Теория поля и ряды
Лекция 15

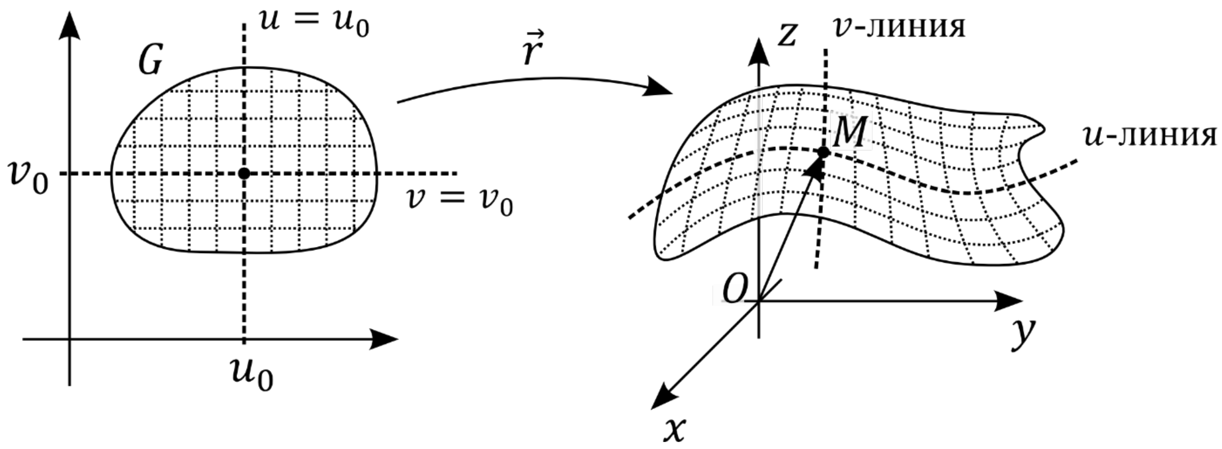
Поверхностный интеграл I рода

Поверхность в пространстве

Поверхностью в пространстве $\mathbb{R}^3$ называется образ некоторой области D на плоскости при непрерывном отображении $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, которое называется ***параметризацией*** поверхности.

Векторнозначная функция $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ может быть записана в виде трёх вещественных ***координатных функций***:

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v). \end{cases}$$



Если $(u, v) \xrightarrow{\vec{r}} M$, то числа u и v называются ***криволинейными координатами*** точки M.

u-линией на поверхности называется множество точек, имеющих одинаковую координату $v = v_0$.

Аналогично, ***v-линия*** задаётся уравнением вида $u = u_0$.

Явное и неявное задание поверхности

Явным заданием поверхности называется задание её как графика непрерывной функции $z = f(x, y)$.

Неявным заданием поверхности называется задание её как множества точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$.

Пример: уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ неявно задаёт сферу,

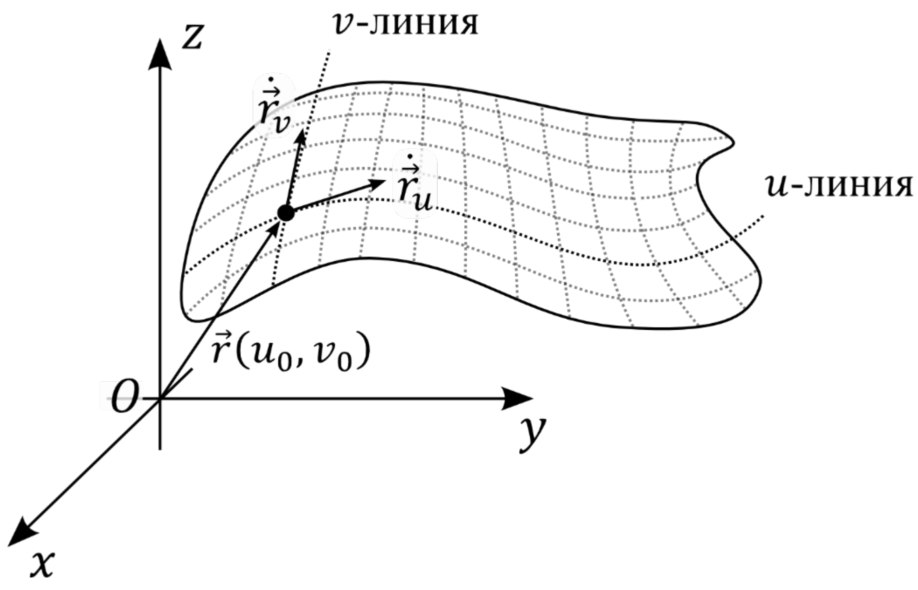
уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не задаёт никакую поверхность в $\mathbb{R}^3$.

Поверхность называется ***замкнутой***, если она является границей некоторой области (открытого связного множества точек) в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Поверхность называется ***простой***, если для неё существует инъективная параметризация $\vec{r}(u, v)$. Последнее означает, что не существует двух разных упорядоченных пар (u, v) и (u', v') таких, что $\vec{r}(u, v) = \vec{r}(u', v')$.

Гладкая поверхность

Поверхность называется ***гладкой***, если существует её параметризация $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, координатные функции которой являются непрерывно дифференцируемыми и векторы частных производных $\vec{r}_u' = (x_u', y_u', z_u')$ и $\vec{r}_v' = (x_v', y_v', z_v')$ неколлинеарны ни в одной точке поверхности.



Векторы $\vec{r}_u'$ и $\vec{r}_v'$ являются касательными векторами к u-линии и v-линии соответственно. Вектор нормали $\vec{n} = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$.

Пример: график непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ является гладкой поверхностью, так как

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u, v),$$

$$\vec{r}_u' = (1, 0, f_u') \nparallel \vec{r}_v' = (0, 1, f_v').$$

Односторонние и двусторонние поверхности

Единичный вектор нормали $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|}$ является функцией от (u, v).

Поверхность называется ***двусторонней (ориентируемой)***, если на ней можно задать единичный вектор нормали, непрерывно зависящий от точки. В противном случае поверхность называется ***односторонней (неориентируемой)***.

Пример: график непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ является двусторонней поверхностью, так как

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u, v),$$

$$\vec{r}_u' = (1, 0, f_u'), \qquad \vec{r}_v' = (0, 1, f_v'), \qquad \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u' \\ 0 & 1 & f_v' \end{vmatrix} = (-f_u', -f_v', 1),$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'}{|\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|} = \frac{-f_u'\,\vec{\imath} - f_v'\,\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{1 + (f_u')^2 + (f_v')^2}}$$ – непрерывная функция.

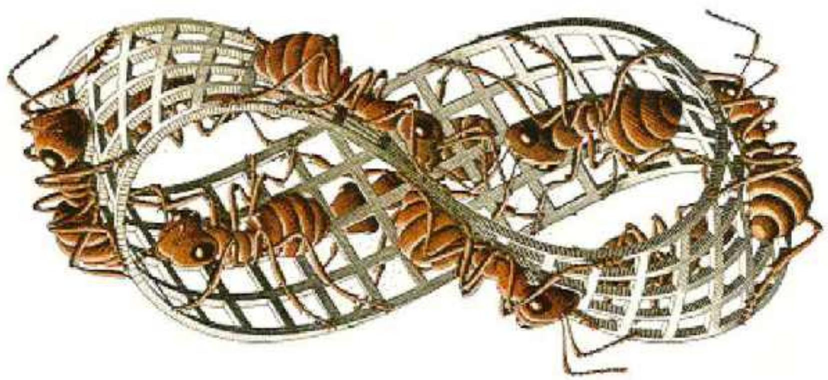
Односторонние и двусторонние поверхности

Пример: поверхность, заданная неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемая функция и $\mathrm{grad}\, F\,(x, y, z) \neq 0$ ни в одной точке поверхности, является двусторонней, так как

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{grad}\, F}{|\mathrm{grad}\, F|} = \frac{F'_x\,\vec{i} + F'_y\,\vec{j} + F'_z\,\vec{k}}{\sqrt{(F'_x)^2 + \left(F'_y\right)^2 + (F'_z)^2}}$$ – непрерывная функция.

Пример: сфера $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ является двусторонней поверхностью, так как $\mathrm{grad}\, F = (2x, 2y, 2z) \neq 0$.

Пример: лента Мёбиуса является односторонней поверхностью.



Площадь поверхности в криволинейных координатах

Пусть D – квадрируемая область на плоскости и параметризация

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \qquad \text{где } (u, v) \in D,$$

определяет гладкую, двустороннюю, ограниченную кусочно гладким контуром поверхность Φ. Выберем разбиение $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$ и точки $(u_i, v_i) \in D_i$, $i \in \overline{1, n}$, причём разбиение настолько малое, чтобы проекции D_i^* частичных областей Φ_i на касательные плоскости в точках (u_i, v_i) были взаимно однозначными. В прямоугольных координатах $\xi\eta\zeta$, связанных с касательной плоскостью в точке (u_i, v_i), для параметризации $\vec{r}(u, v) = \big(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)\big)$ имеем

$$\zeta'_u = \zeta'_v = 0 \quad \text{и} \quad \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \xi'_u & \xi'_v \\ \eta'_u & \eta'_v \end{vmatrix} \vec{k}.$$

$$S(D_i^*) = \iint_{D_i^*} d\xi\, d\eta = \iint_{D_i} |J(u, v)|\, du\, dv \approx |J(u_i, v_i)| \cdot S(D_i) =$$

$$= |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|(u_i, v_i) \cdot S(D_i).$$

Площадь поверхности в криволинейных координатах

Определим ***площадь*** гладкой, двусторонней, ограниченной кусочно гладким контуром поверхности Φ как

$$S(\Phi) = \iint_D |\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|\, du\, dv.$$

$$|\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|^2 = |\vec{r}_u{}'|^2 \cdot |\vec{r}_v{}'|^2 \cdot \sin^2 \angle(\vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}') =$$
$$= |\vec{r}_u{}'|^2 \cdot |\vec{r}_v{}'|^2 - |\vec{r}_u{}'|^2 \cdot |\vec{r}_v{}'|^2 \cdot \cos^2 \angle(\vec{r}_u{}', \vec{r}_v{}') = (\vec{r}_u{}')^2 \cdot (\vec{r}_v{}')^2 - (\vec{r}_u{}' \cdot \vec{r}_v{}')^2.$$

Обозначим $E = (\vec{r}_u{}')^2$, $F = \vec{r}_u{}' \cdot \vec{r}_v{}'$, $G = (\vec{r}_v{}')^2$.

Тогда

$$|\vec{r}_u{}' \times \vec{r}_v{}'|^2 = EG - F^2,$$

$$S(\Phi) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \qquad dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Площадь явно заданной поверхности

Для явно заданной поверхности $z = f(x, y)$ имеем

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = f(u, v),$$

$$\vec{r}_u' = (1, 0, f_u'), \qquad \vec{r}_v' = (0, 1, f_v'),$$

$$E = (\vec{r}_u')^2 = 1 + (f_x')^2, \qquad F = \vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v' = f_x' f_y', \qquad G = (\vec{r}_v')^2 = 1 + \left(f_y'\right)^2,$$

$$EG - F^2 = 1 + (f_x')^2 + \left(f_y'\right)^2,$$

$$S(\Phi) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint_D \sqrt{1 + (f_x')^2 + \left(f_y'\right)^2}\, dx\, dy.$$

Пример: найдём площадь части параболоида $z = xy$, вырезаемую цилиндром $x^2 + y^2 = 8$

$$S = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{8}} r\sqrt{1 + r^2}\, dr = 2\pi \int_1^9 \frac{\sqrt{t}}{2}\, dt =$$

$$= \frac{52\pi}{3}.$$

Поверхностный интеграл I рода

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена на гладкой, двусторонней, ограниченной кусочно гладким контуром поверхности Φ.

Рассмотрим разбиение $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \ldots \cup \Phi_n$ на частичные гладкие поверхности и выберем точки $(x_i, y_i, z_i) \in \Phi_i$, $i \in \overline{1, n}$.

Диаметром разбиения будем называть максимальный диаметр частичной поверхности, а ***диаметром частичной поверхности*** – точную верхнюю грань расстояний между двумя точками поверхности.

Поверхностным интегралом I рода от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Φ называется предел интегральных сумм вида $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot S(\Phi_i)$ при стремлении диаметра разбиения к нулю при условии, что этот предел не зависит от выбора последовательности разбиений с диаметром, стремящимся к нулю, и точек (x_i, y_i, z_i) внутри частичных поверхностей:

$$\int_{\Phi} f(x, y, z)\, dS = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot S(\Phi_i)\,.$$

Свойства поверхностного интеграла I рода

Теорема: поверхность Φ гладкая и $f(x, y, z)$ – непрерывна $\Rightarrow$

$$\exists \int_{\Phi} f(x, y, z)\, dS = \iint_{D} f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Для явно заданной поверхности $z = z(x, y)$ имеем:

$$\int_{\Phi} f(x, y, z)\, dS = \iint_{D} f\big(x, y, z(x, y)\big) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}\, dx\, dy.$$

Теорема о среднем: f – непрерывна на гладкой поверхности Φ $\Rightarrow$

$$\exists (x_0, y_0, z_0) \in \Phi, \qquad \int_{\Phi} f(x, y, z)\, dS = f(x_0, y_0, z_0) \cdot S(\Phi).$$