Теория поля и ряды
3-й семестр, РТ1 (2020-21 уч. год)
Модуль 2, рубежный контроль
Вопросы для подготовки

Теоретические вопросы
(3 балла)

1. Дайте определение криволинейного интеграла первого рода и напишите формулы для его вычисления в случаях, если кривая задана параметрически $x = x(t)$ и $y = y(t)$, с помощью естественной параметризации $x = x(s)$ и $y = y(s)$, как график непрерывной функции $y = y(x)$ и в полярных координатах $r = r(\varphi)$.
2. Дайте определение криволинейного интеграла второго рода по переменной x, по переменной y и общего вида; перечислите свойства криволинейного интеграла второго рода и опишите его связь с криволинейным интегралом первого рода.
3. Дайте определение многосвязной области, напишите формулу Грина для неё и объясните, какое направление обхода границы области считается положительным.
4. Напишите три разные формулы для вычисления площади плоской области через криволинейный интеграл по границе этой области.
5. Напишите формулу Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла и объясните, для каких криволинейных интегралов она применима и как получается функция в правой части этой формулы.
6. Напишите формулу для восстановления функции двух переменных по её полному дифференциалу.
7. Дайте определение поверхностного интеграла первого рода и напишите формулу для его вычисления в криволинейных координатах и формулу для его вычисления в случае явно заданной поверхности $z = f(x, y)$.
8. Дайте определение поверхностного интеграла второго рода и напишите формулу для его вычисления в криволинейных координатах и формулу для его вычисления в случае явно заданной поверхности $z = f(x, y)$.
9. Дайте определение поверхностно односвязной области и сформулируйте теорему об эквивалентных условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве.
10. Дайте определение векторного поля, его векторной линии и напишите дифференциальные уравнения векторной линии.
11. Дайте определения потока и дивергенции векторного поля, перечислите свойства дивергенции и сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса с помощью дивергенции.

12. Дайте определения циркуляции и ротора векторного поля, перечислите свойства ротора и сформулируйте теорему Стокса с помощью ротора.
13. Дайте определение операторов Гамильтона и Лапласа и напишите формулы для градиента, дивергенции, ротора и лапласиана через оператор Гамильтона, а также формулы для $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{grad}\operatorname{div} f$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$ и $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$.
14. Дайте определения потенциального векторного поля и его потенциала, напишите формулу для вычисления потенциала, дайте определение безвихревого векторного поля и опишите его связь с потенциальным.
15. Дайте определения соленоидального векторного поля и его векторного потенциала и сформулируйте необходимые и достаточные условия существования векторного потенциала.
16. Напишите формулы для градиента, дивергенции, ротора и лапласиана в криволинейных координатах.
17. Дайте определение экспоненты, тригонометрических и гиперболических функций комплексной переменной и перечислите свойства этих функций.
18. Дайте определение сопряжённых гармонических функций и напишите формулы для нахождения одной из пары сопряжённых гармонических функций, если известна другая.
19. Дайте определения особой точки, изолированной особой точки и бесконечно удалённой изолированной особой точки функции комплексной переменной.
20. Для изолированной особой точки функции комплексной переменной определите, в каком случае она называется устранимой, полюсом и существенно особой, и напишите вид ряда Лорана в каждом случае.

Теоретические вопросы
(4 балла)

1. Сформулируйте и докажите теорему Грина для односвязной области.
2. Сформулируйте и докажите теорему об эквивалентных условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования на плоскости.
3. Дайте определение гладкой поверхности, односторонней и двусторонней поверхности и покажите, что график дифференцируемой функции является гладкой двусторонней поверхностью.
4. Сформулируйте и докажите теорему Стокса.
5. Дайте определение объёмно односвязной области в пространстве и сформулируйте и докажите теорему Остроградского-Гаусса.
6. Напишите вывод формул для вычисления дивергенции и ротора векторного поля в прямоугольных координатах.

7. Дайте определения гармонического векторного поля и гармонической функции, сформулируйте и докажите теорему о представлении векторного поля в виде суммы потенциального и соленоидального полей.
8. Дайте определение коэффициентов Ламе криволинейной системы координат и напишите вывод их значений для цилиндрических и сферических координат.
9. Напишите вывод формул для $\mathrm{Ln}\, z$ и для $\mathrm{Arcsin}\, z$.
10. Сформулируйте и докажите теорему о необходимых и достаточных условиях дифференцируемости функции комплексной переменной и напишите формулы для производной.
11. Дайте определение интеграла от функции комплексной переменной по кривой и напишите вывод формулы для вычисления этого интеграла через криволинейные интегралы от вещественной и мнимой частей.
12. Сформулируйте и докажите теоремы Коши для аналитической функции в случае односвязной и в случае многосвязной области.
13. Сформулируйте и докажите теорему об интеграле с переменным верхним пределом от аналитической функции и два следствия из этой теоремы.
14. Напишите вывод интегральной формулы Коши.
15. Сформулируйте и докажите теорему о разложении аналитической функции в ряд Тейлора и напишите вывод неравенств Коши для коэффициентов ряда Тейлора.
16. Напишите вывод формулы для ряда Лорана функции комплексной переменной.
17. Дайте определение нуля аналитической функции и сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии нуля.
18. Дайте определения вычета в заданной точке комплексной плоскости, а также в бесконечно удалённой точке и сформулируйте и докажите теоремы о нахождении вычета через коэффициенты ряда Лорана в изолированной особой точке и в бесконечно удалённой точке.
19. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении вычета функции комплексной переменной в полюсе заданного порядка.
20. Сформулируйте и докажите основную теорему теории вычетов (теорему Коши).

Примеры задач
(4 балла)

1. Найдите работу силы $\vec{F} = (x+y)\,\vec{\imath} + 2xy\,\vec{\jmath} - \vec{k}$ при перемещении материальной точки вдоль прямой из точки $A(0,1,0)$ в точку $B(2,2,-1)$.
2. Выясните, является ли выражение $xy^2\,dx + (x^2y - 2)\,dy$ полным дифференциалом и, если да, найдите функцию $F(x,y)$, дифференциалом которой является данное выражение и такую, что $F(0,0) = 1$.
3. Найдите циркуляцию векторного поля $\vec{a} = (x^2+y)\,\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} + yz^2\,\vec{k}$ по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей $x^2+y^2-z^2 = 1$ и $z = \sqrt{3}$, при этом со стороны положительного направления оси Oz обход контура L должен совершаться в положительном направлении.
4. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = xz\,\vec{\imath} + (y+z^2)\,\vec{\jmath} + yz\,\vec{k}$ через часть плоскости $\Sigma:\ y+z=1$, вырезаемую плоскостями $x=0$, $y=0$ и $x=z$, идущий в направлении вектора $\vec{n}(0,1,1)$.
5. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = xz\,\vec{\imath} + (y+z^2)\,\vec{\jmath} + yz\,\vec{k}$ через часть плоскости $\Sigma:\ x+y=1$, вырезаемую плоскостями $x=0$, $z=0$ и $x+z=1$, идущий в направлении вектора $\vec{n}(1,1,0)$.
6. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$, выходящий наружу через границу области, ограниченной поверхностями $x^2+y^2 = z$ и $z = 1$.
7. Выясните, является ли векторное поле $\vec{a} = xy^2\,\vec{\imath} + (x^2y-2)\,\vec{\jmath}$ потенциальным и, если да, найдите его потенциал.
8. Выясните, может ли функция $u(x,y) = 2e^x\cos y$ быть вещественной частью некоторой аналитической функции $f(z)$ и, если да, найдите мнимую часть функции $f(z)$ и саму функцию $f(z)$.
9. Для заданной функции определите характер всех её особых точек, включая бесконечно удалённую точку, и вычислите вычеты в них:
$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^2}\,\sin\frac{i}{z}.$$
10. Вычислите контурный интеграл:
$$\oint_C \frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z-i)^2(z+2i)}\,dz, \qquad C:|z-1| = 3.$$

	Теория			Задачи				
№	1	2	**min**	3	4	5	6	**min**
Баллы	3	4	**4**	4	4	4	4	**10**

Примерный вариант билета

Теория

1. Дайте определение криволинейного интеграла первого рода и напишите формулы для его вычисления в случаях, если кривая задана параметрически $x = x(t)$ и $y = y(t)$, с помощью естественной параметризации $x = x(s)$ и $y = y(s)$, как график непрерывной функции $y = y(x)$ и в полярных координатах $r = r(\varphi)$.
2. Сформулируйте и докажите основную теорему теории вычетов (теорему Коши).

Задачи

3. Найдите работу силы $\vec{F} = (x + y)\,\vec{\imath} + 2xy\,\vec{\jmath} - \vec{k}$ при перемещении материальной точки вдоль прямой из точки $A(0, 1, 0)$ в точку $B(2, 2, -1)$.
4. Найдите поток векторного поля
$$\vec{a} = xz\,\vec{\imath} + (y + z^2)\,\vec{\jmath} + yz\,\vec{k}$$
через часть плоскости $\Sigma:\ y + z = 1$, вырезаемую плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $x = z$, идущий в направлении вектора $\vec{n}(0, 1, 1)$.
5. Для заданной функции определите характер всех её особых точек, включая бесконечно удалённую точку, и вычислите вычеты в них:
$$f(z) = \frac{z^2}{1 + z^2} \sin\frac{i}{z}.$$
6. Вычислите контурный интеграл:
$$\oint_C \frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z - i)^2 (z + 2i)}\,dz, \qquad C: |z - 1| = 3.$$