Теория поля и ряды

Лекция 13

Криволинейный интеграл II рода

Криволинейный интеграл II рода

по переменной x

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i \,.$$

по переменной y

$$\int_{AB} Q(x,y)\,dy = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i)\Delta y_i \,.$$

общего вида

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i\right).$$

Физический смысл

Поле сил на плоскости $\vec{F}\big(P(x,y), Q(x,y)\big)$

Работа силы на фрагменте пути $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_i = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$

Работа силы $\vec{F}$ на криволинейном пути AB на плоскости:

$$A = \int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{AB} (P\dot{x} + Q\dot{y})\,ds =$$

$$= \int_{AB} \vec{F}\,\dot{\vec{r}}\,ds = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,ds.$$

Свойства криволинейного интеграла II рода

1. линейность

2. аддитивность

3. ориентированность

4. независимость от выбора начальной точки на замкнутой кривой

5. интеграл по отрезку, параллельному Ox или Oy

Теорема о существовании криволинейного интеграла II рода

Теорема: $x(t), y(t)$ – непрерывно дифференцируемы и P, Q – непр. $\Rightarrow$

$\exists \int_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big) \cdot y'(t)\Big)\,dt.$

Доказательство: для $|\vec{r}\,'(t)|$ обозначим его min и max на AB через r и R,

тогда $r\Delta t \le \Delta s \le R\Delta t$, поэтому $\max \Delta s_i \to 0 \Leftrightarrow \max \Delta t_i \to 0$;

$P\big(x(t), y(t)\big)$ – непрерывна $\Rightarrow$ равномерно непрерывна,

$\Delta t < \delta \Rightarrow \Delta P < \varepsilon$;

выберем t_i из условия $\Delta x_i = x'(t_i)\Delta t_i$,

для P имеем

$\lim\limits_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i)\Delta x_i = \lim\limits_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^n P\big(x(t_i), y(t_i)\big)x'(t_i)\Delta t_i,$

так как

$\lim\limits_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^n \Big(P(x_i, y_i) - P\big(x(t_i), y(t_i)\big)\Big)\, x'(t_i)\Delta t_i = 0$ $\square$

Формула Грина

Теорема: P, Q – непрерывно дифференцируемы в замкнутой области D, ограниченной кусочно гладким контуром L $\Rightarrow$

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

где L проходится в положит. направлении.

Доказательство: для правильной в направлении Oy области D имеем

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_a^b P\big(x, y_2(x)\big)\,dx - \int_a^b P\big(x, y_1(x)\big)\,dx = -\oint_L P\,dx\,;$$

далее для произвольной области и аналогично для Q $\square$

Пример

Найдём криволинейный интеграл II рода

$$\oint_L x^2\,dx + xy\,dy,$$

где L – треугольник с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ и положительным направлением обхода (против часовой стрелки)

$$\int_{AB} x^2\,dx + xy\,dy + \int_{BC} x^2\,dx + xy\,dy + \int_{CA} x^2\,dx + xy\,dy =$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 y\,dy + \int_1^0 2x^2\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}\,;$$

найдём тот же интеграл по формуле Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{ABC} y\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x y\,dy = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{6}.$$

Формула Грина для многосвязной области

Многосвязной областью на плоскости называется область, граница которой имеет несколько компонент связности.

Формула Грина для многосвязной области D:

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy,$$

где каждая компонента границы ∂D обходится в положительном направлении, т. е. так, чтобы при обходе границы область оставалась слева.

Вычисление площади

Вычисление площади:

$$S = \oint_L x\,dy = -\oint_L y\,dx = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx.$$

Пример: найдём площадь эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t$

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$