ТФКП

Общие замечания

ЛЕКЦИЯ 1.

1. Если каждой точке z множества $G \subset \mathbb{C}$ по закону f ставится в соответствие единственный элемент $w \in Q \subset \mathbb{C}$, то говорят, что на множестве G определена комплексная функция $w = f(z)$ комплексного переменного z и $Q \subset \mathbb{C}$ – ее область значений.

2. Так как $\mathbb{C}$ отличается от R^2 наличием второго внутреннего закона – операция умножения комплексных чисел, то $f(z)$ обладает всеми стандартными свойствами векторных функций векторного аргумента. Поэтому предмет исследований ТФКП – специфические особенности комплексных функций комплексного переменного, обусловленные наличием второго внутренного закона.

3. Пусть задана функция $w = f(z)$, где $z = x + iy \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Таким образом $f(z) \equiv f(x, y)$. Если

$$u(x,y) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{Re} f(z),\ v(x,y) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname{Im} f(z),$$

то имеем:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где $u(x,y)$, $v(x,y)$ – скалярные функции двух вещественных переменных x и y.

Пример. $f(z) = z^2$, т.е. $f(z) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy$. Таким образом, $u(x,y) \equiv \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$ и $v(x,y) \equiv \operatorname{Im} f(z) = 2xy$.

Трансцендентные функции

I. $$\boxed{e^z \stackrel{\triangle}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,; \quad |z| < \infty.}$$

<u>Свойства e^z.</u>

1. Если φ – вещественное число, то $\cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$ и $\sin\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$.

◀ При $z \equiv i\varphi$ имеем:

$$e^{i\varphi} \stackrel{\triangle}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \varphi^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Полагая $z = i(-\varphi)$, получим $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Из полученных равенств и следуют искомые представления для $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. ▶

2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$

◀ $$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^k \cdot z_2^n}{k!\,n!} = \left\{ \begin{array}{l|l} m = k + n & m \geqslant 0;\ 0 \leqslant S \leqslant m, \text{ т.к. } n \geqslant 0, \text{ и} \\ S = k & n = m - S \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{S=0}^{m} \frac{z_1^S \cdot z_2^{m-S}}{S!\,(m-S)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left\{ \sum_{S=0}^{m} \underbrace{\frac{m!}{S!\,(m-S)!}}_{C_m^S} z_1^S \cdot z_2^{m-S} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^m}{m!} = e^{z_1+z_2}$$ ▶

3. e^z – периодическая функция с периодом $2\pi i$.

◀ $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z$. ▶

4. Если $z = x + iy$, то $|e^z| = e^x$ и $\arg e^z = y$; $\operatorname{Re} a^z = e^x \cos y$ и $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

◀ $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x\{\cos y + i\sin y\}$, откуда и следуют искомые равенства. ▶

Пример 1. $e^i = \cos 1 + i\sin 1$.

Пример 2. $e^{1+i\frac{\pi}{4}} = e\cdot\bigl(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4\bigr) = \dfrac{e\sqrt{2}}{2}\,(1+i)$

II. $$\boxed{\cos z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!};\quad \sin z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!};\quad |z|<\infty}$$

<u>Свойства $\cos z$ и $\sin z$.</u>

1. $\cos z = (e^{iz}+e^{-iz})/2;\quad \sin z = (e^{iz}-e^{-iz})/2i$ – формулы Эйлера.

◀ Обоснование идентично обоснованию свойства 1 функции e^z. ▶

2. $\cos z$ и $\sin z$ – периодические функции с периодом 2π.

◀ Следует из формул Эйлера и свойства 3 функции e^z. ▶

3. Для $\cos z$ и $\sin z$ остаются корректными все формулы тригонометрии.

◀ Для иллюстрации ограничимся двумя равенствами:

$$\sin(z_1+z_2) = \frac{1}{2i}\left\{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right\} = \frac{1}{2i}\left\{e^{iz_1}\cdot e^{iz_2} - e^{-iz_1}\cdot e^{-iz_2}\right\} = \frac{1}{2i}\{(\cos z_1 + i\sin z_1)\times$$
$$\times(\cos z_2 + i\sin z_2) - (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)\} = \cos z_1\sin z_2 + \sin z_1\cos z_2\,; \tag{1}$$

$$\cos z_1\cdot\cos z_2 = \frac{1}{2}\left\{e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right\}\cdot\frac{1}{2}\left\{e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(e^{i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}\right)\right\} = 0,5\bigl\{\cos(z_1+z_2)+\cos(z_1-z_2)\bigr\} \tag{2}$$

Пример 3. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+i\ln 2\right) = \dfrac{1}{2}\left\{e^{i\,(\pi/2+i\ln 2)} + e^{-i\,(\pi/2+i\ln 2)}\right\} = \dfrac{1}{2}\left\{e^{-\ln 2}\cdot e^{i\pi/2} + e^{\ln 2}\cdot e^{-i\pi/2}\right\} =$
$= \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)+2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\right\} = -\dfrac{3i}{4}.$

4. В $\mathbb{C}$ функции $\cos z$ и $\sin z$ не являются ограниченными.

◀ Пусть $z = x+iy$. В этом случае

$$\cos z = \frac{1}{2}\left\{e^{i\,(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^{-y}\cdot e^{ix}+e^{y}\cdot e^{-ix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^{-y}(\cos x + i\sin x)+\right.$$
$$\left.+\,e^{y}(\cos x - i\sin x)\right\} = \operatorname{ch} y\cos x - i\operatorname{sh} y\sin x\ , \tag{1}$$

$\operatorname{Re}\cos z = \operatorname{ch} y\cos x$ и $\operatorname{Im}\cos z = -\operatorname{sh} y\sin x$;

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left\{e^{i\,(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}\right\} = \frac{1}{2i}\left\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right\} =$$
$$= \operatorname{ch} y\sin x + i\operatorname{sh} y\cos x\ , \tag{2}$$

$\operatorname{Re}\sin z = \operatorname{ch} y\sin x$; $\operatorname{Im}\sin z = \operatorname{sh} y\cos x$.

А так как $\operatorname{ch} y$ и $\operatorname{sh} y$ – неограниченные функции, то $|\cos z|$ и $|\sin z|$ – неограничены в $\mathbb{C}$. ▶

III. $$\boxed{\operatorname{ch} z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}\quad ,\quad \operatorname{sh} z \triangleq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!};\quad |z|<\infty}$$

<u>Свойства $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$.</u>

1. $\operatorname{ch} z = \{e^z+e^{-z}\}/2$, $\operatorname{sh} z = \{e^z-e^{-z}\}/2$ – формулы Эйлера.

◀ Формулы Эйлера непосредственно следуют из очевидных равенств: $e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z$; $e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z$ ▶

2. $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ – периодические функции с комплексным периодом, равным $2\pi i$.

◀ Так как $2\pi i$ – период функции e^z, то осталось воспользоваться формулами Эйлера для гиперболических функций. ▶

3. $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ обладают стандартными свойствами гиперболических функций.

◀ Для иллюстрации ограничимся двумя равенствами:

(1) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \dfrac{1}{4}\left\{e^z + e^{-z}\right\}^2 - \dfrac{1}{4}\left\{e^z - e^{-z}\right\}^2 \equiv 1$;

(2) $$\operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 = \frac{1}{2}\left\{e^{z_1} - e^{-z_1}\right\} \cdot \frac{1}{2}\left\{e^{z_2} + e^{-z_2}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{z_1+z_2} - e^{-(z_1+z_2)}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(e^{z_1-z_2} - e^{-(z_1-z_2)}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sh}(z_1+z_2) - \operatorname{sh}(z_1-z_2)\right\}.$$ ▶

4. $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$, $\operatorname{sh}(iz) = i\sin z$

◀ Непосредственно следует из формул Эйлера. ▶

5. $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$; $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$

◀ Обоснование этих равенств аналогично обоснованию свойства 4 $\cos z$ и $\sin z$. ▶

IV. Логарифмическая функция. Пусть $W = \ln z$ определяется как функция, обратная по отношению к показательной фунции $z = \exp(W)$. Если $W = u + iv$ и $z = |z|\exp(i\arg z) \neq \theta$, то $z = \exp(W) \iff |z|\exp(i\arg z) = \exp(u+iv) = \exp(u)\cdot\exp(iv) \iff \big(|z| = \exp(u)\big) \wedge (\arg z = v)$.

Таким образом $\ln z = u + iv = \ln|z| + i\arg z$ при $z \neq \theta$.

Пример 4. (а) $\ln(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) = i\pi$;

(б) $\ln(i) = \ln|i| + i\arg(i) = i\,\pi/2$;

(в) $\ln(3+4i) = \ln|3+4i| + i\arg(3+4i) = \ln 5 + i\operatorname{arctg}(4/3)$.

Замечания.

1. $\operatorname{Ln} z \stackrel{\triangle}{=} \ln|z| + i\operatorname{Arg} z \equiv \ln|z| + i\{\arg z + 2\pi k\} = \ln z + i\,2\pi k$.

2. $\ln(z_1\cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$.

◀ $\ln(z_1\cdot z_2) = \ln|z_1\cdot z_2| + i\arg(z_1\cdot z_2) = \ln\{|z_1|\cdot|z_2|\} + i\{\arg z_1 + \arg z_2\} = \ln|z_1| + i\arg z_1 + \ln|z_2| + i\arg z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$ ▶

3. $\ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2$.

◀ $\ln(z_1/z_2) = \ln|z_1/z_2| + i\arg(z_1/z_2) = \ln\{|z_1|/|z_2|\} + i\{\arg z_1 - \arg z_2\} = \ln|z_1| + i\arg z_1 - \ln|z_2| - i\arg z_2 = \ln z_1 - \ln z_2$ ▶

4. Аналогично функции $\ln z$ вводят обратные тригонометрические и гиперболические функции. Для иллюстрации рассмотрим функцию $W = \operatorname{Arcsin} z \iff z = \sin W \iff z = \{\exp(iW) - \exp(-iW)\}/2i \iff (e^{iW})^2 - 2iz\,e^{iW} - 1 = 0 \iff e^{iW} = iz + \sqrt{1-z^2}$, где берутся оба значения квадратного корня. Таким образом, $\operatorname{Arcsin}(z) = W = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$.

Пример 5. $\operatorname{Arcsin} 2 = -i\operatorname{Ln}(2i + \sqrt{1-4}) = -i\operatorname{Ln}(2i \pm \sqrt{3}\,i) = -i\operatorname{Ln}\big((2\pm\sqrt{3})i\big) = -i\left\{\ln|2\pm\sqrt{3}| + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right\} = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i\ln(2\pm\sqrt{3})$.

ЛЕКЦИЯ 2.

Определение 1. Функцию $f(x) = u(x,y) + iv(x,y)$ называют дифференцируемой в точке $z = x + iy$ области $G \subset \mathbb{C}$ ее определения, если для любого $\Delta z = \Delta z + i\Delta y$ такого, что $(z + \Delta z) \in G$ существует $A = \alpha + i\beta$ такое, что $\Delta f \stackrel{\triangle}{=} f(z+\Delta z) - f(z) = A\Delta z + o(|\Delta z|)$, где $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\dfrac{o(|\Delta z|)}{\Delta z}\right| = 0$. При этом величину $A = \alpha + i\beta$ называют производной f в точке z и обозначают $f'(z)$.

Замечание 1. $\Delta f(z) = \Delta u(x,y) + i\Delta v(x,y)$, где $\Delta u(x,y) = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$ и $\Delta v(x,y) = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)$

Теорема 1. Если $f(z)$ – дифференцируема в точке $z \in G$, то в этой точке выполнены условия Коши-Римана: $\{u'_x(x,y) = v'_y(x,y)\} \wedge \{u'_y(x,y) = -v'_x(x,y)\}$, где $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Доказательство.

Согласно условиям теоремы $\Delta u + i\Delta v = (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|)$, $\forall\, \Delta z \;:\; z + \Delta z \in G$. Таким образом, имеем $\Delta u + i\Delta v = (\alpha\Delta x - \beta\Delta y) + i(\alpha\Delta y + \beta\Delta x) + o_u(|\Delta z|) + io_v(|\Delta z|)$, где $o_u(|\Delta z|) = \operatorname{Re} o(|\Delta z|)$ и $o_v(|\Delta z|) = \operatorname{Im} o(|\Delta z|)$. Воспользовавшись определением равенства комплексных чисел, получаем:
$\Delta u = \alpha\Delta x + \beta\Delta y + o_u(|\Delta z|) \Longrightarrow \alpha = u'_x$ и $\beta = -u'_y$
$\Delta v = \alpha\Delta y + \beta\Delta x + o_v(|\Delta z|) \Longrightarrow \alpha = v'_y$ и $\beta = v'_x$
откуда и следует искомое утверждение.

Следствие. Если $f(z)$ дифференцируема в точке $z \in G$, то
$f'(z) = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y$.

Теорема 2. Если $f(z)$ определена в G, а в точке $z \in G$ для нее выполнены условия Коши-Римана и существует полные дифференциалы ее вещественной и мнимой частей, т.е.
$\Delta u(x,y) = u'_x\Delta x + u'_y\Delta y + o_u(|\Delta z|)$, $\quad \Delta v(x,y) = v'_x\Delta x + v'_y\Delta y + o_v(|\Delta z|)$,
где $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{o_u(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0 = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{o_v(|\Delta z|)}{|\Delta z|}$, тогда $\exists\, f'(z)$.

Доказательство. Согласно условиям теоремы в точке $z \in G$ имеют место следующие равенства:
$\Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v = u'_x\Delta x + u'_y\Delta y + o_u(|\Delta z|) + iv'_x\Delta x + iv'_y\Delta y + io_v(|\Delta z|) = \{$условия Коши-Римана $:$ $(u'_x = v'_y) \wedge (u'_y = -v'_x)\} = v'_y\Delta x - v'_x\Delta y + o_u(|\Delta z|) + iv'_y\Delta y + iv'_x\Delta x + io_v(|\Delta z|) = \{o(|\Delta z|) =$
$= o_u(|\Delta z|) + io_v(|\Delta z|)\} = v'_y(\Delta x + i\Delta y) + iv'_x(\Delta x + i\Delta y) + o(|\Delta z|) = \{\Delta z = \Delta x + i\Delta y\} =$
$= \{v'_y + iv'_x\}\Delta z + o(|\Delta z|)$, т.е. $\exists\, f'(z) = v'_y(x,y) + iv'_x(x,y)$, что и требовалось доказать.

Определение 2. Если функция $w = f(z)$ дифференцируема не только в точке z области G ее определения, но в некоторой ее окрестности, то эту функцию называют аналитической в этой точке. Если функция является аналитической в каждой точке области $G_1 \subset G$, то ее называют аналитической в этой области.

Замечание 2. Согласно определению 1 операция дифференцирования комплексных функций комплексного переменного обладает стандартными свойствами, а специфика связана лишь с наличием в $\mathbb{C}$ второго внутреннего закона.

Пример 1. Пусть $f(z) \overset{\triangle}{=} e^{Az} = e^{(\alpha+i\beta)(x+iy)} = e^{(\alpha x-\beta y)+i\,(\beta x+\alpha y)}$.

В этом случае $u = \operatorname{Re} e^{Az} = e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x + \alpha y)$; $v = \operatorname{Im} e^{Az} = e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x + \alpha y)$.

Функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ являются гладкими и существование для них полных дифференциалов очевидно. Проверим выполнение условий Коши-Римана. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= \alpha e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y) - \beta e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y)\\ v'_y &= -\beta e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y) + \alpha e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow u'_x \equiv v'_y \text{ в } \mathbb{R}^2$$

$$\left.\begin{aligned} u'_y &= -\beta e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y) - \alpha e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y)\\ v'_x &= \alpha e^{\alpha x-\beta y}\sin(\beta x+\alpha y) + \beta e^{\alpha x-\beta y}\cos(\beta x+\alpha y)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow u'_y \equiv -v'_x \text{ в } \mathbb{R}^2$$

Таким образом, в любой точке $z \in \mathbb{C}$ существует
$f'(z) = u'_x + iv'_y = \alpha e^{\alpha x-\beta y}\big\{\cos(\beta x+\alpha y) + i\sin(\beta x+\alpha y)\big\} + i\beta e^{\alpha x-\beta y}\big\{\cos(\beta x+\alpha y) + i\sin(\beta x+\alpha y)\big\} =$
$= e^{(\alpha x-\beta y)+i(\beta x+\alpha y)}\cdot(\alpha + i\beta) = Ae^{Az}$.

Пример 2. Пусть $f(z) \overset{\triangle}{=} \bar{z} = x - iy$, т.е. $\begin{array}{l} u \overset{\triangle}{=} \operatorname{Re} f(z) = x; \\ v \overset{\triangle}{=} \operatorname{Im} f(z) = -y \end{array}$. Таким образом

$\left.\begin{array}{l|l} u'_x \equiv 1 & v'_x \equiv 0 \\ v'_y \equiv 0 & v'_y \equiv -1 \end{array}\right\}$ т.е. условия Коши-Римана не выполнены ни в одной точке $\mathbb{C}$ и $\nexists\, f'(z)$

Заметим, что если φ - дифференцируема и $f(z) = \varphi(\bar{z})$, то

$f'(z) = \varphi'(w)\Big|_{w=\bar{z}} \cdot \dfrac{d}{dz}\,\bar{z}$ и $\nexists\, f'(z)$.

Замечание 3. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ является аналитической в области $G_1 \subset G \subset \mathbb{C}$, т.е. в каждой точке G_1 выполняются условия Коши-Римана: $(u'_x = v'_y) \wedge (u'_y = -v'_x)$. Далее мы покажем, что аналитическая в G_1 функция – бесконечно дифференцируема в G_1. Из этого следует существование и непрерывность в G_1 вторых смешанных производных для скалярных функций u и v и по теореме о смешанных производных в каждой точке области G_1 имеют место равенства: $(u''_{xy} = u''_{yx}) \wedge (v''_{xy} = v''_{yx})$. Таким образом $(u''_{xx} = v''_{xy}) \wedge (u''_{yy} = -v''_{yx})$ в G_1, т.е. $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ в G_1. Аналогично $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$ в G_1. Таким образом вещественная и мнимая части аналитической функции – гармонические функции.

Замечание 4. Аналитическая функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ может быть построена путем задания одной из гармонических функций: $u(x,y)$ или $v(x,y)$ и подбора второй гармонической функции, удовлетворяющей условиям Коши-Римана, что эквивалентно задаче нахождения функции по ее полному дифференциалу с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому вещественную и мнимую части аналитической функции называют сопряженными гармоническими функциями.

Пример 3. Пусть $v(x,y) \overset{\triangle}{=} x^2 - y^2 + 1$. Тогда $v''_{xx} + v''_{yy} \equiv 0$, $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} (u'_x = v'_y = -2y) \Longrightarrow u = \int v'_y dx = -2xy + C_1(y) \\ (u'_y = -v'_x = -2x) \Longrightarrow u = \int (-v'_x) dy = -2xy + C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow u(x,y) = -2xy + C_0, \text{ где}$$

$C_1(y) \equiv C_2(x) \equiv C_0 - \text{const}$. Таким образом:

$f(z) = u + iv = -2xy + C_0 + i(x^2 - y^2 + 1) \equiv i(x^2 + 2ixy - y^2) + C_0 + i \equiv z^2 + C_0 + i$

Пример 4. Пусть $u(x,y) \overset{\triangle}{=} e^x \sin y - x$. Тогда $u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0$, $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} (v'_x = -u'_y = -e^x \cos y) \Longrightarrow v = \int (-u'_y) dx = -e^x \cos y + C_1(y) \\ (v'_y = u'_x = e^x \sin y - 1) \Longrightarrow v = \int u'_x dy = -e^x \cos y - y + C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow C_1(y) \equiv -y + C_{10}, \text{ где } C_{10} - \text{const}$$

и $C_2(x) \equiv C_{10}$. Таким образом:

$f(z) = e^x \sin y - x + i(-e^x \cos y - y + C_{10}) \equiv -i\big\{e^x(\cos y + i \sin y)\big\} - (x + iy) - iC_{10} \equiv -ie^z - z + iC_{10}$

Интегралы от функций комплексного переменного

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ – гладкая или кусочно-гладкая ориентированная дуга, соединяющая две фиксированные точки A и B комплексной плоскости и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, определена и непрерывна во всех точках L.

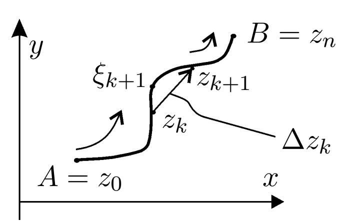

Рис.38

Дугу L точками $\{z_k\}_{k=0}^{n}$ разбиваем на n элементарных дуг $\{z_k; \overset{\frown}{z_{k+1}}\}_{k=0}^{n-1}$ произвольным образом, где $z_0 = A$ и $z_n = B$. На каждой элементарной дуге $\overset{\frown}{z_k z_{k+1}}$ произвольным образом выбираем отмеченную точку $\xi_{k+1} \in \overset{\smile}{z_k z_{k+1}}$ и составляем интегральную сумму $S_n(f) \overset{\triangle}{=} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k+1}) \cdot \Delta z_{l+1}$, где $\Delta z_{k+1} \overset{\triangle}{=} z_{k+1} - z_k$ – вектор с началом в точке z_k и концом в точке z_{k+1}, а $|\Delta z_{k+1}|$ – длина хорды, соединяющей точки z_k и z_{k+1}. Если вне зависмости от выбора точек $\{z_k\}$ и $\{\xi_k\} \in L$ существует $\lim\limits_{\max|\Delta z_k| \to 0} S_n(f)$, то его называют интегралом от функции $f(z)$ по ориентированной дуге $L \subset \mathbb{C}$ и обозначают $\int\limits_L f(z)dz$.

Общие свойства.

1. $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L \{u(x,y) + iv(x,y)\} \cdot \{dx + idy\} = \int\limits_L udx - vdy + i\int\limits_L vdx - udy$. Таким образом вещественная и мнимая части интеграла функции $f(z)$ по ориентированной дуге L представляют собой обычные криволинейные интегралы. С учетом этого свойства мы можем утверждать, что рассматриваемый интеграл обладает стандартными свойствами криволинейных интегралов – свойства 2-8. **2.** $\int\limits_L \sum\limits_{m=1}^{N} \lambda_m f_m(z)dz = \sum\limits_{m=1}^{N} \lambda_m \int\limits_L f_m(z)dz$.

3. Если дуги L и L^* отличаются лишь направлением обхода, то $\int\limits_L f(z)dz = -\int\limits_{L^*} f(z)dz$.

4. Если $L = \bigcup\limits_{k=1}^{m} L_k$ и дуги L_k, L_{k+1} имеют лишь одну общую точку $\forall\ k = \overline{1 : m-1}$, то $\int\limits_L f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{L_k} f(z)dz$.

5. Если дуга L задана параметрически: $L = \Big\{z = x + iy \in \mathbb{C} \,:\, x = x(t) \wedge y = y(t),\ t \in [t_A; t_B]$, $A = x(t_A) + iy(t_A) \wedge B = x(t_B) + iy(t_B)\Big\}$, то $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{t_A}^{t_B} f(z(t)) \cdot z'(t)dt$.

6. $\int\limits_L dz = B - A$, т.к. $\int\limits_L dz = \lim\limits_{\max|\Delta_k| \to 0} \sum \Delta z_k \equiv \lim\limits_{\max|\Delta_k| \to 0} \{(z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1})\} \equiv$ $\equiv z_n - z_0 \equiv B - A$.

7. Если $(\forall\ z \in L)(|f(z)| < N)$ и длина дуги L равна $m(L)$, то $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \leqslant N \cdot m(L)$, т.к. $\left|\sum f(\xi_k) \cdot \Delta z_k\right| \leqslant |\sum |f(\xi_k)| \cdot |\Delta z_k| \leqslant N \sum |\Delta z_k| \to N \cdot m(L)$ при $\max|\Delta z_k| \to +0$.

8. Если L – ориентированный замкнутый контур, то интеграл функции $f(z)$ по ориентированному замкнутому контуру L вводят стандартным способом и обозначают $\oint\limits_L f(z)\,dz$.

Пример 1. Вычислить $J_k = \int\limits_{L_k} \operatorname{Re} z dz$, где L_1 и L_2 представлены на рис.

$L_1 = \Big\{z = x + iy \,:\, x = t \wedge y = t,\ t \in [0; 1]\Big\} \Longrightarrow z = (1+i)t \Longrightarrow dz = (1+i)dt$

$$\Longrightarrow J_1 = \int\limits_{L_1} x dz = \int\limits_0^1 t \cdot (1+i) dt = (1+i)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

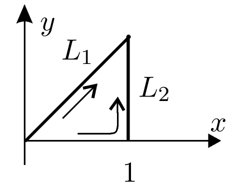

Рис.39

Вычислим J_2:

$$\left.\begin{array}{l|l} \text{На участке } (y=0) \wedge (0 \leqslant x \leqslant 1) \text{ имеем } (y=0) \wedge (dy=0) \wedge (x \in [0;1]) & u \equiv x \\ \text{На участке } (x=1) \wedge (0 \leqslant y \leqslant 1) \text{ имеем } (x=1) \wedge (dx=0) \wedge (y \in [0;1]) & v \equiv 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$J_2 = \int\limits_{L_2} udx - vdy + i\int\limits_{L_2} vdx + udy \equiv \int\limits_{L_2} udx + i\int\limits_{L_2} udy \equiv \int\limits_0^1 xdx + i\int\limits_0^1 1dy = \frac{1}{2} + i$$

Теорема Коши. Если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $G \cup \Gamma_G \subset \mathbb{C}$ и Γ_G – кусочно-гладкий замкнутый контур, то $\oint\limits_{\Gamma_G} f(z)dz = 0$.

Доказательство. $\oint\limits_{\Gamma_G} f(z)dz = \oint\limits_{\Gamma_G} udx - vdy + i\oint\limits_{\Gamma_G} vdx + udy$. А так как $f(z)$ является аналитической в замкнутой односвязной области $G \cup \Gamma_G$, то в каждой точке этой области выполнены условия Коши-Римана: $(u'_x = v'_y) \wedge (u'_y = -v'_x)$. Таким образом $\oint\limits_{\Gamma_G} udx - vdy = 0 = \oint\limits_{\Gamma_G} vd + udy$, т.к. u и v – непрерывны вместе со своими производными и выполнены условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Следствия.

I. Если в условиях теоремы Коши $G \subset \mathbb{C}$ – двухсвязная область, ограниченная внешним контуром L и внутренним контуром l, то $\oint\limits_{L} f(z)dz = -\oint\limits_{l} f(z)dz$.

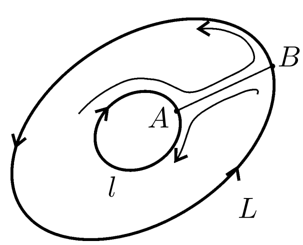

Рис.39а

Действительно, разрезом AB превращаем исходную область l в односвязную и по теореме Коши $\oint\limits_{L} + \int\limits_{\overset{\smile}{BA}} + \oint\limits_{l} + \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \equiv 0$. Откуда и следует искомое, т.к. $\int\limits_{\vec{AB}} \equiv -\int\limits_{\overset{\smile}{BA}}$.

II. Если в условиях теормы Коши $G \subset \mathbb{C}$ – n-связная область, ограниченная внешним L и внутренними $\{l_k\}_{k=1}^{n-1}$ кусочно-гладкими замкнутыми контурами, то $\oint\limits_{L} f(z)dz = -\sum\limits_{k=1}^{n-1} \oint\limits_{L} f(z)dz$.

Теорема 1. Если функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ является аналитической в односвязной области

G и $z_0 \in G$ – фиксированная, а $Z \in G$ – произвольная точка, то функция $F(Z) \overset{\triangle}{=} \int\limits_{z_0}^{Z} f(z)dz$ является аналитической в G и $F'(Z) = f(Z)$.

Доказательство. Так как функция $f(z)$ является аналитической в G, то для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $L_1 \cup L_2 \subset G$ по т. Коши $\oint\limits_{L_1 \cup L_2} f(z)dz \equiv \theta$.

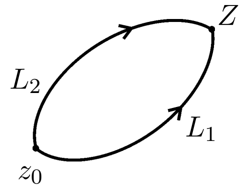

Рис.40

Но тогда (см. рис.) $\int\limits_{\overset{\smile}{z_0 \alpha Z}} f(z)dz = \int\limits_{\overset{\smile}{z_0 \beta Z}} f(z)dz$. Таким образом интеграл по дуге $\overset{\smile}{z_0 Z}$ не зависит от формы дуги, а зависит лишь от ограничивающих ее точек z_0 и Z, т.е. определена функция

$$F(Z) \overset{\triangle}{=} \int\limits_{z_0}^{Z} f(z)dz \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} U(x,y) \overset{\triangle}{=} \operatorname{Re} F(Z) \equiv \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udx - vdy \\ V(x,y) \overset{\triangle}{=} \operatorname{Im} F(Z) \equiv \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} udy + vdx \end{array} \right\}.$$

Так как в G для функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ выполнены условия Коши-Римана, то на основании теоремы о четырех эквивалентных условиях независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования мы можем утверждать, что в G $\exists\, dU = udx - vdy$ и $\exists\, dV = udy + vdx$. Таким образом в G $\left\{ \begin{array}{l} U'_x = u \\ U'_y = -v \end{array} \right\} \wedge \left\{ \begin{array}{l} V'_x = v \\ V'_y = u \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} U'_x = V'_y \\ U'_y = -V'_x \end{array} \right\}$, т.е. функция $F(Z) = U + iV$ является аналитической и $F'(Z) = U'_x + iV'_x = u + iv \equiv f(z)$, т.к. выполнены условия Коши-Римана и $\exists\, dU \wedge \exists\, dV$.

Следствия из теоремы 1.

I.) Если $F_1'(z) = F_2'(z)$, $\forall\, x \in G$, то $F_1(z) - F_2(z) \equiv C -$ const в G.

Доказательство. Пусть $\varphi(z) = \alpha + i\beta \overset{\triangle}{=} F_1(z) - F_2(z)$. Тогда функция $\varphi(z)$ является аналитической в G и $\varphi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) \equiv \theta$, т.е. $\alpha'_x \equiv 0 \equiv \beta'_x$, а из условий Коши-Римана $\alpha'_y \equiv 0 \equiv \beta'_y$, т.е. $\alpha \equiv C_1 \wedge \beta \equiv C_2$ и $\varphi(z) \equiv C_1 + iC_2 -$ const.

II.) Если $f(z)$ является аналитической в G и $\Phi'(z) = f(z)$, то $\displaystyle\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \Phi(Z) - \Phi(z_0)$.

Доказательство. Так как $\dfrac{d}{dZ}\displaystyle\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = f(Z)$, то согласно следствию 1 имеем: $\displaystyle\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \Phi(Z) + C$ и при $Z = z_0$ находим $C = -\Phi(z_0)$.

Пример. Пусть $n \in \{1, 2, \ldots\}$ и $\displaystyle\oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \left\{ \begin{array}{lcl} 2\pi i & ; & n = 1 \\ 0 & ; & n > 1 \end{array} \right\}$, так как, если $z = z_0 + \rho\, e^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0; 2\pi)$, то $dz = i\,\rho\, e^{i\varphi} d\varphi$ и

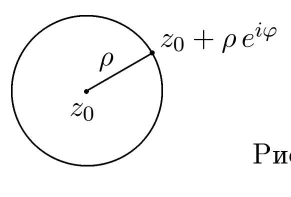

Рис.41

$$(\underline{n=1}) \Longrightarrow \oint \; = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho\, i e^{i\varphi} d\varphi}{\rho\, e^{i\varphi}} = i \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \equiv 2\pi i\ ;$$

$$(\underline{n>1}) \Longrightarrow \oint \; = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho\, i\, e^{i\varphi} d\varphi}{\rho^n\, e^{i\,n\varphi}} \equiv \frac{i}{\rho^{n-1}} \int\limits_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\varphi} d\varphi = -\frac{i}{\rho^{n-1}\, i(n-1)} \cdot e^{-i(n-1)\varphi}\Big|_0^{2\pi} \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{(n-1)\rho^{n-1}} \Big\{ \underbrace{e^{-i(n-1)2\pi}}_{\equiv 1} - 1 \Big\} \equiv 0.$$

Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области $G \cup \Gamma_G$, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром Γ_G, и z_0 является внутренней точкой области G.

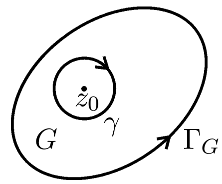

Рис.42

Тогда $\exists \rho > 0 : \gamma \overset{\triangle}{=} \{z : |z - z_0| = \rho\} \subset G$. В этом случае функция $f(z)/(z - z_0)$ является аналитической в двухсвязной области, ограниченной контурами Γ_G и γ. Поэтому, согласно следствию I из теоремы Коши, имеем:

$$\oint\limits_{\Gamma_G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = -\oint\limits_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} \equiv \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{$*$}$$

Из аналитичности функции $f(z)$ во всех точках $G \cup \Gamma_G$ следует ее непрерывность во всех точках круга $K_\rho \overset{\triangle}{=} \{z : |z - z_0| \leqslant \rho\} \subset G$. Таким образом $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \rho > 0)\ :\ (|z - z_0| = \rho) \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Поэтому

$$\left| \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} - \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z_0) dz}{z - z_0} \right| = \left| \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \leqslant \max_{z \in \gamma} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \cdot m(\gamma) < \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho \equiv 2\pi\varepsilon \tag{$**$}$$

Если учесть, что

$\displaystyle\oint\limits_{\gamma} \frac{f(z_0)\, dz}{z - z_0} \equiv f(z_0) \oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \equiv 2\pi\, i\, f(z_0)$ – не зависит от ε и, согласно равенству $(*)$, неравенство $(**)$ может быть представлено в следующем виде:

$\displaystyle\left| \oint\limits_{\Gamma_G} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - 2\pi\, i\, f(z_0) \right| < \varepsilon$, то $\displaystyle\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_G} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz,}$ т.к. все входящие величины не зависят ни от $\varepsilon > 0$, ни от $\rho > 0$.

Примечание. Интегральная формула Коши позволяет находить значения аналитической функции во внутренних точках односвязной области G по ее значениям на Γ_G.

Следствие 1. Производная любого порядка от аналитической функции – аналитическая функция.

Доказательство. Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области $G \cup \Gamma_G$ и $z_0 \in G$ – внутренняя точка. Тогда $\forall\, \Delta z\ :\ |\Delta z| < \min\limits_{z \in \Gamma_G} |z - z_0|$, т.е. $z_0 + \Delta z \in G \setminus \Gamma_G$, имеем:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi\, i\, \Delta z} \left\{ \oint\limits_{\Gamma_G} \frac{f(z)\, dz}{z - z_0 - \Delta z} - \oint\limits_{\Gamma_G} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \right\} = \frac{1}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_G} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}.$$

Таким образом $f'(z_0) = \dfrac{1!}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_G} \dfrac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^2}$.

Совершенно аналогично находим:

$$\frac{f'(z_0 + \Delta z) - f'(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi\, i\, \Delta z} \left\{ \oint\limits_{\Gamma_G} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0 - \Delta z)^2} - \oint\limits_{\Gamma_G} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^2} \right\} \equiv$$

$$\equiv \frac{1!}{2\pi\, i \Delta z} \oint\limits_{\Gamma_G} \frac{(z - z_0)^2 - (z - z_0)^2 + 2\Delta z(z - z_0) - \Delta^2 z}{(z - z_0 - \Delta z)^2 (z - z_0)^2} f(z) dz.$$

Таким образом $f''(z_0) = \dfrac{2!}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_G} \dfrac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^3}$ и т.д.

Используя метод полной математической индукции можно доказать, что $\forall\, n \geqslant 0$ имеет место быть равенство: $\boxed{f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi\, i} \oint\limits_{\Gamma_G} \dfrac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}}}\,.$

Следствие 2. Интегральная формула Коши и формула для нахождения n-ой производной от аналитической функции могут быть использованы для вычисления контурных интегралов.

Пример 2.

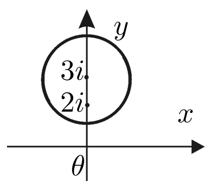

Рис.43

$$\oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{e^z}{z(z - 2i)}\, dz = \left\{ \begin{array}{l} f(z) = e^z/z \text{ является аналитической в круге} \\ \text{с центром в точке } 3i \text{ и радиусом } z, \text{ а } z_0 = 2i \text{ –} \\ \text{внутренняя точка этого круга} \end{array} \right\} =$$

$$= \oint\limits_{|z-3i|=2} \frac{e^z}{z} \cdot \frac{dz}{(z - 2i)} = 2\pi\, i\, \frac{e^{2i}}{2i} \equiv \pi(\cos 2 + i\, \sin 2).$$

Пример 3. $\oint\limits_{|z|=10} \dfrac{\cos z}{(z - i)^3}\, dz = \left\{ \begin{array}{l} z_0 = i \\ n + 1 = 3 \end{array} \right\} = \dfrac{2\pi\, i}{2!} \cdot \dfrac{d^2}{dz^2} \cos z \Big|_{z=i} = -2\pi\, i\, \cos i = -\pi\, i\, \mathrm{ch}\, 1$, т.к. окружность $|z| = 10$ охватывает точку $z_0 = i$.

Теорема Тейлора. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области $G \subset \mathbb{C}$. Если z_0 – внутренняя точка G и $r = \min\limits_{z \in \Gamma_G} |z - z_0|$, то в круге $K_\rho = \{z : |z - z_0| \leqslant \rho < r\} \subset \mathbb{C}$ функция $f(z)$ "разлагается в ряд" по целым положительным степеням $(z - z_0)$.

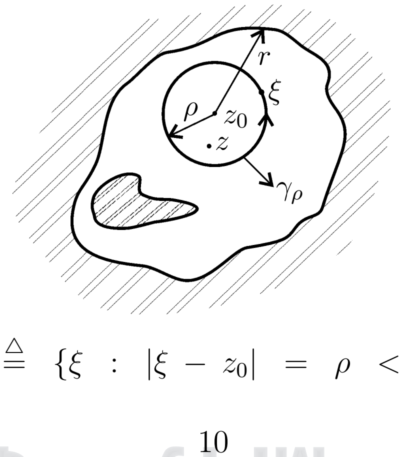

Рис.44

Доказательство. Пусть $\gamma_\rho \stackrel{\triangle}{=} \{\xi : |\xi - z_0| = \rho < r\}$ – граница круга $K_\rho \subset G$ и

$f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}\dfrac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$, где z – внутренняя точка круга K_ρ, то есть $|z-z_0|<\rho$, и $\xi\in\gamma_\rho$. Так как $|z-z_0|/|\xi-z_0|<1$, то $\dfrac{1}{\xi-z}\equiv\dfrac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}\equiv\dfrac{1}{\xi-z_0}\cdot\dfrac{1}{1-(z-z_0)/(\xi-z_0)}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}$.

Таким образом $\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(\xi)\dfrac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}$ и при фиксированном z рассматриваемый функциональный ряд $\left\{f(\xi)\,\dfrac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}\right\}_{k\geqslant 0}$ сходится равномерно относительно ξ, так как

$\left|f(\xi)\,\dfrac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}\right|\leqslant\max\limits_{\xi\in\gamma_\rho}|f(\xi)|\cdot\dfrac{|z-z_0|^k}{|\xi-z_0|^{k+1}}=\max\limits_{\xi\in\gamma_\rho}|f(\xi)|\cdot\dfrac{|z-z_0|^k}{\rho^{k+1}}$ и ряд $\{|z-z_0|^k/\rho^{k+1}\}_{k\geqslant 0}$ сходится как геометрическая прогрессия, т.к. $|z-z_0|<\rho$. При наличии равномерной сходимости сумму функционального ряда можно почленно интегрировать:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)}\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}f(\xi)\frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}}\right\}(z-z_0)^k.$$

Таким образом,

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot(z-z_0)^k\ ;\quad a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}}\equiv\frac{1}{k!}\,f^{(k)}(z_0)\ ,\ \forall\ k\geqslant 0.$$

При этом $\{a_k\}_{k\geqslant 0}$ не зависит от z.

Примечание. Пусть $\max\limits_{\xi\in\gamma_\rho}|f(\xi)|=M(\rho)$, тогда

$|a_k|=\left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}\dfrac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}}\right|\leqslant\dfrac{1}{2\pi}\max\limits_{\xi\in\gamma_\rho}\dfrac{|f(\xi)|}{|\xi-z_0|^{k+1}}\cdot m(\gamma_\rho)=\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{M(\rho)}{\rho^{k+1}}2\pi\rho$. Таким образом мы приходим к неравенству Коши, $|a_k|\leqslant M(\rho)/\rho^k$, которое позволяет оценивать скорость убывания коэффициентов ряда Тейлора.

Пример. $\ln(1+z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\dfrac{z^k}{k}$; $|z|<1$, так как при $z_0=0$ имеем:

$$f(z_0)=\ln 1=0$$
$$f'(z_0)=(1+z)^{-1}\Big|_{z=\theta}=1$$
$$f''(z_0)=(-1)(1+z)^{-2}\Big|_{z=\theta}=-1$$
$$f'''(z_0)=(-1)(-2)(z-z_0)^{-3}\Big|_{z=\theta}=2!$$
- -
$$f^{(k)}(z_0)=(-1)(-2)\dots(-k+1)(z-z_0)^{-k}\Big|_{z=\theta}=(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!.$$

Нули аналитической функции

Определение 1. Точку z_0 называют нулем порядка m аналитической функциии $f(z)$, если $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(m-1)}(z_0)=\theta\neq f^{(m)}(z_0)$.

Определение 2. Точку z_0 называют нулем порядка m аналитической функции $f(z)$, если существует аналитическая функция $\varphi(z)$ такая, что $\varphi(z_0)\neq\theta$ и $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$.

Теорема. Определение 1, 2 эквивалентны.

Доказательство. Так как функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0, то, согласно теореме

Тейлора в окрестности этой точки

$$f(z)=\left\{f(z_0)+f'(z_0)\cdot(z-z_0)/1!+\ldots+f^{(m-1)}(z_0)\cdot\frac{(z-z_0)^{m-1}}{(m-1)!}\right\}+$$
$$+(z-z_0)^m\cdot\left\{f^{(m)}(z_0)\frac{1}{m!}+f^{(m+1)}(z_0)\frac{(z-z_0)}{(m+1)!}+\ldots\right\} \qquad (*)$$

α). Если справедливо определение 1, то первая фигурная скобка разложения (*) тождественно равна θ, а вторая задает функцию $\varphi(z)$ и $\varphi(z_0)\equiv f^{(m)}(z_0)/m!\neq\theta$.

β). Если имеет место определение 2, то из разложения (*) следует, что $\varphi(z)$ определяется выражением, стоящим во второй фигурной скобке и $\varphi(z_0)\neq\theta$, т.е. $f^{(m)}(z_0)\neq\theta$, а первая фигурная скобка должна быть тождественно равной θ, т.е. $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(m-1)}(z_0)=\theta$.

Ряд Лорана

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $D=\{\xi\in\mathbb{C}\,:\,0<r<|\xi-z_0|<R<\infty\}$ и z – некоторая фиксированная внутренняя точка этого кольца.

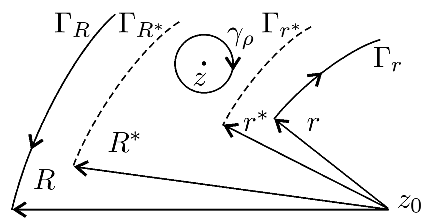

Рис.45

Образуем новое кольцо $D^*=\{\xi\in\mathbb{C}\;:\;r<r^*<|\xi-z_0|<\mathbb{R}^*<\mathbb{R}\}$, целиком лежащее в кольце D и содержащее z как свою внутреннюю точку. Полагаем $\Gamma_{R^*}=\{\xi\in\mathbb{C}\,:\,|\xi-z_0|=R^*\}$ и $\Gamma_{r^*}=\{\xi\in\mathbb{C}\,:\,|\xi-z_0|=r^*\}$.

Пусть $\gamma_\rho=\{\xi\in\mathbb{C}\,:\,|\xi-z|=\rho\}\subset D^*\subset D$ – окружность с центром в точке z, целиком лежащая в кольце D^*.

Так как функция $f(\xi)/(\xi-z)$ является аналитической в области $D\setminus\{z\}$, то, по интегральной теореме Коши для многосвязных областей, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_{R^*}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_{r^*}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\,.$$

Но последний интеграл в левой части этого неравенства равен $f(z)$ согласно интегральной формуле Коши. Таким образом

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_{R^*}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_{r^*}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\,.}$$

Рассмотрим первый интеграл, в котором $\xi\in\Gamma_{R^*}$, т.е. $|\xi-z_0|>|z-z_0|$. В этом случае

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{(\xi-z_0)}\cdot\frac{1}{1-(z-z_0)/(\xi-z_0)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}$$ – сходится абсолютно как геометрическая прогрессия ($q\overset{\triangle}{=}\big|(z-z_0)/(\xi-z_0)\big|<1$). Воспользовавшись теоремой Вейерштрасса о мажоранте, мы можем утверждать, что этот ряд сходится также и равномерно. А так как функция $f(\xi)$ является аналитической в точках окружности Γ_{R^*}, то она ограничена на этой окружности и ряд с общим членом $f(\xi)\cdot(z-z_0)^k/(\xi-z_0)^{k+1}$ сходится равномерно на Γ_{R_*} и допустимо почленное интегрирование его суммы:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_{R^*}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_{R^*}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\cdot(z-z_0)^k\,,$$

где $C_k \triangleq \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_{R^*}} \dfrac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi$, $\forall\, k \geqslant 0$.

Рассмотрим второй интеграл, в котором $\xi \in \Gamma_{r^*}$, т.е. $|\xi - z_0| < |z - z_0|$. В этом случае

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{(z-z_0)}\cdot\frac{1}{1-(\xi-z_0)/(z-z_0)} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} -k = n+1,\ n = -k-1 \\ n = 0 \Longleftrightarrow k = -1 \\ n = \infty \Longleftrightarrow k = -\infty \end{array}\right\} = -\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}.$$

Повторив рассуждения, приведенные выше, получаем:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_{r^*}}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_{r^*}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi\right\}\cdot(z-z_0)^k = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_k\cdot(z-z_0)^k,$$

где $C_k \triangleq \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_{r^*}} \dfrac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi$, $\forall\, k \leqslant -1$.

Таким образом в кольце D: $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} C_k(z-z_0)^k$.

Взяв произвольную окружность $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| = \alpha \in (r;R)\}$, и воспользовавшись теоремой Коши для многосвязных областей, убеждаемся в том, что $C_k \equiv \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}};\quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots .$

Пример 1. Предположим, что функцию $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)} \equiv \dfrac{1}{(z-2)} - \dfrac{1}{(z-1)}$ нужно "разложить по степеням $(z-2)$." Имеем:

(1) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)} - \dfrac{1}{1+(z-2)} = \big\{|z-2| < 1\big\} = \dfrac{1}{(z-2)} - \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-2)^k$;

(2) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)} - \dfrac{1}{z-2}\cdot\dfrac{1}{1+1/(z-2)} = \big\{|z-2| > 1\big\} = \dfrac{1}{z-2} - \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(z-2)^{k+1}} \equiv \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{(z-2)^{k+1}} \equiv$

$$\equiv \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}\ .$$

Пример 2. Пусть функция $f(z)$ определена в примере 1, то есть $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-1)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$.

Точки $z_{01} = 1$, $z_{02} = 2$ являются точками, в которых рассматриваемая функция теряет свойство аналитичности. Области аналитичности этой функции представлены на следующем рис. 46.

$G_1 = \{z\ \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(z) \equiv -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-z/2} + \dfrac{1}{1-z} = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{2^k} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty}\Big\{1 - \dfrac{1}{2^{k+1}}\Big\}\, z^k$;

$G_2 = \{z\ :\in \mathbb{C}\ :\ 1 < |z| < 2\} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f(z) = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-z/2} - \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-1/z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{-1}{2^{k+1}}\cdot z^k + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{-1}{z^{k+1}}$;

$G_3 = \{z\ \in \mathbb{C}\ :\ |z| > 2\} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^{k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{2^k-1\Big\}\cdot\frac{1}{z^{k+1}}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}(2^k-1)\cdot\frac{1}{z^{k+1}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}-n=k+1\\ k=1\Longleftrightarrow n=-2\end{array}\right\}=\sum_{n=-\infty}^{-2}(2^{-n-1}-1)\,z^n\,.$$

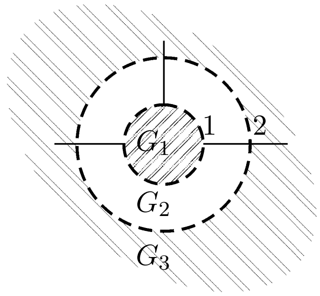

Рис.46

Особые точки аналитической функции

I. Пусть $f(z)$ – однозначная аналитическая функция в окрестности точки $z_0\neq\infty$, за исключением быть может самой этой точки, т.е. $f(z)$ является аналитической в кольце $K=\{z\in\mathbb{C}\,:\,0<|z-z_0|<\rho\}$. Относительно z_0 возможны два предположения:

(1) существует конечное комплексное число a_0 такое, что если $f(z_0)\overset{\triangle}{=}a_0$, то $f(z)$ становится аналитической в круге $D=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z-z_0|<\rho\}$;

(2) не существует комплпексного числа a_0, как в случае (1).

Если реализуется случай (1), то говорят, что z_0 – правильная для $f(z)$. Если реализуется случай (2), то говорят, что z_0 – изолированная особая точка для $f(z)$.

Пример 1. Если $f(z)=1\big/(z-1)(z-2)$, то $z_{01}=1$ и $z_{02}=2$ – изолированные особые точки для $f(z_0)$.

Пример 2. Если $f(z)=\left\{1+e^{1/z^2}\right\}^{-1}$, то $z_0=\theta$ не является изолированной для $f(z)$, т.к. $1+\exp(1/z^2)=\theta\Longleftrightarrow z^{-2}=\pi(2k+1)i\Longleftrightarrow z_k=1\big/\sqrt{\pi(2k+1)i}$ и в любой окрестности точки $z_0=\theta$ есть другие особые точки.

II. **Теорема 1.** Пусть $f(z)$ является аналитической в кольце $K=\{z\,:\,0<|z-z_0|<\rho\}$. Точка $z_0\neq\infty$ – правильная для $f(z)$ тогда и только тогда, когда существует окрестность точки z_0, в которой $|f(z)|<M<\infty$.

◀ *Необходимость.* Если $z_0\neq\infty$ – правильная, то $f(z)$ можно доопределить в точке z_0 конечным числом так, что $f(z)$ становится аналитической в круге $D=\{z\,:\,|z-z_0|<\rho\}$ и, как следствие, ограниченной в D.

Достаточность. Пусть теперь $|f(z)|<M<\infty$ в $D=\{z\in\mathbb{C}\,:\,|z-z_0|<\rho\}$. Тогда в кольце $K=\{z\in\mathbb{C}\,:\,0<|z-z_0|<\rho\}$ имеем разложение в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\cdot(z-z_0)^k\,;\quad C_k=\frac{1}{2\pi\,i}\oint_{\gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,;\quad \gamma=\{z\in\mathbb{C}\,:\,|z-z_0|=\rho_1<\rho\}\subset D$$

$$|C_k|\leqslant\frac{1}{|2\pi\,i|}\oint_{\gamma}\frac{|f(\xi)|\cdot|d\xi|}{|\xi-z_0|^{k+1}}<\frac{M}{2\pi\,\rho_1^{k+1}}\oint_{\gamma}|d\,\xi|=\frac{M}{2\pi\,\rho_1^{k+1}}\,2\pi\,\rho_1=\frac{M}{\rho_1^k}$$

Если $k<0$ и $\rho_1\to0$, то $C_k\equiv0$ и мы приходим к разложению Тейлора: $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k$, т.е. $f(z_0)=C_0\equiv a_0$ ▶

Следствия из теоремы 1.

1). Следующие два определения правильной (устранимой) точки однозначной аналитической функции $f(z)$ эквивалентны исходному:

$$(1)\quad \exists \lim_{z\to z_0} f(z) = a_0 \neq \infty\ ; \qquad (2)\quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z-z_0)^k.$$

2). $z_0 \neq \infty$ – изолированная особая точка однозначной аналитической функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$\text{или } \exists \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty, \quad \text{или } \nexists \lim_{z\to z_0} f(z).$$

Пример 3. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \Big/ (2k+1)!\ ;\ |z| < \infty$, т.е. $z_0 = \theta$ – правильная.

Пример 4. $f(z) = e^{1/z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 1/k!\, z^k;\quad 0 < |z| < \infty$, т.е. $z_0 = \theta$ – изолированная особая точка.

III. Пусть в окрестности точки $z_0 \neq \infty$, являющейся изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$, функция $f(z)$ не ограничена, но $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$. В этом случае точку z_0 называют полюсом.

Замечание. Если $z_0 \neq \infty$ – полюс для $f(z)$, то существует окрестность z_0, в каждой точке которой $|f(z)| > M$, $\forall\, M > 0$. В этой окрестности $F(z) \overset{\triangle}{=} 1/f(z)$ аналитична за исключением быть может точки z_0, как отношение двух аналитических функций и $\exists \lim\limits_{z\to z_0} F(z) = \lim\limits_{z\to z_0} 1/f(z) = \theta$. Т.о. для $F(z)$ точка z_0 является правильной – нулем порядка $m \in \{1, 2, \dots N\}$, где $N < \infty$.

Обратно, если $F(z) \overset{\triangle}{=} 1/f(z)$ – однозначная аналитическая в окрестности $z_0 \neq \infty$ функция и z_0 – изолированный нуль порядка m, то существует кольцо $\{z \in \mathbb{C}\ :\ 0 < |z - z_0| < \delta\}$, в котором нет других нулей для $F(z)$. Но тогда $f(z) = 1/F(z)$ аналитична в этом кольце и $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Таким образом между полюсами $f(z)$ и нулями $F(z) \overset{\triangle}{=} 1/f(z)$ установлено взаимно однозначное соответствие и $z_0 \neq \infty$ называют полюсом порядка m для $f(z)$, если z_0 – нуль порядка m для $F(z) = 1/f(z)$.

Теорема 2. Изолированная особая точка $z_0 \neq \infty$ однозначной аналитической функции $f(z)$ является для нее полюсом порядка m тогда и только тогда, когда $\exists \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = b$ и $0 < |b| < \infty$.

◀ *Необходимость.* Пусть $z_0 \neq \infty$ – полюс порядка m для $f(z)$, т.е. нуль порядка m для $F(z) \overset{\triangle}{=} 1/f(z)$. В этом случае существует аналитическая функция $\varphi(z)$ такая, что $F(z) \overset{\triangle}{=} 1/f(z) = (z-z_0)^m \cdot \varphi(z)$ и $\varphi(z_0) \neq \theta$ и $\varphi(z_0) \neq \infty$. Но тогда $(z-z_0)^m f(z) = 1/\varphi(z)$ и $1/|\varphi(z_0)| = b,\ 0 < |b| < \infty$.

Достаточность. Пусть $\exists \lim\limits_{z - z_0} (z-z_0)^m f(z) = b$ и $0 < |b| < \infty$. Если $\Psi(z) \overset{\triangle}{=} (z-z_0)^m f(z)$, то $\Psi(z)$ – аналитична в кольце $\{z\ :\ 0 < |z - z_0| < \delta\}$ как произведение двух аналитических функций, а $z_0 \neq \infty$ – правильная для $\Psi(z)$ в силу существования конечного предела. Но тогда в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < \delta\}$ функция $1/\Psi(z)$ – аналитическая и $1/\Psi(z_0) = 1/b$, где $0 < 1/|b| < \infty$, т.е. $1/f(z) = (z-z_0)^m \cdot 1/\Psi(z)$ и точка z_0 – ноль порядка m для $1/f(z)$. ▶

Пример 5. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z^6} \equiv \left\{\dfrac{\operatorname{sh} z}{z}\right\} \cdot \dfrac{1}{z^5}$ и $\lim\limits_{z\to\theta} z^5 f(z) = \lim\limits_{z\to\theta} \dfrac{\operatorname{sh} z}{z} = 1$, т.е. $z_0 = \theta$ – полюс 5-го порядка.

Теорема 3. Изолированная особая точка $z_0 \neq \infty$ аналитической функции $f(z)$ является полюсом порядка m тогда и только тогда, когда $f(z) = \sum\limits_{k=-m}^{\infty} C_k (z-z_0)^k$ и $C_{-m} \neq \theta$.

◀ *Необходимость.* Пусть $z_0 \neq \infty$ – полюс порядка m для $f(z)$, т.е. $1/f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$, где

$\varphi(z)$ – аналитична и $\varphi(z_0) \neq \theta$. Но тогда $1/\varphi(z)$ – аналитична и $1/\varphi(z_0) \notin \{\theta; \infty\}$, т.е.

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} \cdot 1/\varphi(z) = (z - z_0)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (z - z_0)^{k-m} = \left\{ \begin{array}{c} n = k - m \\ C_n \equiv a_{n+m} \end{array} \right\} =$$

$$= \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \text{ и } C_{-m} = a_0 \neq \theta$$

Достаточность. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ и $C_{-m} \neq 0$, т.е.

$f(z) = (z - z_0)^{-m}\{C_{-m} + C_{-m+1}(z - z_0) + \ldots\} = (z - z_0)^{-m} \cdot 1/\varphi(z)$, где $\dfrac{1}{\varphi(z)} \triangleq \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_{-m+k} \cdot (z - z_0)^k$ – аналитична и $1/\varphi(z_0) = C_{-m} \neq 0$. Но тогда $1/f(z) = (z - z_0)^m \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая и $\varphi(z_0) = 1/C_{-m}$, т.е. z_0 – нуль порядка m для $1/f(z)$ и полюс порядка m для $f(z)$. ►

Пример 6. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z^6} = z^{-6} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^{2k-5}}{(2k+1)!} = \dfrac{1}{z^5} + \dfrac{1}{3!\,z^3} + \dfrac{1}{5!\,z} + \ldots$, т.е. $z_0 = \theta$ – полюс 5-го порядка.

IV. Если в окрестности изолированной особой точки $z_0 \neq \infty$ однозначной аналитической функции $f(z)$ она не ограничена и $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, то такую точку называют существенно особой.

Теорема 4. (Сохоцкого-Вейерштрасса). Если $z_0 \neq \infty$ – существенно особая точка для однозначной аналитической функции $f(z)$, то $\forall\, A \in \mathbb{C}$ существует последовательность $\{z_k\}$, сходящаяся к z_0 такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} f(z_k) = A$. (Без док-ва).

Пример 7. $f(z) = e^{1/z}$ и $z_0 = \theta$ – существенно особая, т.к.

$\nexists \lim\limits_{z \to \theta} f(z)\ :\ (z = x \to +0) \Longrightarrow e^{1/z} \to e^{+\infty} = \infty$ и $(z = x \to -\infty) \Longrightarrow e^{1/z} \to e^{-\infty} = 0$.

Замечание. Лорановское разложение однозначной аналитической функции $f(z)$ в окрестности существенно особой точки $z_0 \neq \infty$ содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z - z_0)$ с ненулевыми коэффициентами и наоборот.

Доказательство.

(α). Если $z_0 \neq \infty$ – существенно особая точка для $f(z)$, то ее лорановское разложение в окрестности z_0 может содержать лишь бесконечное число отличных от нуля коэффициентов с отрицательными индексами, т.к. в противном случае z_0 – либо полюс, либо правильная точка.

(β). Если в окрестности точки $z_0 \neq \infty$ ряд Лорана для $f(z)$ содержит бесчисленное множество ненулевых коэффициентов с отрицательными индексами, то z_0 не может быть правильной (см. следствие из теоремы 1) или полюсом (см. теорему 3), т.е. z_0 – существенно особая точка.

Пример 8. $\exp\{1/z\} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!\,z^k}$; $0 < |z| < \infty$ и $z_0 = \theta$ – существенно особая, т.к. $C_{-n} = \dfrac{1}{n!}$, $\forall\, n \geqslant 0$.

V. Точку $z_0 = \infty$ называют изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$, если существует ее окрестность $B_N = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| > N\}$, которая не содержит других особых точек.

Пример 9. Функция $f(z) = 1/(z^2 + 1)$ имеет три изолированные особые точки $z_{01} = i$, $z_{02} = -i$, $z_{03} = \infty$.

Пример 10. Для функции $f(z) = 1/(e^z + 1)$ точка $z_0 = \infty$ не является изолированной, т.к. $e^z + 1 = 0 \Longleftrightarrow z = z_k = i\,(\pi + 2\pi k) \equiv i\,\pi(2k + 1)$, т.е. в любой окрестности точки $z_0 = \infty$ есть другие особые точки, так как $|z_k| = \pi(2k+1) \to \infty$ при $k \to \infty$.

VI. Лорановское разложение аналитической функции $f(z)$, сходящееся всюду в B_N, за исключением быть может самой точки $z_0 = \infty$, называют разложением $f(z)$ в окрестности $z_0 = \infty$.

Пример 11. $f(z) \stackrel{\triangle}{=} \dfrac{1}{(z+1)(z-2)} = \dfrac{(z+1)-(z-2)}{3\,(z+1)(z-2)} =$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1}\right\} = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 2/|z| < 1 \\ 1/|z| < 1 \end{array} \iff |z| > 2\right\} =$$

$= \dfrac{1}{3z}\left\{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{z^k} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{z^k}\right\} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k-(-1)^k}{3}\cdot z^{-k-1}$ – разложение функции $f(z)$ в окрестности изолированной особой точки $z_0 = \infty$.

Пример 12. $f(z) = \operatorname{sh}\dfrac{1}{z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\,z^{-(2k+1)}$; $0 < |z| < \infty$ – можно рассматривать как лорановское разложение как в окрестности точки $z_{01} = \theta$, так и в окрестности точки $z_{02} = \infty$.

Классификация характера изолированной особой точки $z_0 = \infty$

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, аналитичная в кольце $K = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \rho < |z| < \infty\}$. Полагая $z = 1/\xi$, получаем взаимнооднозначное соответствие между точками кольца K и точкми кольца $k = \{\xi \ : \ 0 < |\xi| < 1/\rho\}$. При этом,точка $\xi = \theta$ будет служить образом точки $z = \infty$ и каждой последовательности $\{z_k\} \to \infty$ будет соответствовать последовательность $\{\xi_k\} \to \theta$, где $\xi_k \equiv 1/z_k$ и наоборот.

Пусть $\varphi(\xi) \stackrel{\triangle}{=} f(1/\xi)$, где $z = 1/\xi$. В зависимости от характера изолированной особой точки $\xi = \theta$ для $\varphi(\xi) \equiv f(1/\xi) \equiv f(z)$ изолированную особую точку $z = \infty$ называют

$\alpha)$ правильной или устранимой, если

$$\exists \lim_{z\to\infty} f(z) = A \neq \infty \iff f(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} C_k\,z^k \ ;$$

$\beta)$ полюсом порядка m, если

$$\exists \lim_{z\to\infty} z^{-m} f(z) \notin \{\theta, \infty\} \iff f(z) = \sum_{k=-\infty}^{m} C_k\,z^k \,,\ C_m \neq 0 \ ;$$

$\gamma)$ существенно особой, если

$\nexists \lim\limits_{z\to\infty} f(z) \iff f(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\,z^k$ и существует счётное множество ненулевых коэффициентов с положительными индексами.

Пример 13. Для функции $f(z) = e^{1/z}$ точка $z_0 = \infty$ является правильной или устранимой, так как

(1) $\exists \lim\limits_{z\to\infty} \exp(1/z) = 1$;

(2) $$\exp(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,z^k} \equiv \left\{\begin{array}{l} k = -n \\ k = 0 \iff n = 0 \\ k = \infty \iff n = -\infty \end{array}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{z^n}{(|n|)!}$$

Пример 14. Для функции $f(z) = (z + 1/z^2)^2 \equiv z^2 + 1/z + 1/z^4$ точка $z_{01} = \theta$ – полюс 4 порядка, а точка $z_{02} = \infty$ – полюс 2 порядка. При этом $\exists \lim\limits_{z\to\theta} z^4\,f(z) = 1$ и $\exists \lim\limits_{z\to\infty} f(z)/z^2 \equiv 1$.

Пример 15. Для функции $f(z) = e^z$ точка $z_0 = \infty$ является существенно особой, т.к.

(1) $e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$; (2) $\lim\limits_{z=-x^2\to-\infty} e^z = 0$ и $\lim\limits_{z=x^2\to\infty} e^z = \infty$, т.е. $\nexists \lim\limits_{z\to\infty} e^z$

Пример 16. Для функции $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ точки $z_{01}=\theta$, $z_{02}=\infty$ являются существенно особыми точками.

$$e^{z+1/z}=e^z\cdot e^{1/z}=\{0<|z|<\infty\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}\equiv\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!\,(N+|m|)}\right)z^m,\text{ так как}$$

$$z^m:\left\{\frac{1}{0!\,m!}+\frac{1}{1!\,(m+1)!}+\ldots+\frac{1}{N!\,(m+N)!}+\ldots\right\}\equiv\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!\,(N+m)!}\,,$$

$$z^{-m}:\left\{\frac{1}{0!\,m!}+\frac{1}{1!\,(m+1)!}+\ldots+\frac{1}{N!\,(m+N)!}+\ldots\right\}\equiv\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!\,(N+m)!}\,.$$

Таким образом $f(z)\stackrel{\triangle}{=}e^{z+1/z}\equiv\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!\,(N+|m|)!}\right\}z^k\,;\ 0<|z|<\infty.$

Элементы теории вычетов

Определение 1. Если $z_0\neq\infty$ – точка аналитичности или изолированная особая точка однозначной аналитичной функции $f(z)$ и L – замкнутый контур, охватывающий точку z_0 так, что на самом контуре L и всюду внутри него, за исключением быть может самой точки z_0, функция $f(z)$ является аналитической, то вычетом $f(z)$ относительно точки z_0 называется число $\operatorname{Res}\,f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi\,i}\displaystyle\oint_L f(z)dz$.

Замечания к определению 3.

1). Из т. Коши следует, что $\operatorname{Res}f(z_0)$ не зависит от формы и размеров контура L, если он удовлетворяет условиям, сформулированным в определении 1.

2). Если z_0 – изолированная особая точка однозначной аналитической функции $f(z)$, то $\operatorname{Res}f(z_0)\equiv C_{-1}$, где C_{-1} – коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0\neq\infty$.

3). Если $z_0\neq\infty$ – правильная точка или точка аналитичности однозначной аналитической функции $f(z)$, то $\operatorname{Res}f(z_0)\equiv\theta$.

Пример 1. $f(z)=z^3+z+5/z-7/z^5$. Изолированные особые точки $z_{01}=\theta$ – полюс 5-го порядка и $z_{02}=\infty$ – полюс 3-го порядка. $\operatorname{Res}f(\theta)=5$.

4). Если $z_0\neq\infty$ – полюс m-го порядка однозначной аналитической функции $f(z)$, то $f(z)=\dfrac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\dfrac{C_{-1}}{(z-z_0)}+\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^k\wedge C_{-m}\neq\theta$. Таким образом

$$(z-z_0)^m f(z)=C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+C_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{k=0}^{\infty}C_k(z-z_0)^{k+m}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{d^{m-1}}{d\,z^{m-1}}\,(z-z_0)^m f(z)=(m-1)!\,C_{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}(m-k)(m-k-1)\ldots(k+1)C_k(z-z_0)^{k+1}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\operatorname{Res}f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{d\,z^{m-1}}\big\{(z-z_0)^m f(z)\big\}$$

P.S. Если $m=1$, т.е. z_0 – полюс 1-го порядка, то

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\big\{(z-z_0)\,f(z)\big\}$$

Пример 2. $f(z)=(5z-1)\big/(z-1)(z+2)\equiv 4/3\,(z-1)-11/3\,(z+2)$. Изолированные особые точки $z_{01}=1$ и $z_{02}=-2$ – полюсы 1-го порядка; $z_{03}=\infty$ – правильная точка – нуль 1-го порядка. $\operatorname{Res}f(1)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)f(z)=4/3$ и $\operatorname{Res}f(-2)=\lim\limits_{z\to-2}(z+2)f(z)=-11/3$.

Пример 3. Пусть $f(z) = 1\Big/(z-2)\sin z$. Нужно найти $\operatorname{Res} f(2)$ и $\operatorname{Res} f(\theta)$. В рассматриваемом случае изолированные особые точки $z_{01} = \theta$ и $z_{02} = 2$ являются полюсами 1-го порядка и $\operatorname{Res} f(\theta) = -1/2$; $\operatorname{Res} f(2) = 1/\sin 2$.

Пример 4. $f(z) = 1\Big/(z^2+1)^3 \equiv (z+i)^{-3}\cdot(z-i)^{-3}$. Таким образом, изолированные особые точки $z_{01} = i$ и $z_{02} = -i$ – полюсы 3-го порядка.

$\operatorname{Res} f(i) = \dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to i}\dfrac{d^2}{d\,z^2}(z+i)^{-3} = \dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to i}(-3)(-4)(z+i)^{-5} = \dfrac{3\cdot 4}{2\cdot 2^5\, i^5} = \dfrac{3}{16\,i} = -\dfrac{3i}{16}$;

$\operatorname{Res} f(-i) = \dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{d^2}{d\,z^2}(z-i)^{-3} = \dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to -i}(-3)(-4)(z-i)^{-5} = \dfrac{3\cdot 4}{2\cdot 2^5\,(-i)^5} = \dfrac{3i}{16}$.

Пример 5. Пусть $f(z) = e^{z+1/z}$ и нужно найти $\operatorname{Res} f(\theta)$. Как мы уже знаем

$$f(z) \overset{\triangle}{=} e^{z+1/z} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!\,(N+|m|)!}\right\} z^m\ ; \quad 0<|z|<\infty.$$

Таким образом $z_0 = \theta$ – существенно особая точка и $\operatorname{Res} f(\theta) = C_{-1} = \displaystyle\sum_{N=0}^{+\infty}\frac{1}{N!\,(N+1)!}$.

Основная теорема о вычетах

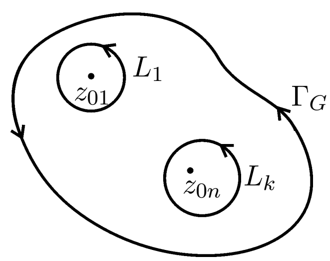

Рис.47

Если $f(z)$ – однозначная аналитическая функция в замкнутой области $G\cup\Gamma_G$, за исключением конечного числа изолированных точек $\{z_{0k}\}_{k=1}^{n}$, охваченных кусочно-гладким замкнутым контуром Γ_G, то $\dfrac{1}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_G} f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_{0k})$.

Доказательство. Так как для любого номера $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ точка z_{0k} является внутренней изолированной точкой, то каждую из них можно охватить окружностью L_k столь малого радиуса, чтобы она целиком лежала в $\{G\setminus\Gamma_G\}$ и не имела общих точек с другими окружностями L_j, где $j\neq k$. Тогда по теореме Коши для многосвязных областей имеем:

$$\frac{1}{2\pi\, i}\oint\limits_{\Gamma_G} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi\, i}\oint\limits_{L_k} f(z)dz \equiv \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_{0k}).$$

Пример 6. Пусть необходимо вычислить значение

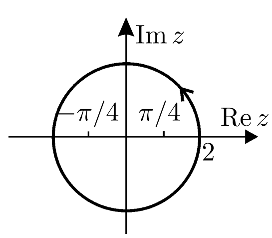

Рис.48

$J \overset{\triangle}{=} \oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z}{1-2\sin^2 z}\,dz \equiv \dfrac{1}{2}\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z\,dz}{(\sqrt{2}/2-\sin z)(\sqrt{2}/2+\sin z)}$. Имеем:

$\left.\begin{array}{l}(\sin z = \sqrt{2}/2) \Longrightarrow (z_{01}^k = \pi/4 + 2\pi\, k)\wedge(z_{02}^k = 3\pi/4+2\pi\, k)\\ (\sin z = -\sqrt{2}/2) \Longrightarrow (z_{03}^k = -\pi/4+2\pi\, k)\wedge(z_{04}^k = -3\pi/4+2\pi\, k)\end{array}\right\}$. Контур $|z| = 2$ охватывает две изолированные особые точки $z_{01} = \dfrac{\pi}{4}$ и $z_{02} = -\dfrac{\pi}{4}$, которые являются полюсами 1-го порядка. Таким образом

$$\operatorname{Res} f(z_{01}) = \lim_{z\to\pi/4}(z-\pi/4)\cdot\frac{z}{(\sqrt{2}/2-\sin z)(\sqrt{2}/2+\sin z)} = \lim_{z\to\pi/4}\frac{1}{-\cos z}\cdot\lim_{z\to\pi/4}\frac{z}{\sqrt{2}/2+\sin z} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{Res} f(z_{02}) = \lim_{z\to-\pi/4}(z+\pi/4)\cdot\frac{z}{(\sqrt{2}/2-\sin z)(\sqrt{2}/2+\sin z)} = \lim_{z\to-\pi/4}\frac{1}{\cos z}\cdot\lim_{z\to-\pi/4}\frac{z}{\sqrt{2}/2-\sin z} = -\frac{\pi}{4}$$

$$J = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\{\operatorname{Res} f(z_{01}) + \operatorname{Res} f(z_{02})\} = \pi i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) \equiv -\frac{\pi^2}{2}i$$

Определение 2. Вычетом однозначной аналитической функции $f(z)$ относительно изолированной точки $z_0 = \infty$ называется комплексное число $\operatorname{Res} f(\infty) \triangleq \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=N} f(z)\,dz$, где $N > 0$ столь велико, что в кольце $B_N = \{z \in \mathbb{C} \,:\, N < |z| < \infty\}$ функция $f(z)$ является аналитической. При этом обход контура интегрирования – стандартный, то есть область B_N остается слева.

Замечания к определению 2.

1). $\operatorname{Res} f(\infty) = -C_{-1}$, где C_{-1} – коэффициент в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \infty$. Знак "–" – следствие направление обхода контура (по часовой стрелке).

2). Если однозначная аналитическая функция $f(z)$ в расширенной комплексной плоскости $C \cup \{\infty\}$ имеет лишь изолированные особые точки, то сумма вычетов в них равна нулю (теорема о сумме вычетов в расширенной комплексной плоскости).

Для обоснования этого утверждения предположим, что функция $f(z)$ в расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ имеет лишь изолированные особые точки $\{z_{0k}\}_{k=1}^n$, где $n < \infty$ и $|z_{0k}| < \infty$, $\forall\ k\ \overline{1:n}$. Тогда $\exists\ N > 0$ такое, что в кольце $B_N = \{z \in \mathbb{C}\ :\ N < |z| < \infty\}$ функция $f(z)$ является аналитической. Таким образом

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=N} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=N} f(z)dz = \theta\ ,$$

где, согласно основной теореме о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=N} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_{k0})\ ,$$

и, согласно определению 2

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=N} f(z)dz = \operatorname{Res} f(\infty)\ .$$

Пример 7. Для функции $f(z) = (5z-1)/(z-1)(z+2) \equiv 4/3(z-1) + 11/3(z+2)$

$z_{01} = 1$ – полюс 1-го порядка и $\operatorname{Res} f(1) = 4/3$

$z_{02} = -2$ – полюс 1-го порядка и $\operatorname{Res} f(-2) = 11/3$

$z_{03} = \infty$ – правильная и $\operatorname{Res} f(\infty) = -\operatorname{Res} f(1) - \operatorname{Res} f(-2) = -4/3 - 11/3 = -15/3 = -5$. Проверим этот результат:

$$f(z) = \frac{4}{3z}\cdot\frac{1}{1-1/z} + \frac{11}{3z}\cdot\frac{1}{1+2/z} = \left\{\begin{array}{l} 1/|z| < 1 \\ 2/|z| < 1 \end{array} \Longrightarrow |z| > 2\right\} = \frac{4}{3z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k} + \frac{11}{3z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{z^k} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow C_{-1} = \dfrac{4}{3} + \dfrac{11}{3} \Longrightarrow \operatorname{Res} f(\infty) = -C_{-1} = -15/3 = -5$, т.е. если $z_0 = \infty$ – правильная для однозначной аналитической функции, то вычет в ней не обязательно равен нулю.

Пример 8. Пусть

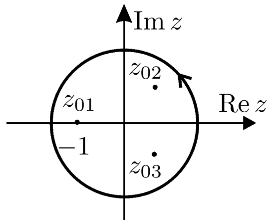

Рис.49

$J \triangleq \oint\limits_{|z|=3} \dfrac{d\,z}{z^3+1}$. Функция $f(z) = 1/(z^3+1)$ имеет три изолированные особые точки $z_{01} = -1$, $z_{02} = (1+i\sqrt{3})/2$, $z_{03} = (1-i\sqrt{3})/2$, расположенные на окружности $|z| = 1$ и являющиеся полюсами 1-го порядка. Точка $z_{04} = \infty$ – правильная.

$$J = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res} f(z_{0k}) \equiv -2\pi\, i \operatorname{Res} f(\infty)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^3+1} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1+1/z^3} = \Big\{|z|>1\Big\} = \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{3k}} \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^{3k+3}}.$$

Таким образом $C_{-1} = 0$ и $J = -2\pi\, i \operatorname{Res} f(\infty) = -2\pi\, i\, C_{-1} = 0$.

Пример 9. Пусть

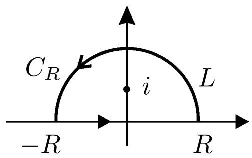

Рис.50

$J \triangleq \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,x}{(x^2+1)^2}$. Рассмотрим интеграл $J_R \triangleq \displaystyle\oint\limits_{L_R} \frac{d\,z}{(z^2+1)^2}$, где (см. рис. 50) $R > 1$, $Ł_R = C_R \cup [-R;+R]$ и подынтегральная функция $f(z) = (z^2+1)^{-1} \equiv (z+i)^{-2}(z-i)^{-2}$ имеет две конечные изолированные особые точки $z_{01} = i$ и $z_{02} = -i$, которые являются полюсами 2-го порядка. Но контур L_R охватывает лишь одну изолированную особую точку $z_{01} = i$. Поэтому $J_R = 2\pi\, i \operatorname{Res} f(i)$.

$$\operatorname{Res} f(z_{01}) = \lim_{z\to i} \frac{1}{1!}\frac{d}{d\,z}(z-i)^2\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} = \lim_{z\to i}(-2)(z+i)^{-3} = -\frac{2}{2^3\cdot i^3} = -\frac{i}{4}$$

Таким образом, для любого $R > 1$ имеем:

$$J_R \triangleq \oint\limits_{L_R} \frac{d\,z}{(z^2+1)^2} = \int\limits_{C_R}\frac{dz}{(z^2+1)^2} + \int_{-R}^{R}\frac{d\,x}{(x^2+1)^2} = 2\pi\, i\cdot\left(-\frac{i}{4}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ и}$$

$$J \triangleq \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\,x}{(x^2+1)^2} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{d\,x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}\frac{d\,z}{(z^2+1)^2} \equiv \frac{\pi}{2}, \text{ т.к.}$$

$$\left|\int\limits_{C_R}\frac{d\,z}{(z^2+1)^2}\right| = \left\{\begin{array}{l} z = R\,e^{i\varphi} \\ dz = R\,i\,e^{i\varphi}d\varphi \end{array} ;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\right\} = \left|\int_0^{\pi}\frac{R\,i\,e^{i\varphi}d\varphi}{(R^2e^{i2\varphi}+1)^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi}\frac{R\,d\varphi}{|R^2e^{i2\varphi}+1|^2} = \int_0^{\pi}\frac{R\,d\varphi}{(R^2\cos 2\varphi+1)^2 + R^4\sin^2 2\varphi} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Интеграл Фурье

Пусть $y = f(x)$ абсолютно интегрируема в $\mathbb{R}^1$ и на любом конечном интервале $(-l;l)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. В этом случае

$$\frac{1}{2}\Big\{f(x-0)+f(x+0)\Big\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{\pi\,kx}{l} + b_k\sin\frac{\pi\,kx}{l} =$$

$$= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi\, kt}{l}\,dt\right\}\cos\frac{\pi\, kx}{l} +$$

$$+\left\{\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi\, kt}{l}\,dt\right\}\sin\frac{\pi\, kx}{l} =$$

$$= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\left\{\cos\frac{\pi\, kt}{l}\cos\frac{\pi\, kx}{l} + \sin\frac{\pi\, kt}{l}\sin\frac{\pi\, kx}{l}\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi\, k(t-x)}{l}\,dt \qquad (*)$$

Рассмотрим правую часть последнего равенства в цепочке равенств (*) при $l \to +\infty$:

(1). Согласно исходному допущению $\exists \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = Q < \infty$. Поэтому

$$\lim_{l\to+\infty}\left|\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt\right| \leqslant \lim_{l\to+\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}|f(t)|\,dt \leqslant \lim_{l\to\infty}\frac{Q}{2l} = 0\ ;$$

(2). Пусть переменное α на интервале $(0;+\infty)$ принимает значения $\alpha_k = \dfrac{\pi\, k}{l}$, $\forall k = 1, 2, \ldots$, получая постоянное приращение $\Delta\alpha = \pi/l$, тогда

$$\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi\, k(t-x)}{l}\,dt \equiv \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\left[\alpha_k(t-x)\right]dt\right\}\Delta\alpha,$$

где переменное α изменяется дискретно от π/l до $+\infty$. С ростом l точки $\{\alpha_k\}$ сдвигаются влево, покрывая всю положительную полуось, так как $\alpha_1 = \pi/l \to 0$ и $\Delta\alpha = \pi/l \to 0$ при $l \to \infty$. Таким образом

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos[\alpha_k(t-x)]dt\right\}\Delta\alpha \underset{l\to\infty}{\to} \int\limits_{0}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos[\alpha(t-x)]dt\right\}d\alpha \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos[\alpha(t-x)]dt,$$

так как внутренний интеграл в правой части последнего равенства – четная функция аргумента α. А так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin[\alpha(t-x)]dt \equiv 0$$

как интеграл от нечетной функции аргумента α в симметричных пределах, то при $l \to +\infty$ с учетом равенств $(*)$ имеем:

$$\frac{1}{2}\big\{f(x-0)+f(x+0)\big\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\left[\alpha(t-x)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos[\alpha(t-x)]\,dt \pm i\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin[\alpha(t-x)]dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\Big\{\cos[\alpha(t-x)] \pm i\,\sin[\alpha(t-x)]\Big\}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{\pm i\alpha(t-x)}dt.$$

Понимая равенство в смысле среднего значения:

$$f(x) \triangleq \frac{1}{2}\Big\{f(x-0)+f(x+0)\Big\},$$

приходим к двум различным формам представления интеграла Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} d\,\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f(t)\,dt \quad ;$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} d\,\alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} f(t)\,dt \quad .$$