

Теория поля и ряды
3-й семестр, РТ1 (2020-21 уч. год)
Модуль 1, рубежный контроль
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы
(3 балла)

1. Дайте определение числового ряда, частичной суммы ряда и сходящегося ряда.
2. Перечислите свойства сходящихся числовых рядов.
3. Дайте определения абсолютной и условной сходимости числового ряда.
4. Сформулируйте теорему о перестановке членов абсолютно сходящегося числового ряда и теорему Римана о перестановке членов условно сходящегося числового ряда.
5. Дайте определение функциональной последовательности и поточечной сходимости.
6. Дайте определение метрики и сходимости функциональной последовательности по метрике.
7. Дайте определение нормы и метрики, согласованной с нормой.
8. Дайте определение сходимости в среднем квадратичном и равномерной сходимости функциональной последовательности.
9. Сформулируйте определение функционального ряда, а также его поточечной, абсолютной, условной и равномерной сходимости.
10. Дайте определение степенного ряда, его центра и радиуса сходимости и напишите формулу Коши-Адамара.
11. Дайте определение ряда Тейлора и напишите формулу его остаточного члена в форме Лагранжа и в форме Коши.
12. Дайте определение ряда Фурье и тригонометрического ряда Фурье.
13. Сформулируйте теорему Дирихле о сходимости тригонометрического ряда Фурье.
14. Дайте определение квадратуемой фигуры на плоскости и площади такой фигуры и перечислите свойства площади.
15. Дайте определение двойного интеграла.
16. Перечислите свойства двойного интеграла.
17. Сформулируйте теорему о площади квадратуемой области в криволинейных координатах и теорему о замене переменных в двойном интеграле.
18. Дайте определение кубуемого тела и множества объема нуля.
19. Дайте определение тройного интеграла.
20. Сформулируйте теорему о представлении тройного интеграла в виде повторного.

Теоретические вопросы
(4 балла)

1. Сформулируйте и докажите необходимый признак сходимости числового ряда и приведите пример, подтверждающий, что этот признак не является достаточным.
2. Сформулируйте критерий Коши сходимости числового ряда и докажите с его помощью, что гармонический ряд расходится.
3. Сформулируйте и докажите признак сравнения и предельный признак сравнения для знакоположительных рядов.
4. Сформулируйте и докажите интегральный признак Коши сходимости числового ряда.
5. Сформулируйте и докажите признак Даламбера сходимости числового ряда.
6. Сформулируйте и докажите радикальный признак Коши сходимости числового ряда.
7. Докажите, что из абсолютной сходимости числового ряда следует его сходимость.
8. Сформулируйте и докажите признак Лейбница для знакочередующихся рядов и следствие из него об оценке остатка ряда.
9. Перечислите свойства равномерной сходимости функциональной последовательности и докажите, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость.
10. Сформулируйте и докажите теорему о равномерной сходимости последовательности непрерывных функций.
11. Сформулируйте и докажите теорему о равномерной сходимости последовательности интегрируемых функций.
12. Сформулируйте и докажите теорему о равномерной сходимости последовательности непрерывно дифференцируемых функций.
13. Дайте определение мажоранты функционального ряда и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
14. Сформулируйте и докажите первую теорему Абеля и следствие из неё.
15. Сформулируйте и докажите теоремы о почленном интегрировании и о почленном дифференцировании степенного ряда.
16. Сформулируйте и докажите теорему о достаточных условиях представимости функции своим рядом Тейлора.
17. Сформулируйте и докажите теорему о неравенстве Бесселя.
18. Сформулируйте и докажите теорему о равенстве Парсеваля.
19. Сформулируйте и докажите теорему о достаточных условиях представимости функции своим тригонометрическим рядом Фурье и следствие из этой теоремы.
20. Сформулируйте и докажите теорему о представлении двойного интеграла в виде повторного и её обобщение для области, правильной в направлении координатной оси.

Примеры задач
(4 балла)

1. Для степенного ряда найдите интервал сходимости и исследуйте ряд в концах интервала сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}.$$

2. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ в ряд по степеням $x + 4$ и укажите интервал сходимости полученного степенного ряда.
3. Разложите функцию $f(x) = e^x$ в ряд по степеням $x + 2$ и укажите интервал сходимости полученного степенного ряда.
4. Измените порядок интегрирования:

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy.$$

5. Вычислите интеграл $\iiint_G z \, dx \, dy \, dz$ по области G , ограниченной плоскостью $z = 0$ и верхней половиной эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
6. Вычислите объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2az$ и $z = 0$.