ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

ЛЕКЦИЯ 1.

Определение 1. Пару числовых последовательностей $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$, $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ называют числовым рядом, если их элементы являются вещественными числами и $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\forall\, n \geqslant 1$. При этом a_k называют k-ым или общим членом ряда, а S_n – n-ой частной суммой ряда.

Замечание 1. Числовой ряд $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$, $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ часто называют рядом с общим членом a_k или просто рядом $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$, а иногда рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Пример 1. $a_k = 1/k$ – общий член гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k} + \cdots$

Определение 2. Числовой ряд $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ называют сходящимся, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $|S| < \infty$. При этом число S называют суммой сходящегося числового ряда $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ и пишут $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k$.

Замечание 2. Числовой ряд $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ называют расходящимся, если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$.

Замечание 3. Величину $R_n \triangleq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ называют n-ым остатком числового ряда $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$. При этом, если $S \triangleq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ – сумма числового ряда $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$, а она может быть равной $\pm\infty$ или не существовать, то $S = S_n + R_n$. Если же числовой ряд $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $|S| < \infty$, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = S - \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.

Теорема 1. (Необходимый признак сходимости). Если числовой ряд $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_k = 0$.

Доказательство. По условию $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $|S| < \infty$. А так как $a_n = S_n - S_{n-1}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Пример 2. Рассмотрим гармонический ряд с общим членом $a_k = 1/k$. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_k = 0$, т.е. необходимый признак имеет место и ряд может сходиться. Рассмотрим частную сумму

$$S_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \cdots + \frac{2^n}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^{n+1}} \geqslant \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{n+1}{2}\right) = \infty$ и рассматриваемый ряд расходится.

Пример 3. Рассмотрим числовой ряд с общим членом $a_k = \alpha_0 q^k$, где $k \geqslant 0$, а α_0 и q – ненулевые конечные фиксированные числа. В этом случае имеем:
$(|q| < 1) \Longrightarrow (\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0)$ и ряд может сходиться;
$(q = +1) \Longrightarrow (\exists \lim a_k = \alpha_0 \neq 0)$ и ряд расходится;
$(q > +1) \Longrightarrow (\exists \lim a_k = +\infty)$ и ряд расходится;
$(q \leqslant -1) \Longrightarrow (\nexists \lim a_k)$ и ряд расходится.
Если $|q| < 1$, то $S_n = \alpha_0(1 + q + \ldots + q^n) = \alpha_0(1 - q^{n+1})/(1 - q)$ и, как следствие, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\alpha_0}{1-q}$. Таким образом рассматриваемый числовой ряд сходится.

Теорема 2. Если $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ и $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$ – сходящиеся числовые ряды, а S_a и S_b – их суммы соответственно, то для любых конечных $\lambda, \mu, \in \mathbb{R}^1$ числовой ряд $\{\lambda\, a_k + \mu\, b_k\}_{k\geqslant 1}$ является сходящимся и $(\lambda S_a + \mu S_b)$ – его сумма.

Доказательство. Согласно условию $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S_a$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = S_b$. При этом $|S_a| < \infty$ и $|S_b| < \infty$. Таким образом, при $|\lambda| < \infty$ и $|\mu| < \infty$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k+\mu \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \lambda S_a+\mu S_b$. А т.к. $|\lambda S_a+\mu S_b| \leqslant |\lambda||S_a|+|\mu||S_b| < \infty$, то теорема доказана полностью.

Следствие из теоремы 2. Линейная комбинация сходящегося и расходящегося числовых рядов – расходящийся числовой ряд.

Предварительные рассуждения.

1. $R_N \overset{\triangle}{=} S - S_N = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+k} + \ldots$, т.е. N-ый остаток числового ряда $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ можно рассматривать как сумму числового ряда с общим членом a_{N+k}, где N – фиксированное целое положительное число. Для этого числового ряда $\{a_{N+k}\}_{k\geqslant 1}$ можно рассматривать частные суммы и остатки.

2. Пусть N - фиксировано. Рассмотрим частную сумму $S_{N+p} \equiv S_N + (a_{N+1} + \ldots + a_{N+p})$. S_N – конечное число, а $\sigma_p^N \overset{\triangle}{=} (a_{N+1} + \ldots + a_{N+p})$ – p-ая частная сумма числового ряда $\{a_{N+k}\}_{k\geqslant 1}$, то есть p-ая частная сумма N-го остатка исходного ряда. Таким образом, $S_{N+p} = S_N + \sigma_p^N$ и конечные пределы при $p \to +\infty$ для S_{N+p} и σ_p^N либо одновременно существуют, либо нет. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Любой числовой ряд сходится или расходится одновременно с любым своим остатком.

Следствие из теоремы 3. Пусть числовой ряд $\{b_j\}_{j\geqslant 1}$ получен из числового ряда $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ путем
(α) замены в нем конечного числа элементов новыми;
(β) отбрасывания или приписывания конечного числа элементов;
(γ) перестановки в нем конечного числа элементов.
В этом случае числовые ряды $\{b_j\}_{j\geqslant 1}$ и $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ сходятся или расходятся одновременно.

Знакоположительные числовые ряды

Если $a_k > 0; \forall\, k \geqslant 1$, то $S_n = S_{n-1} + a_n > S_{n-1}$ и последовательность частных сумм знакоположительного числового ряда $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ является монотонно возрастающей. А так как монотонно возрастающая числовая последовательность может иметь конечный предел лишь в случае своей ограниченности, то имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Знакоположительный числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда монотонно возрастающая последовательность его частных сумм ограничена сверху.

Интегральный признак Коши. Если, начиная с некоторого номера N, члены знакоположительного числового ряда $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ могут быть представлены как значения некоторой непрерывной, положительной, монотонно убывающей функции $f(x)$: $a_k = f(k); \forall\, k \geqslant N$, то исходный ряд сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int\limits_N^{\infty} f(x)dx$.

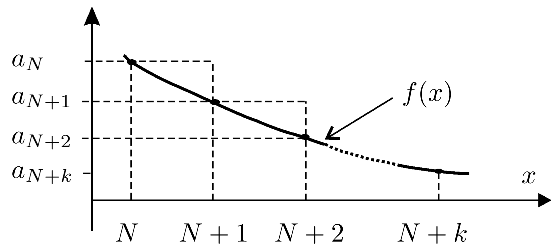

Рис.30

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда из свойств площадей объемлемых и объемлющих плоских фигур следует (см. рис. 30):

$$\sigma_{N+1}^{k} \triangleq a_{N+1} + \ldots + a_{N+k} < \int\limits_{N}^{N+k} f(x)dx < a_N + \sigma_{N+1}^{k-1} \equiv a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+k-1},$$

где σ_{N+1}^{m} - m-ая частная сумма остатка R_{N+1} исходного ряда.

(α). Пусть рассматриваемый интеграл сходится. Тогда $\sigma_{N+1}^{k} < \int\limits_{N}^{N+k} f(x)dx < \int\limits_{N}^{\infty} f(x)dx < \infty$, $\forall\ k \geqslant 1$ и, согласно теореме 1 и теореме об остатках, исходный ряд сходится.

(β). Пусть рассматриваемый интеграл расходится. Но тогда из неравенства $\int\limits_{N}^{N+k} f(x)dx < a_N + \sigma_{N+1}^{k}$, справедливого $\forall\ k \geqslant 1$ следует монотонное неограниченное возрастание знакоположительной числовой последовательности $\{\sigma_{N+1}^{k}\}_{k\geqslant 1}$, т.е. расходимость остатка R_{N+1} и, как следствие (см. теорему об остатках), расходимость исходного ряда.

(γ). Пусть сходится исходный числовой ряд. Тогда одновременно с ним сходятся и все его остатки, т.е. $a_N + \sigma_{N+1}^{k-1} \leqslant b < \infty$, и, как следствие, имеют место неравенства $\int\limits_{N}^{N+k} f(x)dx < a_N + \sigma_{N+1}^{k-1} < b < \infty$, из которых и следует сходимость рассматриваемого несобственного интеграла.

(δ). Пусть исходный числовой ряд расходится. Тогда $\sigma_{N+1}^{k} \to \infty$ при $k \to \infty$ и из неравенства $\sigma_{N+1}^{k} < \int\limits_{N}^{N+k} f(x)dx$ следует расходимость рассматриваемого несобственного интеграла.

Пример 1. Пусть $a_k = \dfrac{1}{k^\lambda}$, $\forall\ k \geqslant 1$. При $\lambda = 1$ имеем расходящийся гармонический ряд, а при $\lambda \leqslant 0$ числовой ряд $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ расходится по необходимому признаку. Рассмотрим случай $(\lambda > 0) \wedge (\lambda \neq 1)$:

$\int\limits_{1}^{\infty} \dfrac{dx}{x^\lambda} = \dfrac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Big|_{1}^{\infty}$ – сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $0 < \lambda < 1$.

Таким образом знакоположительный числовой ряд $\left\{\dfrac{1}{k^\lambda}\right\}_{k\geqslant 1}$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda \leqslant 1$.

Пример 2. Пусть $a_k = \dfrac{1}{k(\ln k)^\mu}$, где $k \geqslant 2$. В этом случае

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\mu} = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{d\ln x}{(\ln x)^\mu} = \Big\{y = \ln x\Big\} = \int\limits_{\ln 2}^{\infty} \frac{dy}{y^\mu}.$$

Таким образом (см. пример 1) знакоположительный числовой ряд $\left\{\dfrac{1}{k(\ln k)^\mu}\right\}_{k\geqslant 2}$ сходится при

$\mu > 1$ и расходится при $\mu \leqslant 1$.

Признак сравнения. Пусть $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ – два знакоположительных числовых ряда и $\exists\, N \geqslant 1 \ : \forall\, n \geqslant N \ a_n \geqslant b_n$. В этом случае из сходимости ряда $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ следует сходимость ряда $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, а из расходимости ряда $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ следует расходимость ряда $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$.

Доказательство. По условию $\forall\, p \geqslant 1$ имеем $\displaystyle\sum_{k=N}^{N+p} a_k \geqslant \sum_{k=N}^{N+p} b_k$.

α). Если знакоположительный числовой ряд $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ – сходится, то $\displaystyle\sum_{k=N}^{N+p} b_k \leqslant \sum_{k=N}^{N+p} a_k < \sum_{k=N}^{\infty} < \infty$. Таким образом, последовательность частных сумм для знакоположительного числового ряда $\{b_k\}_{n\geqslant 1}$, монотонно возрастая, ограничена сверху, т.е. она имеет конечный предел и ряд $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$ – сходится.

β). Если ряд $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ расходится, то $\displaystyle\sum_{k=N}^{N+p} a_k \geqslant \sum_{k=N}^{N+p} b_k \to \infty$ и ряд $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ – расходится.

Пример 1. $b_n = \dfrac{1}{n^2}\,\sin^2 n \leqslant \dfrac{1}{n^2} = a_n$. Ряд $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится как ряд $\left\{\dfrac{1}{k^\lambda}\right\}_{k\geqslant 1}$ при $\lambda = 2 > 1$, т.е. и ряд $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится.

Замечание к признаку сравнения. Если $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q \in (0;\infty)$, то ряды $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Как известно их курса математического анализа

$\left(\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = q \in (0;\infty)\right) \Longleftrightarrow \Big((\forall\,\varepsilon > 0)(\exists\, N(\varepsilon) > 0) : (n \geqslant N(\varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(|a_n/b_n - q| < \varepsilon\Big)$. Полагаем $\varepsilon = q/2$. Тогда $\forall\, n \geqslant N(q/2)$ имеем:

$$\left(\left|\frac{a_n}{b_n} - q\right| < \frac{q}{2}\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{q}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3q}{2}\right) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a_n < 1,5q\, b_n & (*) \\ a_n > 0,5q\, b_n & (**) \end{array}\right\} \text{ т.е.}$$

согласно **(*)** из сходимости ряда $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ следует сходимость ряда $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, а из расходимости ряда $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ следует расходимость ряда $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$;

согласно **(**)** из сходимости ряда $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ следует сходимость ряда $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, а из расходимости ряда $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ следует расходимость ряда $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$.

Пример 2. Ряд с общим членом $a_n = \left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right) = 2n\sin^2\dfrac{1}{n}$ расходится, т.к. ряд с общим членом $b_n = \dfrac{1}{n}$ расходится и $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} 2n^2\sin^2\frac{1}{n} = 2 \in (0;\infty)$.

Признак де′Аламбера. Если существует $N \geqslant 1$ и для любого $n \geqslant N$ имеет место неравенство $a_{n+1}/a_n \leqslant q < 1$, то знакоположительный числовой ряд $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится и расходится, если $a_{n+1}/a_n \geqslant q > 1$.

Доказательство.

(α). Если $\forall\ n \geqslant N \geqslant 1$ имеет место неравенство $a_{n+1}/a_n \leqslant q < 1$, то $a_{N+1} \leqslant q\, a_N, a_{N+2} \leqslant q\, a_{N+1} \leqslant q^2\, a_N, \ldots, a_{N+p} \leqslant q^p \cdot a_N$. А так как $a_N - \text{const}$ и $0 < q < 1$, то рассматриваемый числовой ряд $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится по признаку сравнения со сходящейся геометрической прогрессией.

(β). Если $q > 1$, $a_{N+p} \geqslant q^p\, a_N$ и ряд расходится по признаку сравнения с расходящейся геометрической прогрессией.

Замечание к признаку де′Аламбера. Если $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ и $q < 1$, то ряд $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится; если $q > 1$, то ряд расходится; если же $q = 1$, то необходимы дополнительные исследования.

Доказательство.
$\left(\exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1\right) \Longleftrightarrow \left((\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,N(\varepsilon)>0)\,:\,(n\geqslant N(\varepsilon))\Longrightarrow\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-q\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (q-\varepsilon<a_{n+1}/a_n<q+\varepsilon)$.
Если $0<q<1$, то выбираем $\varepsilon=(1-q)/2$. Тогда $a_{n+1}/a_n<(q+1)/2<1$ и ряд $\{a_k\}_{k\geqslant1}$ сходится по признаку де$'$Аламбера.
Если $q>1$, то выбираем $\varepsilon=(q-1)/2$. Тогда $a_{n+1}/a_n>(q+1)/2>1$ и ряд $\{a_k\}_{k\geq1}$ расходится по признаку де$'$Аламбера.

Пример 3. $\left(a_n=\dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}\right)\Rightarrow\left(a_{n+1}=\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right)\Rightarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}\cdot n!\cdot(n+1)}{(n+1)^{n+1}}\times\right.$
$\left.\times\dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^n}{(n+1)^n}\equiv3\lim\limits_{n\to\infty}1\Big/\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{2}{e}>1\right)$ и ряд $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ расходится.

Признак Коши (с радикалом). Если существует $N\geqslant1$ такой, что для любого $n\geqslant N$ имеет место неравенство $\sqrt[n]{a_n}\leqslant q<1$, то ряд $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ сходится, если $\sqrt[n]{a_n}\geqslant q>1$, то исходный ряд расходится.

Доказательство. Следует из очевидных неравенств: (α) $a_n\leqslant q^n$, где и $q<1$; (β) $a_n\geqslant q^n$, где $q>1$ и признаков сравнения.

Замечание к признаку Коши (с радикалом). Если $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, то при $q<1$ ряд $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ сходится и расходится при $q>1$.

Доказательство. $\left(\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q\right)\Longleftrightarrow\left((\forall\,\varepsilon>0)(\exists\,N(\varepsilon)>0)\,:\,n\geqslant N(\varepsilon)\Rightarrow|\sqrt[n]{a_n}-q|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow\left((q-\varepsilon)^n<a_n<(q+\varepsilon)^n\right)$ – дальнейшее как и при доказательстве замечания к признаку де$'$Аламбера.

Пример 4. $\left(a_n=\dfrac{n^n}{(3n+4)^{n/2}}\right)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{3n+4}}=\infty$ и ряд $\{a_n\}_{n\geqslant1}$ расходится.

Знакопеременные числовые ряды – ряды, элементами которых являются вещественные числа, имеющие любой знак. Если элементы ряда последовательно изменяют знак, то ряд называют знакочередующимся.

Теорема Лейбница. Если $a_1>a_2>\ldots>a_k>a_{k+1}>\ldots>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то знакочередующийся числовой ряд $\{(-1)^{k+1}a_k\}_{k\geqslant1}$ сходится и его сумма $S<a_1$.

Доказательство. $S_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{2n}(-1)^k a_k\equiv(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n})>0$, т.к. $a_{2k-1}>a_{2k}$.
Таким образом последовательность $\{S_{2n}\}$ является знакоположительной и монотонно возрастает. При этом $S_{2n}\equiv a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\ldots-(a_{2n-2}-2_{2n-1})-a_{2n}<a_1$, т.к. $a_{2k}>a_{2k+1}$. Таким образом $\exists\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S<a_1$.

С другой стороны $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$ и $\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$, т.е. $\exists\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S<a_1$.

Пример 5. Знакочередующийся числовой ряд с общим членом $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ и $|a_n|=\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}=|a_{n+1}|$.

Определение. Знакопеременный числовой ряд $\{b_n\}_{n\geqslant1}$ называют абсолютно сходящимся, если сходится знакоположительной числовой ряд $\{|b_n|\}_{n\geqslant1}$. При этом, если ряд $\{|b_n|\}_{n\geqslant1}$ расходится, а ряд $\{b_n\}_{n\geqslant1}$ сходится, то говорят, что исходный числовой ряд $\{|b_n|\}_{n\geqslant1}$ сходится "условно".

Пример 6.
(α) Знакочередующийся числовой ряд с общим членом $a_n=(-1)^n/n$ сходится "условно", т.к. он

сходится, а знакоположительный числовой ряд $\{1/n\}_{n\geqslant 1}$ расходится.
(β) Знакочередующийся числовой ряд с общим членом $a_n = (-1)^n/n^2$ сходится абсолютно, т.к. сходится знакоположительный числовой ряд $\{1/n^2\}_{n\geqslant 1}$.

О структуре абсолютно и условно сходящихся радов.

Пусть $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ – знакопеременный числовой ряд. Далее рассмотрим числовые ряды, представленные своими общими членами:
(I) a_n ; (II) $|a_n|$;
(III) $b_n \triangleq \dfrac{1}{2}\{|a_n| + a_n\} \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} a_n & ; & a_n > 0 \\ 0 & ; & a_n < 0 \end{array} \right\}$;
(IV) $c_n \triangleq \dfrac{1}{2}\{|a_n| - a_n\} \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & ; & a_n > 0 \\ |a_n| & ; & a_n < 0 \end{array} \right\}$.
При этом
(A) $a_n = b_n - c_n$ и $|a_n| = b_n + c_n$;
(Б) $b_n \leqslant |a_n|$ и $c_n \leqslant |a_n|$.

Если ряд $\{|a_n|\}_{n\geqslant 1}$ сходится, то, по признаку сравнения, согласно (Б), сходятся знакоположительные числовые ряды $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$ и, согласно (A), сходится ряд $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ как их линейная комбинация. Таким образом абсолютно сходящийся числовой ряд – сходится.

Если одновременно сходятся ряды $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, то, согласно (A), сходятся и ряды $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{|a_n|\}_{n\geqslant 1}$.

Если ряд $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ – сходится, а ряд $\{|a_n|\}_{n\geqslant 1}$ – расходится, то ряды $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{c_n\}_{n\geqslant 1}$ не могут сходиться одновременно, а могут лишь одновременно расходиться.

Если ряд $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ – сходится, а ряд $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ – расходится или наоборот, то расходятся и числовые ряды $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{|a_n|\}_{n\geqslant 1}$.

Пример 7. $S = 1 - (2/3)^2 - (3/5)^3 + (4/7)^4 + (5/9)^5 + \ldots + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (n/(2n-1))^n + \ldots$ – не является знакочередующимся и теорему Лейбница использовать нельзя. Но
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{1}{2} < 1$, т.е. исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 8. $S = 1 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5^2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{5^n} + \ldots$ – нарушается условие монотонности
$|a_n| > |a_{n+1}|$, $\forall\, n \geqslant 1$, т.е. теорему Лейбница использовать нельзя. Но

$$\left.\begin{array}{l} \text{числовой ряд с общим членом } a_{2k-1} = \dfrac{1}{k} \quad - \quad \text{расходится} \\ \text{числовой ряд с общим членом } a_{2k} = -\dfrac{1}{5^n} \quad - \quad \text{сходится} \end{array}\right\} \text{ – исходный ряд расходится по теореме}$$

о структуре абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теорема 1. Линейная комбинация абсолютно сходящихся числовых рядов $\{a_k\}_{k\geqslant 1}$ и $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$ – абсолютно сходящийся числовой ряд.

Доказательство следует из очевидного неравенства $|\lambda\, a_k + \mu\, b_k| \leqslant |\lambda| \cdot |a_k| + |\mu| \cdot |b_k|$ и признака сравнения.

Теорема 2. Сумма абсолютно сходящегося числового ряда не изменится ни при какой перестановке его элементов (сумма не зависит от способа суммирования).

Доказательство следует из теоремы о структуре абсолютно и условно сходящихся рядов.

Числовые ряды в $\mathbb{C}$

Определение. Пределом комплексной числовой последовательности $\{z_k\}$ называют комплексное число z и пишут $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \geqslant 1$ такое, что для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|z_n - z| < \varepsilon$.

Замечание 1. Пусть $z_k = x_k + iy_k$, $\forall\, k \geqslant 0$. Тогда очевидны неравенства: $\left\{ \begin{matrix} |x_k - x_0| \\ |y_k - y_0| \end{matrix} \right\} \leqslant \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} = |z_k - z_0| \leqslant |x_k - x_0| + |y_k - y_0|$, из которых непосредственно вытекает следующее утверждение: $\{\exists \lim\limits_{n\to\infty} z_k = z_0\} \Longleftrightarrow \{\exists \lim\limits_{\to\infty} x_n = x_0\} \wedge \{\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_k = y_0\}$.

Замечание 2. Если $z_k = x_k + iy_k$ - общий член комплексного числового ряда $\{z_k\}_{k\geqslant 1}$ с частной суммой $S_n = z_1 + \ldots + z_n$, $n \geqslant 1$ и $S_n^x \stackrel{\triangle}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $S_n^y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$ - n-ые частные суммы вещественных числовых рядов $\{x_k\}_{k\geqslant 1}$ и $\{y_k\}_{k\geqslant 1}$ соответственно, то $S_n = S_n^x + iS_n^y$. Поэтому, согласно замечанию 1 и определению сходящегося числового ряда, можно утверждать, что комплексный числовой ряд $\{z_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся вещественные числовые ряды $\{x_k\}_{k\geqslant 1}$ и $\{y_k\}_{k\geqslant 1}$.

Пример 1. Комплексный числовой ряд с общим членом $z_k = \dfrac{k^3 + ik^3 + 1}{k^2(k^3+1)} = \dfrac{1}{k^2} + i\dfrac{k}{k^3+1}$ сходится, т.к. одновременно сходятся вещественные числовые ряды с общими членами $x_k = \operatorname{Re} z_k = \dfrac{1}{k^2}$ и $y_k = \operatorname{Im} z_k = \dfrac{k}{k^3+1} \sim \dfrac{1}{k^2}$.

Замечание 3. Так как $\begin{matrix} |x_k| \leqslant |z_k| \leqslant |x_k| + |y_k|\ ; \\ |y_k| \leqslant |z_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \end{matrix}$, то комплексный числовой ряд $\{z_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится абсолютно, т.е. сходится знакоположительный числовой ряд $\{|z_k|\}_{k\geqslant 1}$, тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся вещественные числовые ряды $\{x_k\}_{k\geqslant 1}$ и $\{y_k\}_{k\geqslant 1}$.

Пример 2. Комплексный числовой ряд с общим членом $z_k = \dfrac{i^k}{\sqrt{k}} = \left\{ \begin{matrix} (-1)^n/\sqrt{2n}\ ;\ k = 2n \\ i(-1)^n/\sqrt{2n+1}\ ;\ k = 2n+1 \end{matrix} \right\}$ сходится условно.

Пример 3. Если $z_k = (k+i)^k/(2k-i)^k$, то $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|n+i|}{|2n-i|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+1}{4n^2+1}} = \dfrac{1}{2} < 1$ и ряд $\{z_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится абсолютно.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Определение 1. Пусть $a_k = a_k(x)$, $\forall\, k \geqslant 1$ – скалярная функция, определенная на некотором множестве Ω. Тогда $\{a_k(x)\}_{k\geqslant 1}$ - функциональный ряд с общим членом $a_k(x)$, $x \in \Omega$. При этом совокупность значений аргумента, при каждом из которых соответствующий числовой ряд сходится, называют областью D сходимости исходного функционального ряда.

Пример 1. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^1$ и общий член рассматриваемого функционального ряда $a_k(x) \stackrel{\triangle}{=} (x+1)^k/k$, $\forall k \geqslant 1$. Если $|x+1| > 1$, то есть $(x > 0) \wedge (x < -2)$, то рассматриваемый ряд расходится по необходимому признаку; если $|x+1| < 1$, то $|a_k(x)| = |x+1|^k/k < |x+1|^k$ и ряд $\{|a_k(x)|\}_{k\geqslant 1}$ сходится по признаку сравнения со сходящейся геометрической прогрессией, т.е. при $x \in (-2; 0)$ исходный ряд сходится абсолютно; числовой ряд с общим членом $a_k(0) = 1/k$ расходится, а числовой ряд с общим членом $a_k(-2) = (-1)^k/k$ сходится условно. Таком образом $D = \{x :\ -1 \leqslant x < 0\}$.

Определение 2. Говорят, что функциональный ряд $\{a_k(x)_{k\geqslant 1}$ сходится равномерно на множестве $M \subset D \subset \Omega$, если $(\forall\ \varepsilon > 0)$ $(\exists\ N(\varepsilon) \geqslant 1)$: $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, $(\forall\ n \geqslant N(\varepsilon)) \wedge (\forall\ x \in M)$.

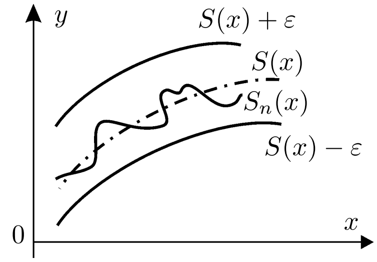

Рис.30а

Пример 2. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$; $a_k(x) \overset{\triangle}{=} \left\{ \begin{array}{ll} x & ; \ k = 1 \\ x^n - x^{n-1} & ; \ k > 1 \end{array} \right\}$.

$S_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) = x^n \equiv \left\{ \begin{array}{lll} 0 & ; & x = 0 \\ x^n & ; & 0 < x < 1 \\ 1 & ; x = 1 & \end{array} \right\}$

и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ; \ 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & ; \ x = 1 \end{array} \right.$. Но тогда

$|S(x) - S_n(x)| = \left\{ \begin{array}{ll} |x|^n & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ x = 1 \text{ и } x = 0 \end{array} \right\} < \varepsilon \Rightarrow (|x|^n < \varepsilon) \Rightarrow \big(n > \ln\varepsilon / \ln|x| \equiv N(\varepsilon, x)\big)$,

т.е исходный ряд сходится, но не равномерно.

Признак Вейерштрасса. Если на множестве $M \subset D$ для функционального ряда $\{a_k(x)\}_{k\geqslant 1}$ существует мажоранта $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$, т.е. $|a_k(x)| \leqslant b_k$, $\forall\, k \geqslant 1$, $\forall\, x \in M$ и знакоположительный числовой ряд $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится, то ряд $\{a_k(x)\}_{k\geqslant 1}$ сходится на множестве $M \subset D$ абсолютно и равномерно.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда $|a_k(x)| < b_k, (\forall\, k \geqslant 1) \wedge (\forall\, x \in M \subset D)$. А так как ряд $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится, то по признаку сравнения в каждой точке $x \in M$ исходный функциональный ряд сходится абсолютно.

Пусть $R_n(x) \overset{\triangle}{=} a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+m}(x) + \ldots$ - n-ый остаток исходного функционального ряда и $\sigma_{n+m}(x) \overset{\triangle}{=} a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+m}(x)$ - m-ая частная сумма этого n-го остатка.

Так как ряд $\{a_k(x)\}_{k\geqslant 1}$ сходится на $M \subset D$ абсолютно, то он сходится на $M \subset D$ и $\sigma_{nm}(x) \to R_n(x)$ при $m \to \infty$ $\forall x \in M \subset D$. А так как знакоположительный числовой ряд $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$ сходится, то

$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N(\varepsilon) \geqslant 1) \ : b_{n+1} + \ldots + b_{n+m} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_{n+k} < \varepsilon, \ \forall\, n \geqslant N(\varepsilon) \wedge \ \forall\, m \geqslant 1$. Таким образом,

$(\forall n \geqslant N(\varepsilon)) \wedge (\forall x \in M) \wedge (\forall\, m \geqslant 1)\ |\sigma_{nm}(x)| \leqslant |a_{n+1}(x)| + \ldots + |a_{n+m}(x)| \leqslant b_{n+1} + \ldots + b_{n+m} < \varepsilon, \ \forall m \geqslant 1$, т.е. $|R_n(x)| = \lim\limits_{m\to\infty} \sigma_{nm}(x)| < \varepsilon, (\forall\, n \geqslant N(\varepsilon)) \wedge (\forall\, x \in M)$, что и требовалось доказать.

Пример 3. Ряд с общим членом $a_n(x) \overset{\triangle}{=} x^n/n^2$ при $|x| \leqslant 1$ сходится равномерно, так как в рассматриваемом случае $|a_k(x)| \leqslant 1/k^2$, $\forall\ k \geqslant 1$ и знакоположительный числовой ряд $\{1/k^2\}_{k\geqslant 1}$ сходится.

Свойства равномерно сходящихся рядов

1. Если $\forall\, k \geqslant 1$ функция $a_k(x)$ непрерывна на $M \subset D$ и на M равномерно сходится функциональный ряд $\{a_k(x)\}_{k\geqslant 1}$, то его сумма $S(x)$ непрерывна на M (см. пример 2).

2. Сумму $S(x)$ равномерно сходящегося на $M \subset D$ функционального ряда $\{a_k(x)\}_{k\geqslant 1}$ непрерывных (дифференцируемых) на $M \subset D$ функций $a_k(x), k \geqslant 1$, можно почленно интегрировать (дифференцировать) на M.

Определение 3. Если $a_k(x) = \alpha_k \cdot (x - x_0)^k$; $\forall\, k \geqslant 0$, где α_k – вещественное или комплексное число, то функциональный ряд $\{\alpha_k \cdot (x - x_0)^k\}_{k\geqslant 0}$ называют степенным рядом.

Замечание 1. Заменой $t \overset{\triangle}{=} x - x_0$ степенной ряд $\{\alpha_k \cdot (x - x_0)^k\}_{k\geqslant 0}$ всегда может быть приведен к стандартному виду $\{\alpha_k\, t^k\}_{k\geqslant 0}$.

Определение 4. Интервалом сходимости вещественного степенного ряда $\{\alpha_k\, x^k\}_{k\geqslant 0}$ называют множество $(-R;+R) \subset \mathbb{R}^1$, в каждой точке которого исходный ряд сходится абсолютно и расходится при $|x| > R$, где R называют радиусом сходимости.

Замечание 2. Существование интервала сходимости следует из теоремы Абеля, которую мы сформулируем и докажем для комплексных степенных рядов. На данном этапе ограничимся следующими формальными рассуждениями.

По признаку Д'Аламбера, формально имеем:
$\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}(x)}{a_k(x)}\right| = |x|\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} < 1$, т.е. ряд $\{\alpha_k \cdot x^k\}_{k\geqslant 0}$ сходится абсолютно при $|x| < R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right|$ и расходится при $|x| > R$ – см. так же пример 1. Если использовать признак Коши с радикалом, то $R = 1/\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|\alpha_k|}$.

Пример 4. Если $\alpha_k(x) = \dfrac{x^k}{k+1}$, то $R = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k+2}{k+1} = 1$. Таким образом ряд $\left\{\dfrac{x^k}{k+1}\right\}_{k\geqslant 0}$ сходится абсолютно при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. $a_k(-1) = \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ и $a_k(+1) = \dfrac{1}{k+1}$, то есть при $x = -1$ рассматриваемый ряд сходится условно, а при $x = +1$ он расходится.

Пример 5. Если $a_k(x) = x^k/k!$, то $\alpha_k = 1/k!$ и $R = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{(k+1)!}{k!} = \infty$ и функциональный ряд $\{x^k/k!\}_{k\geqslant 0}$ сходится абсолютно при $|x| < R = \infty$.

Основные утверждения о степенных рядах

I. Если $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда $\{\alpha_k\, x^k\}_{k\geqslant 0}$, то этот ряд будет сходиться равномерно на любом отрезке $[-r;+r] \subset (-R;+R)$.

Доказательство. Если $0 < r < R$, то при $|x| = r$ исходный ряд сходится абсолютно, т.е. сходится знакоположительный числовой ряд $\{|\alpha_k|\, r^k\}$. Но тогда при любом $x \in [-r;r]$ имеем $|x| \leqslant r$, т.е. $|\alpha_k\, x^k| = |\alpha_k|\,|x|^k \leqslant |\alpha_k|\, r^k$ и осталось воспользоваться т. Вейерштрасса.

II. Сумму $S(x)$ степенного ряда $\{\alpha_k\, x^k\}_{k\geqslant 0}$ с радиусом сходимости $R > 0$ можно почленно дифференцировать в интервале сходимости произвольное число раз. При этом все производные степенные ряды имеют тот же радиус сходимости R.

Доказательство. Согласно утверждению I исходный ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-r;r] \subset (-R;R)$ и его сумму можно почленно дифференцировать. Пусть $\{\beta_k\ x^k\}_{k\geqslant 0}$ – производный степенной ряд, т.е. $\beta_k = (k+1)\,\alpha_{k+1}, \forall\, k \geqslant 0$. Таким образом $R = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|} \equiv \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k\,|\alpha_k|}{(k+1)|\alpha_{k+1}|} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|\beta_{k-1}|}{|\beta_k|}$, что и требовалось доказать.

Пример 1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{(1-x)}$ при $|x| < 1$. Тогда $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k\right)'$, то есть при $|x| < 1$ $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\, x^{k-1}$. При $|x| < 1 \Longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, x^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Полагая $n = k-1$, т.е $k = n+1$, получаем:

$\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ при $|x| < 1$. Далее имеем: $\left(\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n+1)\, x^{n-1}$.

Таким образом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, x^{n-1} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, при $|x| < 1$. Полагаем $m = n-1$, т.е. $n = m+1$. Тогда $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(m+1)(m+2)x^m = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ при $|x| < 1$ и т.д.

III. Сумму степенного ряда $\{\alpha_k\, x^k\}_{k\geqslant 0}$ с радиусом сходимости $R > 0$ можно почленно интегрировать в интервале сходимости произвольное число раз. При этом полученный степенной ряд имеет тот же радиус сходимости R.

Доказательство. Согласно I исходный степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-r; r] \subset (-R; R)$ и допустимо почленное интегрирование его суммы. Пусть $\{\beta_n\, x^n\}_{n\geqslant 0}$ – новый степенной ряд, полученный путем интегрирования исходного ряда при $|x| < R$: $\int\limits_0^x \alpha_k \quad x^k dx \quad = \quad \dfrac{\alpha_k\, x^{k+1}}{k+1}$, т.е. $\beta_k = \dfrac{\alpha_{k-1}}{k}$ и $\beta_{k+1} = \dfrac{\alpha_k}{k+1}$. Но тогда $R = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\alpha_k|}{|\alpha_{k+1}|} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)\,|\beta_{k+1}|}{(k+2)\,|\beta_{k+2}|} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|\beta_{k+1}|}{|\beta_{k+2}|}$, что и требовалось доказать.

Пример 2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$. Тогда $\int\limits_0^x \dfrac{dx}{1-x} = \int\limits_0^x \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k\, dx;\ |x| < 1$, то есть $-\ln(1-x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^x x^k dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k+1}\, x^{k+1},\ |x| < 1$. Если $n = k+1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\, x^n = -\ln(1-x)$ при $|x| < 1$.

Ряд Тейлора

I. Пусть функция $y = f(x)$ определена и бесконечно дифференцируема в интервале $(a; b) \subset \mathbb{R}^1$. Если $x_0 \in (a; b)$, то по формуле Тейлора имеем:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x; x_0);\ \forall\, x \in (a; b)$$

При этом, если для любого фиксированного $x \in (a; b)$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0$, то степенной ряд $\{[f^{(k)}(x_0)/k!]\ (x-x_0)^k\ \}_{k\geqslant 0}$ является на $(a; b)$ сходящимся, а $f(x)$ является его суммой:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k;\ x, x_0 \in (a; b).$$

II. Для бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ степенной ряд $\left\{\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right\}_{k\geqslant 0}$ называют ее рядом Тейлора вне зависимости от характера сходимости этого ряда. Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора называют рядом Маклорена.

III. Для анализа сходимости ряда Тейлора можно использовать стандартные приемы теории степенных рядов, но можно использовать и следующую теорему.

Теорема. Если в интервале $(a; b) \subset \mathbb{R}^1$ при некоторых $B > 0$ и $C > 0$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{B^k \cdot k!} \sup\limits_{a<x<b} |f^{(k)}(x)| \leqslant C;\ \forall\ k \geqslant 1$, то ряд Тейлора, бесконечно дифференцируемой на $(a; b)$ функции $f(x)$, сходится во всех точках $x \in (a; b)$, для которых $|x - x_0| < 1/B$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы, тогда
$R_n(x, x_0) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(x^*);\ x < x^* < x_0$ или $x_0 < x^* < x$.
Таким образом,

$$|R_n(x, x_0)| \leqslant \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{a<x^*<b} |f^{(n+1)}(x^*)| \leqslant \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot C \cdot B^{n+1} \cdot (n+1)! = C \cdot \{B|x-x_0|\}^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

тогда и только тогда, когда $|x - x_0| < 1/B$.

Степенные ряды в $\mathbb{C}$

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\{a_k\, z^k\}_{k\geqslant 0}$ с комплексными членами сходится при некотором $z = z_1 \neq \theta$, то он абсолютно сходится $\forall z : |z| < |z_1|$. Если же он расходится при некотором $z = z_2 \neq \theta$, то он расходится $\forall\, z \in \mathbb{C} :\ |z| > |z_1|$.

Доказательство. Пусть ряд $\{a_k z_1^k\}_{k\geqslant 0}$ сходится. Тогда по необходимому признаку $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_k z_1^k = \theta$, то есть $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, N(\varepsilon) > 0) : |a_n\, z_1^n| < \varepsilon,\ \forall\, n \geqslant N(\varepsilon)$. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $|z| < |z_1|$. Тогда $|a_n \cdot z^n| = \left| a_n \cdot z_1^n \cdot \left(\dfrac{z}{z_1}\right)^n \right| = |a_n \cdot z_1^n| \left|\dfrac{z}{z_1}\right|^n = \varepsilon \cdot q^n,\ \forall\, n \geqslant N(\varepsilon)$, где $q \triangleq \dfrac{|z|}{|z_1|} < 1$ откуда и следует абсолютная сходимость ряда $\{a_k\, z^k\}_{k\geqslant 0}$ при $|z| < |z_1|$.

Пусть теперь $z_* \in \mathbb{C}$ и $|z_*| > |z_2|$. Если бы ряд $\{a_k\, z_*^k\}_{k\geqslant 0}$ сходился , то, согласно уже доказанному, в точке z_2 он бы сходился абсолютно, т.к. $|z_2| < |z_*|$. Таким образом исходная посылка является ложной и в любой точке $z_* \in \mathbb{C}\ : |z| > |z_2|$ рассматриваемый ряд расходится.

Следствия из теоремы Абеля.

1. Для каждого комплексного степенного ряда $\{a_n\, z^k\}_{k\geqslant 0}$ в $\mathbb{C}$ существует круг с центром в θ и радиусом R, в каждой внутренней точке которого исходный ряд сходится абсолютно и расходится в каждой внешней точке.

2. $R = \lim\limits_{k\to\infty} |a_k| \big/ |a_{k+1}| = \lim\limits_{k\to\infty} 1 \big/ \sqrt[k]{|a_k|}$.

3. Если хоть в одной точке окружности $l_R \triangleq \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = R\}$ круга сходимости исходный степенной ряд $\{\alpha_k z^k\}_{k\geqslant 0}$ сходится абсолютно, то он сходится абсолютно в каждой точке окружности l_R.

Доказательство. Пусть $z_0 \in l_R$ и ряд $\{a_k z_0^k\}_{k\geqslant 0}$ сходится абсолютно, т.е. сходится знакоположительный числовой ряд $\{|a_k||z_0|^k\}_{k\geqslant 0}$. Но тогда $\forall\ z \in l_R$ имеют место равенства $|a_k z^k| = |a_k||z|^k = |a_k||z_0|^k = |a_k|\, R^k$, откуда и следует искомый результат.

Пример 1. Пусть $\alpha_k(z) = \left\{\dfrac{z^k}{2^k \cdot k\sqrt{k}}\right\}_{k\geqslant 1}$, т.е. $a_k = \dfrac{1}{k\sqrt{k}\cdot 2^k}$. Тогда $R = \lim\limits_{k\to\infty} |a_k| \big/ |a_{k+1}| = 2$ и $l_R = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 2\}$. Если $z \in l_R$, то $|\alpha_k \cdot z^k| = \dfrac{|z_k|}{k\sqrt{k}\cdot 2^k} = \dfrac{1}{k^{3/2}}$ и исходный ряд сходится абсолютно при $|z| \leqslant 2$ и расходится при $|z| < 2$.

4. Если хоть в одной точке окружности l_R круга сходимости исходный ряд расходится по необходимому признаку, то он расходится в каждой точке этой окружности – доказательство аналогично доказательству следствия 3.

Пример 2. Ряд $\{z^k\}_{k\geqslant 0}$ сходится абсолютно при $|z| < 1$ и расходится при $|z| \geqslant 1$, т.к. $l_R = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$ и $\forall\, z \in l_R\ \ \exists \lim\limits_{k\to\infty} |z|^k = 1 \neq 0$.

4. Если $\exists\, z_0 \in l_R$ и ряд $\{a_k\, z_0^k\}_{k\geqslant 0}$ сходится условно, то в точках окружности l_R исходный ряд может как расходиться, так и сходиться условно.

Пример 3. Для ряда $\left\{\dfrac{z^k}{k}\right\}_{k\geqslant 1}$ радиус сходимости $R = 1$, т.е. $l_R = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$. В любой точке $z \in l_R\ \dfrac{|z|^k}{k} = \dfrac{1}{k}$, т.е. в любой точке окружности круга сходимости исходный ряд абсолютно сходиться не может, но необходимый признак выполняется.

В точке $z = +1 \in l_R$ исходный ряд расходится, то как $\dfrac{z^k}{k}\Big|_{z=+1} = \dfrac{1}{k}$.

В точке $z = -1 \in l_R$ исходный ряд сходится условно, так как $\dfrac{z^k}{k}\Big|_{z=-1} = \dfrac{(-1)^k}{k}$.

5. Если R – радиус сходимости, то в любом круге $K_r = \{z : \ |z| \leqslant r < R\}$ исходный степенной ряд сходится равномерно.

Доказательство полностью аналогично вещественному случаю.

Ряды Фурье

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют интегрируемой с квадратом на $[a;b] \subset \mathbb{R}$, если $\exists \int\limits_a^b f^2(x)dx < +\infty$. Совокупность всех функций, интегрируемых с квадратом на $[a;b] \subset \mathbb{R}^1$,обозначают $\mathbb{L}^2[a;b]$.

Свойства функций из $\mathbb{L}^2[a;b]$.

(1). Если функции $f(x), \varphi(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$, то функция $f(x) \cdot \varphi(x)$ – абсолютно интегриуема на $[a,b]$, т.к. $|f(x) \cdot \varphi(x)| \leqslant 0,5\{f^2(x) + \varphi^2(x)\}$ и $\left|\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)\varphi(x)|dx \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_a^b \{f^2(x)+\varphi^2(x)\}dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \varphi^2(x)dx < \infty.$

(2). $\mathbb{L}^2[a,b]$ – линейное пространство относительно стандартных операций сложения функций и их умножения на число. Действительно, для любых конечных вещественных чисел λ, μ и для любых $f(x)$, $\varphi(x) \in \mathbb{L}^2[a;b]$ имеем:

$$\int\limits_a^b \{\lambda f(x)\varphi(x) + \mu\varphi(x)\}^2 dx \equiv \int\limits_a^b |\lambda^2 f^2(x) + 2\lambda\mu f(x)\varphi(x) + \mu^2\varphi^2(x)|dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b |\lambda|^2\{f^2(x) + 2|\lambda\mu||f(x)||\varphi(x)| + |\mu|^2\psi^2(x)\}dx < +\infty.$$

Таким образом, если $|\lambda| < \infty, |\mu| < \infty, f(x) \in \mathbb{L}^2[a;b]$, $\varphi(x) \in \mathbb{L}^2[a;b]$, то $(\lambda f(x) + \mu\varphi(x)) \in \mathbb{L}^2[a;b]$ и $\mathbb{L}^2[a;b]$ – линейное пространство.

Определение 2. Две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ из $\mathbb{L}^2[a,b]$ называют эквивалентными и пишут $f(x) \sim \varphi(x)$, если $\int\limits_a^b \{f(x) - \varphi(x)\}^2 dx = 0$.

Замечания к определению 2.

(1). Если $f(x)$, $\varphi(x) \in \mathbb{L}^2[a;b]$ и $f(x) \sim \varphi(x)$, то значения этих функций могут различаться лишь на конечном множестве точек из $[a;b]$.

(2). Если в $\mathbb{L}^2[a;b]$ понятие "равенство" заменить понятием "эквивалентность", то скалярное произведение в этом линейном пространстве может быть введено стандартными способом, так как для любых $f(x), \varphi(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$ определено вещественное число $(f;\varphi) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx$ и при этом:

$\alpha)$ $(f;f) = \int\limits_a^b f^2(x)dx \geqslant 0$ и $(f;f) = 0 \Longleftrightarrow f(x) \sim 0$;

$\beta)$ $(f;\varphi) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)f(x)dx = (\varphi;f)$;

$\gamma)\ (\lambda f;\varphi)=\int\limits_a^b \lambda f(x)\varphi(x)dx=\lambda\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx=\lambda\big(f(x);\varphi(x)\big);$

$\delta)\ (f+\varphi;\psi)=\int\limits_a^b \{f(x)+\varphi(x)\}\psi(x)dx=\int\limits_a^b f(x)\psi(x)dx+\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx=(f;\psi)+(\varphi;\psi).$

(3). Так как линейное пространство $\mathbb{L}^2[a,b]$ с введенным скалярным произведением является евклидовым пространством, то в нем стандартным образом может быть введена норма:

$\|f\|=\sqrt{(f;f)}\equiv\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx},\ \forall\ f(x)\in\mathbb{L}^2[a,b].$

При этом все аксиомы нормы:

$\alpha)\ \|f(x)\|=\sqrt{(f;f)}\geqslant 0\wedge\|f\|=0\Longleftrightarrow f(x)\sim 0;$

$\beta)\ \|\lambda f(x)\|=|\lambda|\cdot\|f(x)\|;$

$\gamma)\ \|f(x)+\varphi(x)\|\leqslant\|f(x)\|+\|\varphi(x)\|$ выполняются автоматически.

(4). В евклидовом пространстве $\mathbb{L}^2[a,b]$ со стандартной нормой метрику (расстояние), как правило, вводят следующим образом:

$\rho(f;\varphi)\overset{\triangle}{=}\|f(x)-\varphi(x)\|=\sqrt{(f-\varphi;f-\varphi)}\equiv\sqrt{\int_a^b\{f(x)-\varphi(x)\}^2dx}.$

При этом все аксиомы метрики выполняются автоматически:

$\alpha)\ \rho(f;\varphi)\geqslant 0$ и $(f;\varphi)=0\Longleftrightarrow f(x)\sim\varphi(x);$

$\beta)\ \rho(f;\varphi)=\rho(\varphi;f);$

$\gamma)\ \rho(f;\varphi)\leqslant\rho(f;\psi)+\rho(\varphi;\psi).$

(5). В евклидовом пространстве $\mathbb{L}^2[a,b]$ со стандартной нормой и стандартной метрикой понятие сходимости так же вводят стандартным способом: пусть $f(x)\in\mathbb{L}^2[a,b]$ и $\{f_k(x)\}_{k\geqslant1}\in\mathbb{L}^2[a,b]$. Функцию $f(x)$ называют пределом последовательности $\{f_k(x)\}_{k\geqslant1}$ и пишут $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$, если существует $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(f_k,f)=0$, то есть, если $\exists\ \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{\int_a^b\{f_k(x)-f(x)\}^2dx}=0.$

Задача о наилучшей аппроксимации в $\mathbb{L}^2[a,b]$

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\in\mathbb{L}^2[a,b]$ – некоторая ортонормированная система функций, т.е. $(\varphi_k;\varphi_m)=\left\{\begin{array}{ccc}0&;&k\neq m\\1&;&k=m\end{array}\right\}$, $f(x)\in\mathbb{L}^2[a,b]$ и $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}C_k\varphi_k(x)$. Для фиксированного n необходимо найти $\{C_k\}_{k=1}^{n}\in\mathbb{R}^1$ такие, что $\rho(f;S_n)\equiv\|f(x)-S_n(x)\|\to\min\limits_{\{C_k\}}$.

Решение.

$$\rho^2(f,S_n)\equiv\|f(x)-S_n(x)\|^2\equiv(f(x)-S_n(x);f(x)-S_n(x))\equiv\Big(f(x)-\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k(x);f(x)-$$
$$-\sum_{m=1}^{n}C_m\varphi_m(x)\Big)\equiv(f;f)-\sum_{k=1}^{n}C_k(\varphi_k;f)-\sum_{m=1}^{n}C_m(f;\varphi_m)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}C_kC_m(\varphi_k;\varphi_m)\equiv\|f\|^2-$$
$$-2\sum_{k=1}^{n}C_k(f;\varphi_k)+\sum_{k=1}^{n}C_k\equiv\|f\|^2+\sum_{k=1}^{n}\Big\{(f;\varphi_k)^2-2C_k(f;\varphi_k)+C_k^2\Big\}-\sum_{k=1}^{n}(f;\varphi_k)^2\equiv\|f\|^2-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}(f;\varphi_k)^2+\sum_{k=1}^{n}\Big\{C_k-(f;\varphi_k)\Big\}^2\to\min_{\{C_k\}}\Longleftrightarrow C_k\equiv(f;\varphi_k),\ \forall\ k=\overline{1:n}$$

Общие замечания.

(1). Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{L}^2[a,b]$ – ортонормированная система функций, то $\forall\, f(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$ ее наилучшая аппроксимация $S_n(x)$ определяется равенством: $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(f;\varphi_k)\cdot\varphi_k(x)$.

(2). Так как при наилучшей аппроксимации $C_k \equiv (f;\varphi_k)$, то $0 \leqslant \rho^2(f,S_n) \equiv \|f(x) - S_n(x)\|^2 \equiv \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n}(f;\varphi_k)^2$. Таким образом $\forall\, n \geqslant 1$ имеет место неравенство $\|f\|^2 \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n}(f;\varphi_k)^2$, известное как **неравенство Бесселя**.

(3). Так как последовательность $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(f;\varphi_k)^2\right\}_{n\geqslant 1}$ является неубывающей и, согласно неравенству Бесселя, ограничена сверху, то при наличии счетной ортонормированной системы функций $\big\{\varphi_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{L}^2[a,b]$ неравенство Бесселя допускает обобщение $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f;\varphi_k)^2 \leqslant \|f\|^2$.

Определение 3. Ортонормированную систему функций $\big\{\varphi_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{L}^2[a,b]$ называют замкнутой (полной), если $\forall\, f(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$ имеет место равенство Парсеваля: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f;\varphi_k)^2 \equiv \|f\|^2$.

Замечания к определению 3.

(1). Всякая замкнутая в $\mathbb{L}^2[a,b]$ система ортонормированных функций образует ортонормированный базис, т.к. в противном случае $\exists\, \varphi_0(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]\ :\ \big(\|\varphi_0(x)\| = 1\big) \wedge \big((\varphi_0;\varphi_k) \equiv 0,\ \forall\, k \geqslant 1\big)$. Но согласно равенству Парсеваля $1 = \|\varphi_0\|^2 = \sum\limits_{1}^{\infty}(\varphi_0;\varphi_k)^2 \equiv 0$ и мы приходим к противоречию.

(2). Если $\big\{\varphi_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{L}^2[a,b]$ – ортонормированный базис в $\mathbb{L}^2[a,b]$, то $\forall\, f(x) \in \mathbb{L}^2[a,b]$ существует счетное множество чисел $\big\{C_k\big\}_{k=1}^{\infty}$, где $C_k \equiv (f;\varphi_k)$, $\forall\, k \geqslant 1$ – коэффициенты Фурье (координаты функции $f(x)$ в базисе $\big\{\varphi_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty}$) такое, что последовательность $\{S_f^n(x)\}_{n\geqslant 1}$, $S_f^n(x) \triangleq \sum\limits_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x)$ сходится к $f(x)$ в $\mathbb{L}^2[a,b]$. Ряд $\big\{(f;\varphi_k)\cdot\varphi_k(x)\big\}_{k\geqslant 1}$ называют рядом Фурье функции $f(x)$ и при этом $\Big\|f(x) - \sum\limits_{k=1}^{\infty}(f;\varphi_k)\varphi_k(x)\Big\|^2 \equiv \lim\limits_{n\to\infty}\Big\|f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n}(f;\varphi_k)\varphi_k(x)\Big\|^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\Big\{\|f(x)\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n}(f(x);\varphi(x))\Big\} = 0$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f;\varphi_k)\varphi_k(x) \sim f(x)$. При этом функцию $S_f(x) \triangleq \sum\limits_{k=1}^{\infty}(f;\varphi_k)\varphi_k(x)$ называют суммой ряда Фурье $\Big\{(f;\varphi_k)\varphi_k(x)\Big\}_{k\geqslant 1}$

Тригонометрический ряд Фурье

Пример 1. Система тригонометрических функций $\big\{1;\cos(kx);\sin(kx)\big\}_{k=1}^{\infty}$ является ортогональной на отрезке $[C;C+2\pi]$ для любого конечного вещественного числа C, так как

$$\big(1;\cos(kx)\big) = \int\limits_{C}^{C+2\pi} 1\cdot\cos(kx)dx = +\frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_{C}^{C+2\pi} \equiv \frac{1}{k}\Big\{\sin\big[k(C+2\pi)\big] - \sin(kC)\Big\} \equiv 0\ ;$$

$$\big(1;\sin(kx)\big) = \int\limits_{C}^{C+2\pi} 1\cdot\sin(kx)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_{C}^{C+2\pi} = -\frac{1}{k}\Big\{\cos\big[k(C+2\pi)\big] - \cos(kC)\Big\} \equiv 0\ ;$$

$$(k\neq n)\Longrightarrow\big(\cos(kx);\cos(nx)\big)=\int\limits_{C}^{C+2\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx=\int\limits_{C}^{C+2\pi}\big\{\cos\big[(k+n)x\big]+\cos\big[(k-n)x\big]\big\}dx\equiv 0\ ;$$

$$(k\neq n)\Longrightarrow\big(\sin(kx);\sin(nx)\big)=\int\limits_{C}^{C+2\pi}\sin(kx)\sin(nx)dx=\int\limits_{C}^{C+2\pi}\big\{\cos\big[(k-n)x\big]-\cos\big[(k+n)x\big]\big\}dx\equiv 0\ ;$$

$$\big(\sin(kx);\cos(nx)\big)=\int\limits_{C}^{C+2\pi}\sin(kx)\cos(nx)dx=\int\limits_{C}^{C+2\pi}\big\{\sin\big[(k+n)x\big]+\sin\big[(n-k)x\big]\big\}dx\equiv 0,\ (\forall\, k\geqslant 1)\wedge$$
$$\wedge\,(\forall\, n\geqslant 1).$$

При этом $\|1\|^2=\int\limits_{C}^{C+2\pi}1^2dx=2\pi\ ;$

$$\|\cos(kx)\|^2=\int\limits_{C}^{C+2\pi}\cos^2(kx)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{C}^{C+2\pi}\big\{1+\cos(2kx)\big\}dx\equiv\pi\ ;$$

$$\|\sin(kx)\|^2=\int\limits_{C}^{C+2\pi}\sin^2(kx)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{C}^{C+2\pi}\big\{1-\cos(2kx)\big\}dx\equiv\pi\ .$$

Таким образом $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \dfrac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}};\ \dfrac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система на отрезке $[C;C+2\pi]$, $\forall\ C\in\mathbb{R}^1$. Ее полнота следует из теоремы Дирихле, которую мы сформулируем ниже.

Пример 2. Пусть $f(x)\in\mathbb{L}^2[-\pi;\pi]$. Считая систему тригонометрических функций $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \dfrac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}};\ \dfrac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ полной, имеем:

$$S_f(x)=\left(f;\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(f;\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}\right\}\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}}+\left(f;\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\right\}\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}\equiv\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\right\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)dx\right\}\cos(kx)+\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)dx\right\}\sin(kx).$$

Таким образом:

$S_f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$, где

$$a_{n\geqslant 0}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx\ ;$$

$$b_{k\geqslant 1}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)dx.$$

При этом ряд Фурье функции $f(x)$ по использованной ортонормированной системе функций называют тригонометрическим рядом Фурье.

Теорема Дирихле. Если на $[-\pi;\pi]$ определена ограниченная функция $f(x)$ такая, что:
1) на $[-\pi;\pi]$ она кусочно-непрерывна, т.е. может иметь лишь конечное число точек разрыва I-го

рода;
2) на $[-\pi;\pi]$ она кусочно-монотонна, т.е. $[-\pi;\pi]$ можно разбить на конечное число участков монотонности,

тогда $y=f(x)$ может быть представлена суммой своего тригонометрического ряда Фурье и

α) в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ имеет место равенство $S_f(x)=f(x)$;

β) в кажлой точке разрыва $S_f(x)=\{f(x-0)+f(x+0)\}/2$;

γ) $S_f(-\pi)=S_f(+\pi)\equiv\{f(-\pi+0)+f(\pi-0)\}/2$;

δ) на всяком частичном отрезке непрерывности $f(x)$ ее тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно.

Замечания к теореме Дирихле.

1). Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi;\pi]\subset\mathbb{R}^1$, то сумма $S_f(x)$ ее тригонометрического ряда Фурье определена на всей числовой оси и является периодической функцией. Этот факт используют для периодического продолжения функций, заданных на отрезке.

Пример 3. Функция $f(x)=\left\{\begin{array}{lcl} C_1 & ; & -\pi<x\leqslant 0 \\ C_2 & ; & 0<x<\pi\end{array}\right\}$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и при этом:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{0}C_1\,dx+\int\limits_{0}^{\pi}C_2\,dx\right\}=C_1+C_2\ ;$$

$$a_k\big|_{k\geqslant1}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{0}C_1\cos(kx)dx+\int\limits_{0}^{\pi}C_2\cos(kx)dx\right\}\equiv0\ ;$$

$$b_k\big|_{k\geqslant1}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{0}C_1\sin(kx)dx+\int\limits_{0}^{\pi}C_2\sin(kx)dx\right\}=\frac{1}{\pi k}\left\{-C_1\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{0}-\right.$$

$$\left.-C_2\cos(kx)\Big|_{0}^{\pi}\right\}=\frac{1}{\pi k}\{-C_1+C_1\cos(\pi k)-C_2\cos(\pi k)+C_2\}=\frac{C_2-C_1}{\pi k}\big\{1-\cos(\pi k)\big\}.$$

Таким образом имеем:

$$S_f(x)=\frac{C_1+C_2}{2}-\frac{2(C_1-C_2)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

2). Реализация условий теоремы Дирихле обеспечивает поточечную сходимость тригонометрического ряда Фурье. Эти условия являются достаточными условиями представимости функции суммой ее тригонометрического ряда Фурье.

Пример 4. Функция $f=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\ :\ |x|<\pi$ не удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, так как в нуле имеет разрыв второго рода. Но

$\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2_{(x)}dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^{-2/3}dx=2\int\limits_{0}^{\pi}x^{-2/3}dx=6x^{1/3}\Big|_{0}^{\pi}=6\sqrt[3]{\pi}<\infty$ и $f(x)\in\mathbb{L}^2[-\pi;\pi]$. Таким образом $f(x)$ может быть представлена суммой своего тригонометрического ряда Фурье и $S_f(x)\sim f(x)$.

3). Пусть $y=f(x)$ определена на отрезке $[-\pi;\pi]\subset\mathbb{R}^1$ и удовлетворяет на нём условиям теоремы Дирихле. Тогда $f(x)\sim S_f(x)$ и $S_f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$,

где

$$a_{k\geqslant0}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)dx;\quad b_{k\geqslant1}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)dx.$$

При этом,

3(α) если $f(x)$ – четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)\ \forall\ x \in [-\pi; \pi]$, то

$$S_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx); \quad a_{k\geqslant 0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx; \quad b_{k\geqslant 1} \equiv 0;$$

3(β) если $f(x)$ – нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \in [-\pi; \pi]$, то

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx); \quad a_{k\geqslant 0} \equiv 0; \quad b_{k\geqslant 1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx\ ;$$

4. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l; l])$ и удовлетворяет на нём условиям теоремы Дирихле, то заменой $x = lt/\pi$ производим взаимно-однозначное отображение отрезка $[-l; l]$ на отрезок $[-\pi; \pi]$. Функция $\varphi(t) = f(lt/\pi) \equiv f(x)$ определена на отрезке $[-\pi; \pi]$ и удовлетворяет на нём условиям теоремы Дирихле. Таким обзазом

$$\left(S_\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\right) \Longleftrightarrow \left(S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right) + b_k\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\right);$$

$$a_{k\geqslant 0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos(kt)dt = \left\{\begin{array}{c} t = \dfrac{\pi x}{l}\,;\ dt = \dfrac{\pi}{l}\,dx \\ (t = \pm\pi) \Longleftrightarrow (x = \pm l) \end{array}\right\} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx\ ;$$

$$b_{k\geqslant 1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin(kt)dt = \left\{\begin{array}{c} t = \dfrac{\pi x}{l}\,;\ dt = \dfrac{\pi}{l}\,dx \\ (t = \pm\pi) \Longleftrightarrow (x = \pm l) \end{array}\right\} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}\,dx.$$

При этом, все ранее полученные результаты распространяются и на данный случай.

Пример 5. Предположим, что функцию $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} \sin\dfrac{\pi x}{l} & ; & 0 < x < \dfrac{l}{2} \\ 0 & ; & \dfrac{l}{2} < x < l \end{array}\right\}$ нужно "разложить в ряд Фурье по синусам."

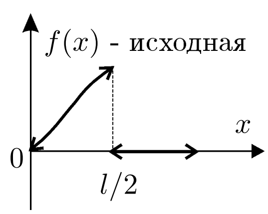

Рис.31

Фактически необходимо "разложить в ряд Фурье" функцию $f_1(x)$, являющуюся нечетным продолжением исходной функции $f(x)$.

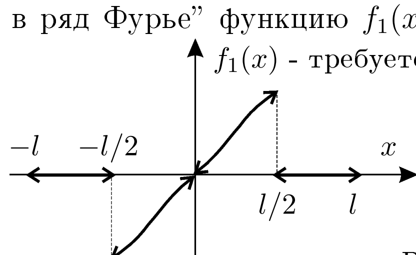

Рис.32

В рассматриваемом случае

$$a_k = 0,\ \forall\ k \geqslant 0 \text{ и } S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi kx}{l};$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx \equiv \frac{2}{l}\int_0^{l/2}\sin\frac{\pi kx}{l}\sin\frac{\pi x}{l}dx \equiv \frac{1}{l}\int_0^{l/2}\left\{\cos\frac{\pi(k+1)x}{l} - \cos\frac{\pi(k-1)x}{l}\right\}dx.$$

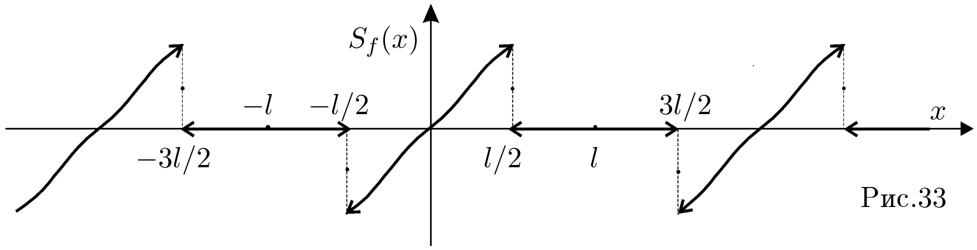

Рис.33

$$b_1 = \frac{1}{l}\int\limits_0^{l/2}\left\{\cos\frac{2\pi x}{l} - 1\right\}dx = -\frac{1}{2}$$

$$b_{k>1} = \frac{1}{l}\left\{\frac{l}{\pi(k+1)}\sin\frac{\pi(k+1)x}{l}\Big|_0^{l/2} - \frac{l}{\pi(k-1)}\sin\frac{\pi(k-1)x}{l}\Big|_0^{l/2}\right\} \equiv \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{k+1}\sin\frac{\pi(k+1)}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{k-1}\sin\frac{\pi(k-1)}{2}\right\}$$

При этом

$(k = 2n+1) \Longrightarrow (b_k \equiv 0)$, т.к. $\sin\dfrac{\pi}{2}(2n+1\pm 1) \equiv \sin\pi(n\pm 1) \equiv 0$;

$(k = 2n) \Longrightarrow \left(\sin\dfrac{\pi}{2}(2n\pm 1) \equiv \sin(\pi n \pm \pi/2)\text{, т.е. } \sin\dfrac{\pi}{2}(2n+1) = (-1)^n\right) \wedge \left(\sin\dfrac{\pi}{2}(2n-1) = (-1)^{n-1}\right)$.

Таким образом

$$b_{2n} \equiv \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2n+1}\cdot(-1)^n - \frac{1}{2n-1}\cdot(-1)^{n-1}\right\} \equiv (-1)^n\frac{4n}{\pi(4n^2-1)};$$

$$S_f(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n(-1)^n}{\pi(4n^2-1)}\sin\frac{2\pi n x}{l}$$

5. Пусть функция $f(x)$ определена и удовлетворяет условиям теоремы Дирихле на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тогда $C \stackrel{\triangle}{=} (a+b)/2$ – центр, а $l \stackrel{\triangle}{=} (b-a)/2$ – полуразмах отрезка $[a;b] \subset \mathbb{R}^1$. Далее полагаем

$x = \dfrac{b-a}{2\pi}t + \dfrac{a+b}{2}$ и устанавливаем взаимно-однозначное соответствие между отрезками $[a,b]$ и $[-\pi,\pi]$. Таким образом, если

$\varphi(x) \stackrel{\triangle}{=} f\left(\dfrac{b-a}{2\pi}t + \dfrac{a+b}{2}\right) \equiv f(t)$, то согласно замечанию 3 к теореме Дирихле

$$S_\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt);$$

$$a_{k\geqslant 0} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos(kt)dt = \left\{t = \left[x - \frac{a+b}{2}\right]\cdot\frac{2\pi}{b-a}\,;\, dt = \frac{2\pi}{b-a}dx\,\middle|\,\begin{matrix}(t=-\pi) & \Longleftrightarrow & (x=a)\\ (t=\pi) & \Longleftrightarrow & (x=b)\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_a^b f(x)\cos\left\{k\left[x - \frac{a+b}{2}\right]\cdot\frac{2\pi}{b-a}\right\}\cdot\frac{2\pi}{b-a}dx \equiv \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{2\pi k x}{b-a}dx,$$

т.к. $(a+b)/2 \equiv C$ – центр интервала, $(b-a)/2 \equiv l$ – его полуразмах, а ортогональность тригонометрической системы функций $\left\{1, \cos\dfrac{\pi k x}{l}, \sin\dfrac{\pi k x}{l}\right\}_{k\geqslant 1}$ доказана на отрезке $[C; C+2l], \forall\, C \in \mathbb{R}^1$.

Совершенно аналогично показываем, что

$$b_{k\geqslant 1} = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{2\pi k x}{b-a}dx\ ;$$

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi kx}{b-a} + b_k \sin\frac{2\pi kx}{b-a}\ .$$

Пример 6. Пусть $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 1 & ; & 1 < x < 2 \\ 0 & ; & 2 < x < 5 \end{array}\right\}$. В данном случае $a = 1$, $b = 5$ и $l = 2$. Таким образом

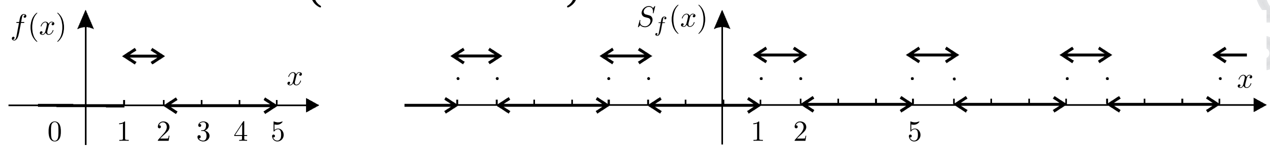

Рис.34-35

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_1^5 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 dx = \frac{1}{2}\ ;$$

$$a_{k\geqslant 1} = \frac{1}{2}\int_1^5 f(x)\cdot\cos\frac{\pi kx}{2}dx \equiv \frac{1}{2}\int_1^2 \cos\frac{\pi kx}{2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{2}\Big|_1^2 = \frac{-1}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}\ ;$$

то есть

$(k = 2n) \Longrightarrow (a_{2n} \equiv 0)$,

$(k = 2n-1) \Longrightarrow \big(a_{2n-1} \equiv (-1)^n/\pi(2n-1)\big)$.

Совершенно аналогично находим

$$b_{k\geqslant 1} = \frac{1}{2}\int_1^5 f(x)\sin\frac{\pi kx}{2} \equiv \frac{1}{2}\int_1^2 \sin\frac{\pi kx}{2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{2}\Big|_1^2 = -\frac{1}{\pi k}\left\{\cos\pi k - \sin\frac{\pi k}{2}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\pi k}\left\{(-1)^k - \sin\frac{\pi k}{2}\right\}\ \ldots$$

$$S_f(x) = \frac{1}{4} - \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi k}\sin\frac{\pi k}{2}\sin\frac{\pi kx}{2} + \frac{1}{\pi k}\left[(-1)^k - \sin\frac{\pi k}{2}\right]\cos\frac{2\pi kx}{2}\right\}$$