Q(x,y)$, $Q'_x(x,y)$.

Пусть прямые, параллельные координатным осям, пересекают L не более чем в двух точках (прямые $x = a$, $x = b$ и $y = c$, $y = d$ могут пересекать Γ_G и по отрезкам прямых) и $\text{Пр}_{OX} G = [a, b]$, $\text{Пр}_{OY} G = [c, d]$, а участки контура L описываются уравнениями:

$$\begin{array}{l} \overset{\smile}{ACB}: \ y = \varphi_1(x) \\ \overset{\smile}{BDA}: \ y = \varphi_2(x) \end{array} \ ; \ \begin{array}{l} \overset{\smile}{DAC}: \ x = \psi_1(y) \\ \overset{\smile}{CBD}: \ y = \psi_2(x) \end{array}$$

В этом случае

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \oint\limits_L Pdx + \oint\limits_L Qdy = \int\limits_{\overset{\smile}{ACB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\overset{\smile}{BDA}} P(x,y)dx + \int\limits_{\overset{\smile}{DAC}} Q(x,y)dy + \int\limits_{\overset{\smile}{CBD}} Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))dx + \int\limits_b^a P(x, \varphi_2(x))dx + \int\limits_d^c Q(\psi_1(y), y)dy + \int\limits_c^d Q(\psi_2(y), y)dy = -\int\limits_a^b \left\{ P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \right\} dx +$$

$$+ \int\limits_c^d \left\{ Q(x,y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \right\} dy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dy + \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\, dx = \iint\limits_G \left\{ Q'_x - P'_y \right\} dxdy$$

Полученное равенство $\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_G \left\{ Q'_x - P'_y \right\} dxdy$ известно как *формула Грина.*

Пример 2^***.** В условиях примера 2

$$P = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Longrightarrow P'_y = -\frac{(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$Q = \frac{x}{x^2 + y^2} \Longrightarrow Q'_x = \frac{(x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Формально по формуле Грина

$$\oint\limits_{x^2 + y^1 = 1} Pdx + Qdy = \iint\limits_{x^2 + y^2 \le 1} \left\{ Q'_x - P'_y \right\} dxdy = \iint\limits_{x^2 + y^2 \le 1} 0 \cdot dxdy = 0.$$

Несоответствие с ранее полученным результатом обусловлено тем, что формула Грина была получена в предположении непрерывности в $G \cup \Gamma_G$ функций P, P'_y, Q и Q'_x, а в рассматриваемом примере это условие не выполняется в точке θ.

Замечание 1. Пусть прямые, параллельные координатным осям, пересекают Γ_G более, чем в двух точках, но все остальные допущения, при которых получена формула Грина выполнены.

Воспользовавшись свойствами криволинейного интеграла $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} + \int\limits_{\overset{\smile}{BA}} = 0 = \int\limits_{\overset{\smile}{BC}} + \int\limits_{\overset{\smile}{CB}}$, получаем (см.рис.)

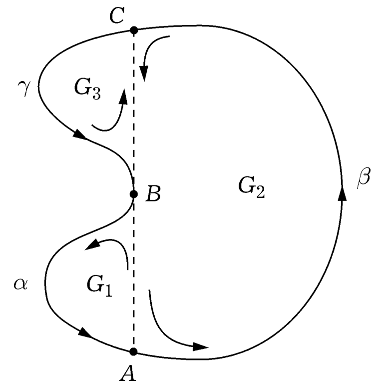

Рис. 18

$$\oint\limits_{\Gamma_G} = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{B\alpha A}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{AB}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{A\beta C}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{CB}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{BA}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{C\gamma B}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{BC}} = \iint\limits_{G_1} \Big\{ Q'_x - P'_y \Big\} dxdy + \iint\limits_{G_2} \Big\{ Q'_x - P'_y \Big\} dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{G_3} \Big\{ Q'_x - P'_y \Big\} dxdy = \iint\limits_{G} \left\{ Q'_x - P'_y \right\} dx\, dy,$$

т.е. формула Грина применима и для невыпуклых областей.

Замечание 2. Пусть при выводе формулы Грина нарушено условие односвязности области G. Пусть для определенности G - двухсвязная область с положительной ориентацией Γ_G - при ее обходе G остается слева. Разрезами AB и CD превращаем G в две односвязные области G_1, G_2 и

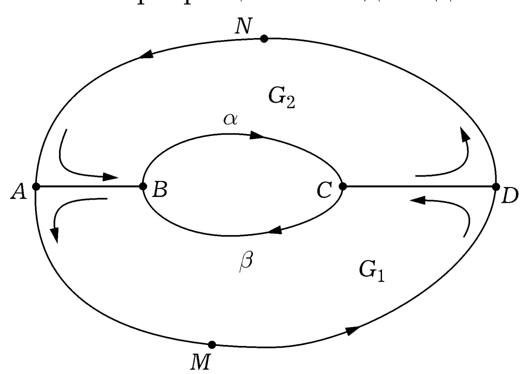

Рис. 19

$$\oint\limits_{\Gamma_G} = \Big\{ \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{AMD}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{DC}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{C\beta B}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{BA}} \Big\} + \Big\{ \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{DNA}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{AB}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{B\alpha C}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{CD}} \Big\} = \iint\limits_{G_1} \Big\{ Q'_x - P'_y \Big\} dxdy + \iint\limits_{G_2} \Big\{ Q'_x - P'_y \Big\} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G} \Big\{ Q'_x - P'_y \Big\} dxdy,$$

т.е. формула Грина применима и для неодносвязных областей.

Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Теорема. Если $P(x,y)$, $P'_y(x,y)$, $Q(x,y)$, $Q'_x(x,y)$ определены и непрерывны в замкнутой ограниченной односвязной области $G \cup L$, где $L \triangleq \Gamma_G$, то следующие четыре условия эквивалентны:

(1) $\oint\limits_{l} Pdx + Qdy = 0,\ \forall\, l \in G$;

(2) $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от профиля $\overset{\curvearrowright}{AB} \in G$;

(3) в G определена $u(x,y):\ du = Pdx + Qdy$;

(4) $P'_y \equiv Q'_y$, $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in G.$

Доказательство. Достаточно доказать, что (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

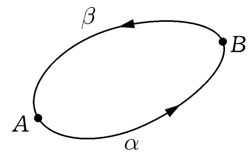

Рис. 20

$\underline{(1) \Rightarrow (2)}$. Пусть (1) имеет место. Тогда $0 \equiv \oint\limits_{(A\alpha B)\cup(B\beta A)} \equiv \int\limits_{\overset{\smile}{A\alpha B}} + \int\limits_{\overset{\smile}{B\beta A}} \equiv \int\limits_{\overset{\smile}{A\alpha B}} - \int\limits_{\overset{\smile}{A\beta B}}$, т.е. $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}$ не зависит от профиля $\overset{\smile}{AB} \in G$.

$\underline{(2) \Rightarrow (3)}$. Пусть (2) имеет место. Пусть точка $A = [x_0, y_0]^T \in G$ - фиксирована и точка $B = [x, y]$ – произвольна.

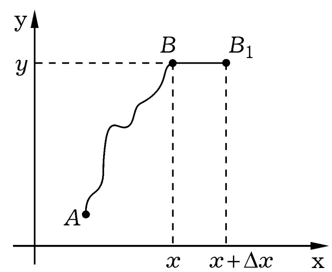

Рис. 21

Тогда $u(x,y) \triangleq \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx + Qdy$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{\overrightarrow{BB_1}} Pdx + Qdy \equiv$$

$$\equiv \Big\{ \text{т.к. } BB_1 \parallel OX \Big\} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{\Delta x} P(x,y)dx = \lim_{\Delta x \to 0} P(x + \theta \Delta x, y)\Big|_{0 \le \theta \le 1} = P(x,y),$$

т.к. $P(x,y)$ непрерывна в G. Аналогично доказывается: $u'_y = Q$. Т.о. $du = u'_x dx + u'_y dy = Pdx + Qdy$, что и требовалось доказать.

$\underline{(3) \Rightarrow (4)}$. Пусть (3) имеет место, т.е. $\exists\, u(x,y)\ :\ du = Pdx + Qdy$. А т.к. P'_y, Q'_x определены и непрерывны в $G \cup \Gamma_G$, то по теореме о смешанных производных имеем: $Q'_x = \{u'_y\}'_x \equiv \{u'_x\}'_y = P'_y$ в G, что и т.д.

$\underline{(4) \Rightarrow (1)}$. Пусть (4) имеет место и l - любой замкнутый контур, охватывающий область $D \subset G$. Тогда выполнены все условия реализации формулы Грина и

$$\oint\limits_{l} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D} \{Q'_y - P'_x\}\, dxdy = \iint\limits_{D} 0 \cdot dxdy = 0, \text{ что и т.д.}$$

Поверхностные интегралы

Понятие поверхностного интеграла I-го рода. Пусть в точках кусочно-гладкой поверхности S, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром Γ_S, определена ограниченная функция $f(x,y,z)$.

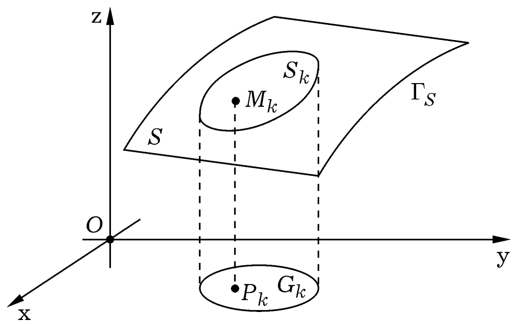

Рис. 22

Пусть Π - разбиение S на систему подобластей $\{S_k\}$, пересекающихся, быть может, лишь по границам, с отмеченными точками $\{M_k\}$, где $M_k \in S_k$. Если $\Delta\sigma_k \triangleq m(S_k)$ - площадь S_k и вне зависимости от выбора разбиения Π существует и конечен $\lim\limits_{\max d(S_k)\to 0} \sum\limits_k f(M_k)\Delta\sigma_k$, то его называют *поверхностным интегралом I-го рода* функции f по поверхности S и обозначают $\iint\limits_S f(x,y,z)d\sigma$.

Замечания.

1. Переменные x, y, z в поверхностном интеграле I-го рода не являются свободными. Они связаны уравнением поверхности.

2. Если, например, $S \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = z(x,y), \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in G \subset \mathbb{R}^2 \right\}$ – гладкая поверхность, на которой определена непрерывная функция $f(x,y,z)$, то $G = \text{Пр}_{XOY}S$ и $G_k \triangleq \text{Пр}_{XOY}S_k$, $P_k \triangleq \text{Пр}_{XOY}M_k$ - элементы разбиения области G. Кроме того,

$$\Delta\sigma_k \triangleq m(S_k) = \iint\limits_{G_k} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy = \left\{ \begin{array}{l} \text{т. о среднем} \\ \exists\, P_k^* \in G_k \end{array} \right\} = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,\Big|_{P_k^*} \cdot m(G_k).$$

Но z'_x и z'_y - непрерывны в G, т.к. S - гладкая поверхность, т.е.

$$\sqrt{1+\{z'_x(P_k^*)\}^2+\{(z'_y(P_k^*)\}^2} = \sqrt{1+\{z'_x(P_k)\}^2+\{(z'_y(P_k)\}^2} + o(\,\|\overrightarrow{P_kP_k^*}\|\,).$$

А т.к. $M_k = \begin{bmatrix} P_k \\ z(P_k) \end{bmatrix}$, то, переходя к пределу в интегральной сумме, получаем:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_G f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\{z'_x(x,y)\}^2+\{(z'_y(x,y)\}^2}\,dxdy$$

3. Поверхностный интеграл I-го рода обладает стандартными свойствами, что следует из его связи с двойным интегралом. Он используется, в частности, при определении статических моментов и моментов инерции тонких неоднородных поверхностей.

Поверхностный интеграл II-го рода

Определение 1. Гладкую поверхность S называют двухсторонней, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S и не имеющему с ее границей Γ_S общих точек, не меняет направление нормали к S на противоположное.

Замечания к определению 1.

1. Любую поверхность, которая не является двухсторонней, называют односторонней поверхностью - пример таковой - лист Мёбиуса.

2. Всякая гладкая поверхность, заданная уравнением $z = z(x, y)$ - двухстроняя.

3. Любая замкнутая поверхность без самопересечений (например сфера) - двухсторонняя поверхность.

Определение 2. Пусть в $\mathbb{R}^3$ с фиксированной левой (правой) декартовой системой координат определена двухсторонняя поверхность S, ограниченная замкнутыми контурами $\{L_k\}_{k=1}^n$. Говорят, что S ориентирована по правилу внешней нормали, если наблюдатель, расположенный на поверхности так, что направление от ног к голове совпадает с направлением вектора нормали $\vec{n}$, наблюдает положительный обход контуров $\{L_k\}_{k=1}^n$ - область (поверхность) S остается слева (справа для правой системы координат).

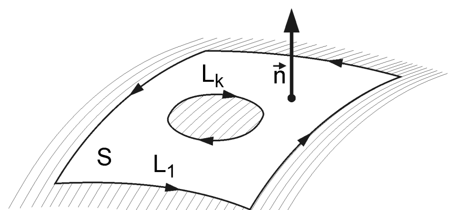

Рис. 23

Задача о потоке несжимаемой жидкости через прозрачную ориентированную поверхность

Пусть $\mathbb{R}^3$ заполнено стационарно движущейся несжимаемой жидкостью с вектором скорости
$$\vec{V}(x, y, z) = \vec{i}P(x, y, z) + \vec{j}Q(x, y, z) + \vec{k}R(x, y, z).$$
Необходимо определить количество жидкости, протекающее в единицу времени через ориентированную по правилу внешней нормали поверхность S, прозрачную для жидкости.

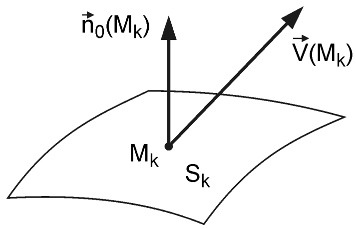

Рис. 24

Решение. Пусть имеем разбиение $\{S_k\}$ поверхности S и $\{M_k\}$ - произвольные отмеченные точки. Тогда искомый поток (количество жидкости в единицу времени)

$$\Pi = \lim_{\max d(S_k)\to 0} \sum_k \big(\vec{V}(M_k); \vec{n}_0(M_k)\big) \cdot m(S_k) \qquad (*)$$

Замечания.

1. Если предел в правой части равенства $(*)$ существует, конечен и не зависит от выбора разбиения S и выбора отмеченных точек, то его называют *поверхностным интегралом векторной функции* $\vec{V}(x, y, z)$ по поверхности S, ориентированной по правилу внешней нормали (поверхностным интегралом II-го рода) и обозначают

$$\iint\limits_S (\vec{V}(x, y, z); \vec{n}_0(x, y, z))d\sigma \equiv \iint\limits_S \left\{P\cos(\widehat{\vec{n};\vec{i}}) + Q\cos(\widehat{\vec{n};\vec{j}}) + R\cos(\widehat{\vec{n};\vec{k}})\right\}d\sigma$$

$\sigma \triangleq m(S)$, $\vec{n}_0$ - единичный вектор для $\vec{n}$.

2. Поверхностный интеграл II-го рода - поверхностный интеграл I-го рода, зависящий не только от векторной функции $\vec{V} = \vec{i}\,P + \vec{j}\,Q + \vec{k}\,R$, но и от направления внешней нормали в каждой точке поверхности S.

3.

$$\iint\limits_S \left\{P\cos(\widehat{\vec{n};\vec{i}}) + Q\cos(\widehat{\vec{n};\vec{j}}) + R\cos(\widehat{\vec{n};\vec{k}})\right\}d\sigma \equiv \iint\limits_S P\cos(\widehat{\vec{n};\vec{i}})d\sigma + \iint\limits_S Q\cos(\widehat{\vec{n};\vec{j}})d\sigma + \iint\limits_S R\cos(\widehat{\vec{n};\vec{k}})d\sigma.$$

4. Для односторонней поверхности понятие поверхностного интеграла II-го рода не вводится.

5. При переходе на противоположную сторону поверхности S поверхностный интеграл II-го рода меняет знак.

6. Если $S = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \,:\, z = z(x,y);\, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in G_{xy}\right\}$ и вектор нормали $\vec{n}(x,y,z)$ образует с OZ острый угол, т.е. интеграл берется по "верхней" части поверхности S, то

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\cos(\widehat{\vec{n};\vec{k}})d\sigma = \iint\limits_{G_{xy}} R\big(x,y,z(x,y)\big)\,dxdy$$

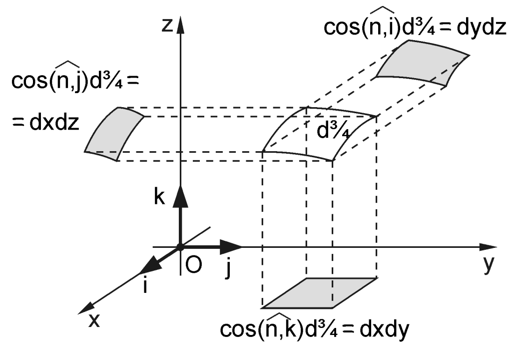

Рис. 25

Поэтому (см. рис.) при записи поверхностного интеграла II-го рода используют и следующую форму:

$$\iint\limits_S P\,dydz + \iint\limits_S Q\,dzdx + \iint\limits_S R\,dxdy.$$

Пример 1. Пусть S - внешняя часть верхней полусферы радиуса a с центром в начале координат, т.е.

$$S = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \,:\, z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2};\; x^2 + y^2 \le a^2\right\}.$$

В этом случае

$$J \triangleq \iint\limits_S z^3 dxdy = +\iint\limits_{x^2+y^1\le a^2} \{a^2 - x^2 - y^2\}^{3/2} dxdy = \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a (a^2 - r^2)^{3/2} r dr =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2 - r^2)^{5/2} \cdot \frac{2}{5}\Big|_0^a = \frac{2\pi}{5}\,a^5$$

7. Совершенно аналогично можно рассматривать поверхностный интеграл II-го рода по ориентированной замкнутой поверхности.

Пример 2. Пусть S ограничивает прямой круговой цилиндр высоты h и с радиусом основания a. Пусть S ориентирована по правилу внешней нормали и необходимо вычислить $J = \oiint\limits_S x dydz + y dxdy \equiv J_1 + J_2$, где $J_1 \triangleq \oiint\limits_S P dydz \equiv \oiint\limits_S x dydz$, $J_2 \triangleq \oiint\limits_S R dxdy \equiv \oiint\limits_S y dxdy$. Согласно рис. имеем:

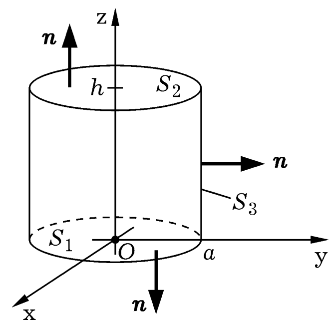

Рис. 26

$$J_2 \triangleq -\iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} + \iint\limits_{S_3} y \underbrace{\cos(\widehat{\vec{n};\vec{k}})}_{=0} d\sigma = -\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} ydxdy + \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} ydxdy \equiv 0.$$

$$J_1 = \iint\limits_{S_1} x \underbrace{\cos(\widehat{\vec{n};\vec{i}})}_{=0} d\sigma + \iint\limits_{S_2} x \underbrace{\cos(\widehat{\vec{n};\vec{i}})}_{=0} d\sigma + \iint\limits_{S_3} xdydz.$$

А т.к. $S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x^2 + y^2 = a^2 \wedge 0 \le z \le h^2 \right\}$, то $S_3 = S_3^+ \cup S_3^-$, где S_3^+ - "передняя" часть S_3, внешняя нормаль к которой образует острый угол с OX, а S_3^- - "задняя" часть S_3. Таким образом:

$$J_1 = \iint\limits_{S_3^+} - \iint\limits_{S_3^-} \equiv \iint\limits_{\substack{-a \le y \le a \\ 0 \le z \le h}} \left\{+\sqrt{a^2 - y^2}\right\} dydz - \iint\limits_{\substack{-a \le y \le a \\ 0 \le z \le h}} \left\{-\sqrt{a^2 - y^2}\right\} dydz =$$

$$= 2\int\limits_0^h dz \int\limits_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = 4h \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \left\{ \begin{array}{l} y = a\sin t \\ dy = a\cos t dt \end{array} ; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\} = 4ha^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$= 2ha^2 \int\limits_0^{\pi/2} \left\{1 + \cos 2t\right\} dt = \pi h a^2$$

Формула Остроградского-Гаусса

Пусть трехмерная область $T \subset \mathbb{R}^3$ ограничена кусочно-гладкими поверхностями S_1, S_2 и цилиндрической поверхностью S_3, образующая которой параллельна OZ. Таким образом $\Gamma_T = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, а саму область называют z-цилиндрической.

Пусть далее $R(x, y, z)$ и $R'_z(x, y, z)$ определены и непрерывны в замкнутой области $T \cup \Gamma_T$, а замкнутая поверхность Γ_T ориентирована по правилу внешней нормали.

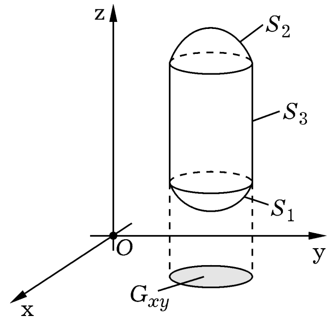

Рис. 27

Тогда

$$\oiint\limits_{\Gamma_T} R\cos(\vec{n};\vec{k})d\sigma = \iint\limits_{S_1} R\underbrace{\cos(\vec{n};\vec{k})}_{<0}d\sigma + \iint\limits_{S_2} R\underbrace{\cos(\vec{n};\vec{k})}_{>0}d\sigma + \iint\limits_{S_3} R\underbrace{\cos(\vec{n};\vec{k})}_{=0}d\sigma =$$

$$= -\iint\limits_{G_{xy}} R(x,y,\varphi_1(x,y))\,dxdy + \iint\limits_{G_{xy}} R(x,y,\varphi_2(x,y))\,dxdy \equiv \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dz \equiv$$

$$\equiv \iiint\limits_T R'_z(x,y,z)\,dxdydz$$

Совершенно аналогично, если T является еще и x-цилиндрической и y-цилиндрической, а в $T\cup\Gamma_T$ определены и непрерывны функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $P'_x(x,y,z)$, $Q'_y(x,y,z)$, то

$$\oiint\limits_{\Gamma_T} P\cos(\vec{n};\vec{i})d\sigma = \iiint\limits_T P'_x\,dxdydz\ ;\ \oiint\limits_{\Gamma_T} Q\cos(\vec{n};\vec{j})d\sigma = \iiint\limits_T Q'_y\,dxdydz$$

и мы приходим к равенству, известному как *формула Остроградского-Гаусса:*

$$\oiint\limits_{\Gamma_T} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy \equiv \iiint\limits_T \left\{P'_x + Q'_y + R'_z\right\} dxdydz$$

Пример 3. Пусть S - сфера с центром в начале координат, радиусом a и внешней ориентацией.

$$\oiint\limits_S x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy = 3\iiint\limits_{x^2+y^2+x^2\le a^2} (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz =$$

$$= \left\{\begin{array}{l|l} x = r\cos\varphi\cos\psi & 0\le\varphi<2\pi \\ y = r\sin\varphi\cos\psi & -\pi/2<\psi<\pi/2 \\ z = r\sin\psi & 0\le r\le a \end{array}\right\} = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi \int\limits_0^a r^2\cdot r^2dr = \frac{12}{5}\,\pi a^5$$

Замечания.

1. Область, являющаяся одновременно $x, y,$ и z-цилиндрической, называют простой.

2. Формула Остроградского-Гаусса может быть получена и при менее жестких ограничениях: T в $\mathbb{R}^3$ имеет конечный диаметр, а Γ_T - объединение конечного числа кусочно-гладких поверхностей; P, Q, R непрерывны в $T\cup\Gamma_T$; P'_x, Q'_y, R'_z - непрерывны в T и $\exists \iiint\limits_T \left\{P'_x + Q'_y + R_z\right\} dxdydz$.

Пример 4. В условиях примера 2 : $P\equiv x$, $Q\equiv 0$, $R\equiv y$. Таким образом $\oiint\limits_{\Gamma_T} xdydz + ydxdy = \iiint\limits_T \{1+0+0\}\,dxdydz = m(T) = \pi a^2 h.$

Пример 5. $J \triangleq \underset{S_1}{\iint\!\!\!\!\!\!\bigcirc} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = \{\text{см.рис.}\} = J_1 - J_2.$

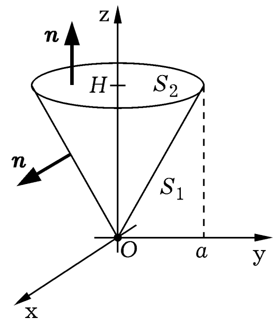

Рис. 28

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; : \; z = \frac{H}{a}\sqrt{x^2+y^2}\,,\; x^2+y^2 \le a \right\},\; S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \; : \; \begin{matrix} x^2+y^2 \le a \\ z = H \end{matrix} \right\}$$

$$J_1 \triangleq \underset{S_1\cup S_2}{\iint\!\!\!\!\!\!\bigcirc} = \iiint\limits_T \{3x^2+3y^2+3z^2\}\,dxdydz = \left\{ \begin{array}{l|l} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi & 0 \le t \le \frac{H}{a} \\ z = t & 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right\} =$$

$$= 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{H} dt \int\limits_0^{at/H} \{r^2+t^2\} r dr = 6\pi \int\limits_0^H \left\{ \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\,t^2 \right\}\Bigg|_0^{at/H} dt = \frac{3\pi}{2}\int\limits_0^H \left\{ \frac{a^4}{H^4}\,t^4 + 2\frac{a^2}{H^2}\,t^4 \right\} dt =$$

$$= \frac{3\pi}{10}\,a^2(a^2+2H^2)H.$$

$$J_2 \triangleq \iint\limits_{S_2} \{x^3 \underbrace{\cos(\vec{n};\vec{i})}_{0} + y^3 \underbrace{\cos(\vec{n};\vec{j})}_{0} + z^3 \underbrace{\cos(\vec{n};\vec{k})}_{1}\} d\sigma \equiv \iint\limits_{S_2} z^3 dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} H^3 dxdy = \pi a^2 H^3$$

Таким образом

$$J = J_1 - J_2 = \frac{3\pi}{10}\,a^2(a^2+2H^2)H - \pi a^2 H^3 = \pi a^2(0.3a^2 - 0.4H^2)H$$

Формула Стокса

Формула Стокса устанавливает связь между криволинейным интегралом в $\mathbb{R}^3$ и поверхностным интегралом II-го рода.

Пусть S - гладкая поверхность, ориентированная по правилу внешней нормали и ограниченная ориентированным замкнутым контуром $\lambda \triangleq \Gamma_S$.

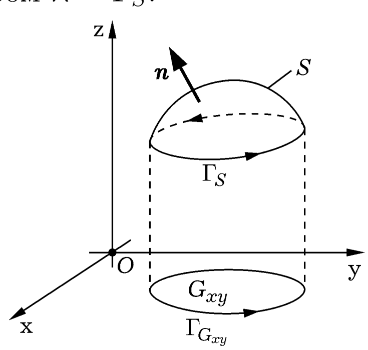

Рис. 29

Пусть в некоторой области из $\mathbb{R}^3$, содержащей поверхность S, определена и непрерывно дифференцируема векторная функция $\vec{A}(x,y,z)=\vec{i}P(x,y,z)+\vec{j}Q(x,y,z)+\vec{k}R(x,y,z)$. Пусть для определенности $S=\left\{\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} \;:\; z=z(x,y),\; \begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}\in G_{xy}\subset\mathbb{R}^2\right\}$. В этом случае $G_{xy}=\text{Пр}_{XOY}S$; $L=\text{Пр}_{XOY}\lambda$.
Рассмотрим

$$J_1 \triangleq \oint\limits_{\lambda} P(x,y,z)dx = \oint\limits_{L} P\big(x,y,z(x,y)\big)dx = \left\{\begin{array}{l}\text{формула}\\ \text{Грина}\end{array}\right\} = -\iint\limits_{G_{xy}}\left\{\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right\}dxdy,$$

т.к. $P\big(x,y,z(x,y)\big)$ - сложная функция. $\vec{n}=\begin{bmatrix} z'_x\\ z'_y\\ -1\end{bmatrix}=\gamma\,\vec{n}_0=\gamma\begin{bmatrix}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{i}})\\ \cos(\widehat{\vec{n},\vec{j}})\\ \cos(\widehat{\vec{n},\vec{k}})\end{bmatrix}\Longrightarrow z'_y=-\dfrac{\cos(\widehat{\vec{n},\vec{j}})}{\cos(\widehat{\vec{n},\vec{k}})}$.

Таким образом

$$J_1=\iint\limits_{G_{xy}}\left\{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos(\widehat{\vec{n},\vec{j}})}{\cos(\widehat{\vec{n},\vec{k}})}\right\}dxdy=\left\{dxdy=d\sigma\cos(\widehat{\vec{n},\vec{k}})\right\}=$$

$$=\iint\limits_{S}\left\{\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{j}})-\frac{\partial P}{\partial y}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{k}})\right\}d\sigma \quad (1)$$

Если $S=\left\{\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} \;:\; y=y(x,z),\; \begin{bmatrix} x\\ z\end{bmatrix}\in G_{xz}\subset\mathbb{R}^2\right\}$, то равенство (1) получаем по той же схеме.
Если S - часть плоскости, ортогональной OX, то равенство (1) очевидно, т.к. $\text{Пр}_{XOY}S$ - отрезок и $\text{Пр}_{XOZ}S$ - отрезок.

Аналогично равенству (1) получаем:

$$\oint\limits_{\lambda} Q\,dy=\iint\limits_{S}\left\{\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{k}})-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{i}})\right\}d\sigma\;;$$

$$\oint\limits_{\lambda} R\,dz=\iint\limits_{S}\left\{\frac{\partial R}{\partial y}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{i}})-\frac{\partial R}{\partial x}\cos(\widehat{\vec{n},\vec{j}})\right\}d\sigma.$$

Таким образом имеем:

$$\oint\limits_{\lambda} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_{S}\left\{(Q'_x-P'_y)\cos(\widehat{\vec{n},\vec{k}})+(R'_y-Q'_z)\cos(\widehat{\vec{n},\vec{i}})+(P'_z-R'_x)\cos(\widehat{\vec{n},\vec{j}})\right\}d\sigma=$$

$$=\iint\limits_{S}(Q'_x-P'_y)dxdy+(R'_y-Q'_z)dydz+(P'_z-R'_x)dzdx\equiv$$

$$\equiv\iint\limits_{S}\left(\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial k\\ P & Q & R\end{vmatrix}\;;\;\vec{i}\,dydz+\vec{j}\,dzdx+\vec{k}\,dxdy\right)$$

Замечания.

1. Можно показать, что формула Стокса остается справедливой и в том случае, когда S - объединение конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

2. Как и в плоском случае может быть сформулирована и доказана теорема о четырех эквивалентных условиях: если $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ определены и непрерывно дифференцируемы в замкнутой ограниченной односвязной области $T \subset \mathbb{R}^3$, то следующие четыре условия эквивалентны:

(1) $\displaystyle\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz \equiv 0,\ \forall\, L \subset T$;

(2) $\displaystyle\int_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ не зависит от профиля дуги $\overset{\smile}{AB}$, содержащиейся в T ;

(3) $\exists\, u(x,y,z)\ : du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ в T ;

(4) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial k \\ P & Q & R \end{vmatrix} \equiv \vec{\Theta}$ в T, т.е. $\begin{matrix} R'_y \equiv Q'_z \\ R'_x \equiv P'_z \\ Q'_x \equiv P'_y \end{matrix}$.