Теория поля и ряды
Лекция 14

Независимость от пути в криволинейных интегралах

Независимость от пути криволинейного интеграла II рода

Криволинейный интеграл II рода $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$ называется ***независящим от пути***, если для любой линии, соединяющей точки A и B, значение криволинейного интеграла не меняется.

Для независящего от пути криволинейного интеграла можно корректно определить функцию

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy.$$

Тогда будет верна ***формула Ньютона-Лейбница***:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_1).$$

Условия, эквивалентные независимости от пути

Теорема: $P(x,y), Q(x,y)$ – непрерывно дифференцируемы в односвязной области D $\Rightarrow$ следующие условия эквивалентны:

1) $P\,dx + Q\,dy$ – полный дифференциал;

2) $P'_y = Q'_x$;

3) $\oint_L P\,dx + Q\,dy = 0$;

4) $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути.

Доказательство.

$1 \to 2)$ $P'_y = F''_{xy} = F''_{yx} = Q'_x$;

$2 \to 3)$ формула Грина;

$3 \to 4)$ очевидно;

$4 \to 1)$ $\varphi(\Delta x) = F(x+\Delta x, y) - F(x,y) = \int_x^{x+\Delta x} P(t,y)\,dt \Rightarrow$

$\varphi'(0) = F'_x = P$ и аналогично $F'_y = Q$ $\square$

Вычисление не зависящего от пути криволинейного интеграла

Для не зависящего от пути интеграла:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_1)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2,y)\,dy =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} Q(x_1,y)\,dy + \int_{x_1}^{x_2} P(x,y_2)\,dx.$$

Пример:

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (2x-y)\,dx - x\,dy = \int_0^2 (2x-1)\,dx - \int_1^3 2\,dy = -2.$$

Восстановление функции $F(x, y)$ по её полному дифференциалу

$$F(x,y) = C + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= C + \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy = C \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx.$$

Пример: пусть

$$dF = (2x - y)\,dx - x\,dy,$$

тогда

$$F(x,y) = C + \int_0^x 2x\,dx - \int_0^y x\,dy = C + x^2 - xy,$$

$$\int_{(0,1)}^{(2,3)} (2x - y)\,dx - x\,dy = F(2,3) - F(0,1) = -2.$$

Циклические постоянные

Пусть D – многосвязная область на плоскости с внутренними компонентами границы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Циклической постоянной по компоненте γ_i для независящего от пути криволинейного интеграла $\int P\,dx + Q\,dy$ называется значение этого интеграла по замкнутой линии, расположенной в области D параллельно γ_i:

$$\sigma_i = \oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy.$$

Тогда для замкнутой линии L, совершающей k_i оборотов вдоль γ_i:

$$\oint_{L} P\,dx + Q\,dy = \sum_{i=1}^{n} k_i \sigma_i.$$