

Вариант 1

Задача 1 (2 балла). Вычислить линейный интеграл $\int_L (x^2 + y^2 - 2Rx) dx + R(x + y) dy$ вдоль дуги окружности $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ от точки $O(0; 0)$ до точки $A(R; R)$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint x^3 dy - y^3 dx$ вдоль окружности $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ в положительном направлении. Преобразовать интеграл в двойной и вычислить, убедившись в равенстве двух значений.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{x^2; x; xz\}$; $M_0(1; 1; 2)$; $V: z = x^2 + y^2, z = 1, x = 0, y = 0 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$; Σ — часть поверхности $y = 0$, вырезаемая поверхностями $z = x^2 + y^2, z = 1, x = 0 (x \geq 0)$; $L: z = x^2 + y^2, z = 1$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ по степеням $z-1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}$ $C: |z + i| = 1$

Вариант 2

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_L yz dx + z\sqrt{9-y^2} dy + xyz dz$ вдоль дуги L винтовой линии $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = \frac{2t}{\pi}$ от точки A пересечения кривой с плоскостью xOy до точки B ее пересечения с плоскостью $z = 4$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint x^3 dy - y^3 dx$ вдоль эллипса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ в положительном направлении. Преобразовать интеграл в двойной и вычислить, убедившись в равенстве двух значений.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{xy; 1; z\}$; $M_0(0; 2; 1)$; $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 0 (z \geq 0)$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вырезаемая поверхностями $z = 0 (z > 0, \text{нормаль внешн.})$; $L: y^2 + z^2 = 4, z = 0 (z \geq 0), x = 0$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^3$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = z^5 \sin \frac{1}{z^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{(z+2)^2 e^z \sin \pi z dz}{z-2}$ $C: |z-2| = 1$

Вариант 3

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(-1;4)}^{(1;1)} \frac{dx + dy}{(x + y - 1)^2}$.

Задача 2 (2 балла). Применяя формулу Грина, вычислить $\oint_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, где C — контур с положительным направлением обхода, составленный из отрезка прямой от точки $A(3; 0)$ до точки $B(1; 2)$, параболой $y = 2x^2$ от точки $B(1; 2)$ до точки $O(0; 0)$ и отрезка оси OX от точки $O(0; 0)$ до точки A . Проверить результат с помощью непосредственного вычисления криволинейного интеграла.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{xz; yz; z^2\}$; $M_0(5; 2; 3)$; $V: x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 2 (z \geq 2)$; Σ — часть поверхности $z = 2$, вырезаемая поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (в направлении уменьшения z); $L: y = z, y = 2z, z = 1, x = 2$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 4}$ по степеням $z - 2$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2} \cos \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{dz}{(z^2 - 1)^3}$ $C: |z - 1| = 1$

Вариант 4

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(0;0)}^{(0;4)} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$ вдоль параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2;2)$ и далее по прямой от точки A до точки $B(0;4)$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_L x dy - y dx$ по контуру, образованному осью Ox и первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{2x; 2y; xz\}$; $M_0\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1\right)$; $V: y = x^2, y = 4x^2, y = 1, z = y, z = 0$ ($x \geq 0$); Σ — часть поверхности $y = x^2$, вырезаемая поверхностями $z = 0, y = z, y = 1$; $L: x = 0, z = 0, x^2 + z^2 = 1, y = 3$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{z}{\sqrt[3]{z^3 + 3z^2 + 3z}}$ по степеням $z + 1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{(z^2 + \pi^2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{z^3 dz}{(z+1)^3(z-2)}$ $C: |z-2| = 2$

Вариант 5

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_L x dy - y dx$ вдоль первой арки циклоиды

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ от точки $A(2\pi a; 0)$ до точки $O(0; 0)$ и далее вдоль прямой от точки O до точки $B(-\pi a; 2\pi a)$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_C (x + y) dx - (x - y) dy$ по контуру C , образованному дугой

параболы $y = 3(x - 1)^2$ от точки $A(1; 0)$ до точки $B(3; 12)$, отрезком прямой от точки B до точки $O(0; 0)$ и отрезком оси Ox от точки O до точки A . Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{3x^2; -2x^2y; 1 - 2x\}$; $M_0(1; 2; 0)$; $V: x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$); Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$), вырезаемая поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (нормаль внешняя); $L: x = y, x = -y, x = 1, z = 0$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{z + 2}{(z^2 + 2z + 5)^2}$ по степеням

$z + 1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{e^{1/z}}{1 - z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{(z^2 + 1)}{z^3 + 1} dz$ $C: |z| = 2$

Вариант 6

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(-1;-3)}^{(3;1)} \frac{dx - dy}{(x - y - 1)^2}$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_L (x + y) dx - (x - y) dy$ вдоль окружности $x^2 + (y - R)^2 = R^2$,

проходимой в положительном направлении. Преобразовать этот интеграл в двойной, вычислить и убедиться в равенстве двух интегралов.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{x^2; x^2y; (x - 2)z\}$; $M_0\left(\frac{1}{2}; 0; 3\right)$; $V: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0, z = 1$; $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, y = 0$ ($y \geq 0$), $z = -1$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)^3}$ по степеням $z + 1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

представление $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}$.

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{(1 - z)^2} \sin \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{(z^2 + 1) dz}{z^2(z + 2)^2}$ $C: |z| = 1$

Вариант 7

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(1;1)}^{(5;5)} ye^{-x} dx + (10 - e^{-x}) dy$ по формуле Ньютона —

Лейбница, отыскав предварительно функцию по её полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint a^2x dy - b^2y dx$ вдоль эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с положительным направлением обхода. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{xz; yz; z^2 - 1\}$; $M_0(-1; -1; \frac{1}{4})$; $V: x + y + z = 1, x - y + z = 1, x = 0, z = 0$; Σ — часть поверхности $x + y + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0, y = 0, z = 0$; $L: y = x^2, x = 1, y = 0, z = 2$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{\sin z}{z - \pi/4}$ по степеням $z - \pi/4$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{\sin z}{(z^2 - \pi^2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C z^2 e^{-1/z} dz$ $C: |z| = 1$

Вариант 8

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(-1;-1)}^{(0;1)} \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ по двум путям: а) произвольной кривой, оставляющей начало координат слева; б) произвольной кривой, оставляющей начало координат справа.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_C e^x xy dx - e^y(x+y) dy$ вдоль квадрата с вершинами в точках $A(2; 2)$, $B(-2; 2)$, $C(-2; -2)$, $D(2; -2)$, проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{x^3; y^3; xz\}$; $M_0(1; 2; 5)$; $V: 9 - z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$; Σ — часть поверхности $9 - z = x^2 + y^2$, вырезаемая поверхностями $z = 0$; $L: z = 0, z = x, z = 2 - x, y = 2$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{\sqrt[3]{7 + 3z - 3z^2 + z^3}}{z - 1}$ по степеням $z - 1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{1-z} \sin \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{z^3 dz}{(z-1)^3(z+2)}$ $C: |z-1| = 2$

Вариант 9

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(0;1)}^{(4;0)} (y^2 + 2) dx + yx dy$ вдоль параболы $y^2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ от точки $A(0; 1)$ до точки $B(2; 0)$ и далее по верхней части окружности $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ до точки $C(4; 0)$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_C xy dx + (x + y) dy$ по контуру, образованному верхней частью астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ и отрезком оси Ox (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{yx; 2y; -z\}$; $M_0(3; 5; -1)$; $V: y^2 = 1 - z, y = 0, z = 0, x = 0, x = 1$ ($y \geq 0$); Σ — часть поверхности $y^2 = 1 - z$, вырезаемая поверхностями $x = 0, x = 1, y = 0, z = 0$; $L: x = 0, y = 0, x = 1, y = 1, z = 0$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{z - 1}{\sqrt[3]{z^3 - 3z^2 + 3z}}$ по степеням $z - 1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{z(1 - z^2)} \cos \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{e^{iz} z dz}{z^2 + 1}$ $C: |z - i| = 1$

Вариант 10

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(1;3)}^{(5;1)} \frac{dx + dy}{(\frac{x}{2} + y - 2)^2}$ вдоль ломаной, отрезки которой параллельны координатным осям.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_L (x - y) dx + xy dy$ вдоль контура, образованного верхней частью астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ и нижней частью окружности $x^2 + y^2 = a^2$ (направление обхода положительное).

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \left\{ \frac{y^2}{2}; 1; \frac{zy^2}{2} \right\}$; $M_0(0; 1; 2)$; $V: y^2 + x^2 = 1 - z, z = 0, x = y, x = -y$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = 1 - z$, вырезаемая поверхностями $z = 0$ ($z \geq 0$); $L: y = \frac{2}{x}, x = 1, y = 1, z = 2$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 4)}$ по степеням $z + 2$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2 + \pi^2)^3}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{e^{iz} z dz}{z^2 + 1}$ $C: |z - i| = 1$

Вариант 11

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(2;2)}^{(1;5)} \left(\frac{y^2 - 1}{y} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{y^2} \right) dy$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_L -x^2y dx + xy^2 dy$, где L — окружность $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, которая обходится против часовой стрелки. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{y; y^2; zy\}$; $M_0(5; 3; 1)$; $V: x + \frac{y}{2} + z = 1, y = 0, x = 0, z = 0$; Σ — часть поверхности $x + \frac{y}{2} + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0, y = 0, z = 0$; $L: \rho = 2 \cos \varphi, z = 1$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 1)}$ по степеням $z + 1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{1+z} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C z \cos \frac{1}{z} dz$ $C: |z| = 2$

Вариант 12

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(0;0)}^{(2;3)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{2 + x^2 + y^2}}$, отыскав функцию $U(x, y)$ по её

полному дифференциалу и используя формулу Ньютона — Лейбница.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_L (x^2 + 2y)dx - xydy$ вдоль эллипса $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проходимого

в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$.

Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и её значение в точке M_0 ;

в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{yx; y^3; z^3\}$; $M_0(7; 1; -1)$; $V: x^2 + y^2 = 4, z = 2, z = 4$; Σ — часть поверхности $z = 4$, вырезаемая поверхностями $x^2 + y^2 = 4$; $L: x^2 + y^2 = 4, x = 0, y = 0, z = 4$ ($x \geq 0, y \geq 0$).

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{\sin^2 z}{(z - \pi/8)^2}$ по степеням $z - \pi/8$

и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$, определить их

характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{e^{-iz}(1-z^2)dz}{1+z^2}$ $C: |z+i|=1$

Вариант 13

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(-2;0)}^{(6;4)} (x^2 + 2y) dx - xy dy$ вдоль нижней полуокружности

$x^2 + y^2 = 4$ от точки $A(-2; 0)$ до точки $B(2; 0)$ и далее по прямой от точки B до точки $C(6; 4)$.

Задача 2 (2 балла). С помощью формулы Грина вычислить разность между интегралами

$$\int_{AmB} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy \quad \text{и} \quad \int_{AnB} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy,$$

где AmB — отрезок прямой между точками $A(0; 0)$ и $B(1; 1)$, AnB — дуга параболы $y = x^2$, соединяющая те же точки.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{xz; z; z^2\}$; $M_0(0; -1; \frac{1}{3})$; $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вырезаемая поверхностями $x^2 + y^2 = 3z$; $L: y^2 + z^2 = 2, x = 3$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{z + 4}{(z^3 + 6z^2 + 12z)^2}$ по степеням $z + 2$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

представление $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}$.

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{\cos z}{(z^2 - \pi^2)^3}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{(z^3 + 1) dz}{(z^2 + 1)^2}$ $C: |z| = 2$

Вариант 14

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(a;0)}^{(-a;0)} x dx + (x+y) dy$ вдоль астроида $x = a \cos^3 t$,

$y = a \sin^3 t$ от точки $A(a;0)$ до точки $B(0;a)$ и далее по прямой от точки B до точки $C(-a;0)$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_C \sqrt{1+x^2+y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{1+x^2+y^2})) dy$ вдоль

окружности $x^2 + y^2 = R^2$ (направление обхода положительное).

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{z; yx^2z; x^2\}$; $M_0(3; 0; \frac{1}{3})$; $V: x = 0, y = 0, x = 1, y = 1, z = 0, z = y^2$; Σ — часть поверхности $y = z$, вырезаемая поверхностями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0$; $L: y = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 3$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)}$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} e^{1/z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\operatorname{sh} z dz}{(z^2 + \pi^2)^2}$ $C: |z - \pi i| = \pi$

Вариант 15

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(-1;-1)}^{(3;2)} \frac{dx - 2dy}{(x - 2y + 2)^2}$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_C y^2 dx - x^2 dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x + y = -1$, $x = 0$, $y = 0$, который обходится в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{1; y^2; xz\}$; $M_0(-1; 1; \frac{1}{4})$; $V: x^2 + y^2 = 2z^2, z = 1, z = \sqrt{2}, x = 0$ ($x \geq 0$); Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = 2z^2$, вырезаемая поверхностями $z = 1, z = \sqrt{2}, x = 0, y = 0$; $L: x^2 + (z - 1)^2 = 1, x = 0$ ($x \geq 0$), $y = -1$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{(16 - 12z + 6z^2 - z^3)^2}}$ по степеням $z - 2$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{1+z^2} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2 - 1)^2}$ $C: |z + 1| = 1$

Вариант 16

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_L 3x^2y dx + y dy$ вдоль дуги кривой $y = (1-x)\sqrt{x}$

между точками O и A её пересечения с осью Ox и далее по нижней части окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ до точки $B(3; 0)$.

Задача 2 (2 балла). Используя формулу Грина, вычислить $\oint_C (e^x \sin y - y) dx + (e^x \cos y - 1) dy$ по

контуре, состоящему из верхней полуокружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$ и отрезков прямых от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; -1)$ и далее до точки $B(2; 0)$. Результат проверить, вычисляя интеграл непосредственно.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{zy; x^2z; yzx^2\}$; $M_0(-1; 2; 5)$; $V: 5 - z = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, z = 0$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$); Σ — часть поверхности $x + y + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0, y = 0, z = 0$; $L: 5 - z = x^2, x = 0, y = 10, z = 0$ ($x \geq 0, z \geq 0$).

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{\cos^2 z}{(z + \pi/8)^2}$ по степеням $z + \pi/8$

и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{z^2 + 4}{(z^2 + 3z + 2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\sin^2 z dz}{(z^2 - \pi^2/4)^2}$ $C: |z + \pi/2| = 1$

Вариант 17

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ вдоль четверти эллипса

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ от точки $A(a; 0)$ до точки $B(0; b)$ и далее вдоль прямой до точки $C(-2a; 0)$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_L x^2 dx + xy dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x - y = 1$,

$2y - x = 1$, $x + y = -1$ и проходящего в положительном направлении. Результат проверить с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{xy; y^2; yz^2\}$; $M_0(-1; -2; 2)$; $V: x^2 + y^2 = 2z, x^2 + y^2 = 4, x = y, z = 0, y = 0$; Σ — часть поверхности $z = 2$, вырезаемая поверхностями $x^2 + y^2 = 4, y = 0 (y \geq 0)$; $L: y = -1, y = 2x - 1, y = -2x + 3, z = 0$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{z}{(z^2 - 4)^2}$ по степеням $z - 2$ и

указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

представление $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}$.

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{1 - z^2} e^{1/z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{e^{iz} dz}{z^2 + 1}$ $C: |z| = 2$

Вариант 18

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(2;1)}^{(4;3)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + y \right) dx + \left(x + \frac{1}{y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) dy$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_C x dx + (x + y) dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 2x$ (направление обхода положительное). Результат проверить с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{2z; xyz; xy\}$; $M_0(5; 0; 3)$; $V: y^2 + 4z^2 = 1, z = 0, y = \frac{1}{2}, x = 1, x = 2$ ($z \geq 0, y \geq \frac{1}{2}$); Σ — часть поверхности $x = 2$, вырезаемая поверхностями $y^2 + 4z^2 = 1, z = 0, y = \frac{1}{2}$; $L: x^2 + z^2 = 9, z = \sqrt{3}x, z = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 3$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2-4)}$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{z}{1-z} \sin \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\operatorname{tg} z dz}{(z - \pi/4)^3}$ $C: |z - \pi/4| = 0,5$

Вариант 19

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(3;2)}^{(5;4)} \frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Задача 2 (2 балла). Используя формулу Грина, вычислить $\oint_L x^2 y dx + xy^2 dy$ вдоль контура

$L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, проходимого в положительном направлении. Результат проверить путем непосредственного вычисления интеграла.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \left\{ \frac{x^2 z}{2}; yz; x^2 \right\}$; $M_0(-3; 3; -1)$; $V: x^2 + 2y^2 = 1, z = x + 1, z = 0$; Σ — часть поверхности $x^2 + 2y^2 = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0, z = x + 1, y = 0 (y \geq 0)$; $L: x = 1, z = x + 1, z = 0, y = 0$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

представление $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}$.

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{(z+1)^2}{(z^2-3z+2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z^2 + \pi^2)^2}$ $C: |z - \pi i| = \pi$

Вариант 20

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(-1;-1)}^{(1;1)} \frac{dx - dy}{(x - y - 1)^2}$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint (x - y^2) dx + 2xy dy$ вдоль окружности $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$, проходимой в положительном направлении. Проверить результат с помощью двойного интеграла.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{x^2y^2z; z; 1\}$; $M_0\left(\frac{1}{2}; 1; 3\right)$; $V: y = 0, z = 0, y + z = 1, x + z = 1, z - x = 1$; Σ — часть поверхности $x + z = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0, y = 0, y + z = 1$; $L: x + z = 1, -x + z = 1, z = 0, y = 0$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{1 + z + z^2}$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{1 + z^2} \sin \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\operatorname{ch} \pi z dz}{(z^2 + 1)^3}$ $C: |z - i| = 1$

Вариант 21

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(-1;0)}^{(1;2)} \frac{3x^2 dx}{\sqrt{y-x^3}} - \frac{dy}{\sqrt{y-x^3}}$.

Задача 2 (2 балла). Доказать, что интеграл $\int_L (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ не зависит от пути интегрирования. Найти значение интеграла, интегрируя сначала по ломаной AOB от точки $A(-a; \sqrt{2}b)$ до точки $B(a; \sqrt{2}b)$ через начало координат O , а затем по прямой, соединяющей точки A и B .

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{x^2; -y^2; -z^2\}$; $M_0(1; 1; 1)$; $V: x^2 + y^2 = z, z = 1$; Σ — часть поверхности $x + y + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0, y = 0, z = 0$; $L: x^2 + y^2 = 1, z = 1$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \operatorname{arctg} z$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

представление $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}$.

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{z(1+z)} \cos \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\sin z dz}{(z^2 - \pi^2/4)^2}$ $C: |z - \pi/2| = 1$

Вариант 22

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(-1;-1)}^{(1;1)} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ по двум путям:

а) произвольной кривой, оставляющей начало координат слева; б) произвольной кривой, оставляющей начало координат справа.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_C 2y dx + xy dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x + y = 3$,

$x = 1$, $y = 1$ и проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{xy; y; yz\}$; $M_0(0; 1; 0)$; $V: x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = z$, вырезаемая поверхностями $z = 4$; $L: y = x^2, y = 4, z = 0$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{z+1} \cos^2 \frac{1}{z+1}$ по степеням $z+1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 - \pi^2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\ln(1+z) dz}{(z^2-1)^3}$ $C: |z-1|=1$

Вариант 23

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(0;0)}^{(1; \frac{\pi}{2})} y \cos(xy) dx + x \cos(xy) dy$, отыскав с помощью

криволинейного интеграла функцию по её полному дифференциалу.

Задача 2 (2 балла). Используя формулу Грина, вычислить

$$\oint \frac{3x - y^3 \sqrt{1 + x^2 + 4y^3} dx + (18y^2 + x^3 \sqrt{1 + x^2 + 4y^3}) dy}{3\sqrt{1 + x^2 + 4y^3}}$$

вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$ (направление обхода положительное).

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{xyz; xy; xz\}$; $M_0(1; -1; 2)$; $V: x + z = 1, y = 0, y = 2, x = 0, z = 0$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, вырезаемая поверхностями $z = 2$; $L: \frac{x^2}{4} = z, y = 0, z = 4$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)^3}$ по степеням $z + 1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

представление $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}$.

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{z}{1-z^2} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\ln z dz}{(z^2 + 1)^2}$ $C: |z - i| = 0,5$

Вариант 24

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_L (y+x) dx + (y-x) dy$ вдоль верхней части эллипса

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \text{ от точки } A(6;0) \text{ до точки } B(2;0) \text{ и далее по прямой до точки } C(0;2).$$

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint \frac{y}{x} dx + x^2 dy$ вдоль контура, образованного кривой $y = \ln x$, осью Ox и прямой $x = e$ (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью двойного интеграла.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{xz; yz; z^2\}$; $M_0(3; 2; -1)$; $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 0 (z \geq 0)$; Σ — часть поверхности $z + x = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0, y = 1, z = y$; $L: z + y = 1, x = 0, z - y = 1, z = 0$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \left(\frac{\cos z}{z}\right)^3$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{1+z} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{e^z \ln(z+1) dz}{(z-1)^2}$ $C: |z-1| = 1$

Вариант 25

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(1;2)}^{(4;5)} \frac{x dx - y dy}{\sqrt{y^2 - x^2}}$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_L y^2 dx + xy dy$ вдоль окружности $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, проходимой в положительном направлении.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{x; y; -xyz^2\}$; $M_0(1; -1; 1)$; $V: x^2 + y^2 - z^2 = 0, z = 1$; Σ — часть поверхности $y + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0, z = 0, y = x$; $L: x^2 + z^2 = 1, y = 1$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{\cos z}{(z + \pi/4)^2}$ по степеням $z + \pi/4$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{z}{1-z^2} \operatorname{ch} \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\ln(z+1) dz}{(z^2-1)^2}$ $C: |z-1|=1$

Вариант 26

Задача 1 (2 балла). Вычислить $\int_L xy dy + y dx$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$ и далее по окружности $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ до точки $B(2; 2)$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_L y^2 dx + x dy$ по контуру, образованному кривой $y = \sqrt{x - 1}$, прямой $y = 2$ и отрезками осей Ox и Oy (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{3y^2; -3x^2; -xz\}$; $M_0(2; 1; 0)$; $V: x + z = 1, y = 0, z = 0, y = x$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = z$, вырезаемая поверхностями $z = 1$; $L: z = x^2, y = 1, z = 4$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{1 - z + z^2}$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{z}{1 + z^2} \cos \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{dz}{(z^4 - 16)^2}$ $C: |z - 2i| = 2$

Вариант 27

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(-4;3)}^{(4;0)} (x^3 - 3y) dx + (y^2 - 3x) dy$ по формуле Ньютона —

Лейбница, предварительно отыскав функцию $U(x, y)$ с помощью криволинейного интеграла.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_L (x^2 + y) dx - (y^2 + x) dy$ вдоль контура, образованного верхней частью окружности $x^2 + y^2 = 1$ и отрезкам прямых, соединяющих концы $A(-1; 0)$ и $C(1; 0)$ полуокружности с точкой $B(0; -1)$ (направление обхода положительное). Результат проверить по формуле Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{2x^2y; xy^2; -4xyz\}$; $M_0(-1; -1; 2)$; $V: x^2 + y^2 = -z + 5, z = 0$; Σ — часть поверхности $x + y = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0, y = 0, z = x$; $L: x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = (z - 1)^2 \sin^2 \frac{1}{z - 1}$ по степеням $z - 1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{z(1 - z)} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{e^{-z} dz}{z(z - 1)^3}$ $C: |z - 1| = 2$

Вариант 28

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_L (x + y) dx + (y - x) dy$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 4$ от точки $A(0; 2)$ до точки $B(2; 0)$ и далее по прямой до точки $C(4; 2)$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_C (2x - y) dx + (x - 1) dy$ вдоль контура, образованного прямыми $y = 2x$, $y = \frac{2}{x}$, $x = 2$ (направление обхода положительное). Результат проверить по формуле Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{y^2; x^2; xy^2z\}$; $M_0(-2; 1; -1)$; $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0 (z > 0), x = 0, y = 0$; Σ — часть поверхности $x + z = 1$, вырезаемая поверхностями $y = 1, z = 0, z = y$; $L: x^2 + y^2 = 1, z = x$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{z + 2}{(z^3 + 3z^2 + 3z)^2}$ по степеням $z + 1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. 2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\operatorname{th}(\pi z/4)}{(z^2 + 1)^2} dz$ $C: |z - i| = 0,5$

Вариант 29

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(1;1)}^{(8;4)} \left(\sqrt{y} - \frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}} \right) dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dy$ по формуле

Ньютона — Лейбница, отыскав предварительно функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint_C 2x dy - (x - y) dx$ вдоль контура, образованного кривыми

$y = x + 1$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ и проходящего в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{xy; -y^2; xz\}$; $M_0(0; 1; -1)$; $V: x^2 + y^2 - z^2 = 0, z = 1$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, вырезаемая поверхностями $z = \sqrt{2}$ ($z \geq \sqrt{2}$); $L: x + y = 1, y = 0, x = 0, z = 1$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{\sin z}{(z - 3\pi/4)^3}$ по степеням

$z - 3\pi/4$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

представление $\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1+z^2}$.

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \operatorname{sh} \frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{\cos z dz}{z^2(z-\pi)^2}$ $C: |z - \pi| = 4$

Вариант 30

Задача 1 (2 балла). Вычислить интеграл $\int_{(-1;1)}^{(2;-1)} \frac{dx + dy}{(x + y + 2)^2}$.

Задача 2 (2 балла). Вычислить $\oint (x + y) dx - (x - y) dy$ вдоль периметра квадрата с вершинами $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$, $D(0; -1)$, проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (6 баллов). В \mathbb{R}^3 задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0 ; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L , образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{y; -x; yz\}$; $M_0(-1; 3; 0)$; $V: x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ($y \geq 0$); Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $z = y$; $L: x^2 + y^2 = 1$, $z = y$.

Задача 4 (2 балла). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{z}{(z^2 - 2z)^3}$ по степеням $z - 1$ и указать области этих разложений. **Замечания.** 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место

$$\text{представление } \operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^z \frac{dz}{1 + z^2}.$$

Задача 5 (2 балла). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{z}{1+z} e^{-1/z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (2 балла). Вычислить интеграл $\oint_C \frac{e^{iz} \cos z dz}{(z - \pi)^3}$ $C: |z - \pi| = \pi$