

Теория поля и ряды

Лекция 16

Поверхностный
интеграл II рода

Поверхностный интеграл II рода

Задать **ориентацию** двусторонней поверхности Φ означает выбрать непр. функцию единичного вектора нормали $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Поверхностным интегралом II рода через поверхность Φ в направлении вектора нормали $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ называется поверхностный интеграл I рода следующего вида:

$$\int_{\Phi} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

Здесь для проекции D_i частич. поверхности Φ_i на плоскость Oxy имеем $|\cos \gamma| \cdot S(\Phi_i) \approx S(D_i) \Rightarrow \iint_{\Phi} R \cos \gamma dS = \pm \iint_D R dx dy = \iint_{\Phi} R dx dy$.

$$\int_{\Phi} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_{\Phi} P dy dz + Q dx dz + R dx dy,$$

где в последней записи необходимо дополнительно указывать, в каком направлении через поверхность Φ берётся интеграл.

Физический смысл поверхностного интеграла II рода и его запись в криволинейных координатах

Объём жидкости, протекающей через поверхность Φ в направлении единичного вектора нормали $\vec{n}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ со скоростью $\vec{v}(P, Q, R)$ в единицу времени:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS &= \int_{\Phi} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \\ &= \iint_D \vec{v} \cdot \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv. \end{aligned}$$

Вычисление поверхностного интеграла II рода через явно заданную поверхность

Для верхней части графика функции $z = f(x, y)$ выберем параметризацию $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, тогда вектор нормали $\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = (-f'_x, -f'_y, 1)$ направлен вверх и

$$\begin{aligned} \int_{\Phi} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS &= \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} dx dy = \\ &= \iint_D \left(-P(x, y, f(x, y)) \cdot f'_x(x, y) - Q(x, y, f(x, y)) \cdot f'_y(x, y) + R(x, y, f(x, y)) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Пример: найдём $\iint_{\Phi} dy dz - z dx dy$ по нижней части конуса $z^2 = x^2 + y^2$ между $z = 0$ и $z = 1$,

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} dy dz - z dx dy &= - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\cos \varphi + r) r dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \varphi}{2} + \frac{1}{3} \right) d\varphi = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Свойства поверхностного интеграла II рода

1. линейность:

$$\int_{\Phi} (a_1 R_1 + a_2 R_2) \cos \gamma \, dS = a_1 \int_{\Phi} R_1 \cos \gamma \, dS + a_2 \int_{\Phi} R_2 \cos \gamma \, dS ;$$

2. аддитивность:

если поверхность Φ кусочно гладкой линией разрезана на Φ_1 и Φ_2 , то

$$\int_{\Phi} R \cos \gamma \, dS = \int_{\Phi_1} R \cos \gamma \, dS + \int_{\Phi_2} R \cos \gamma \, dS ;$$

3. ориентированность: интеграл через ту же поверхность в противоположном направлении имеет противоположный знак

$$\int_{\Phi} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = - \int_{\Phi} \vec{v} \cdot (-\vec{n}) \, dS ;$$

4. если Φ – цилиндрич. поверхность с образующими, параллел. Oz , то

$$\int_{\Phi} R \cos \gamma \, dS = \iint_{\Phi} R \, dx \, dy = 0.$$

Теорема Стокса

Положительное направление обхода контура L на ориентированной поверхности Φ задаётся вектором $\vec{n} \times \vec{\tau}$, где \vec{n} – нормаль к Φ , а $\vec{\tau}$ – вектор, касательный к Φ , ортогональный L и направленный наружу области, ограниченную L на Φ .

Теорема (Стокса): если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемы, L – гладкий контур на ориентированной поверхности Φ , то

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \\ = \iint_{\Phi} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где L проходится в положительном направлении.

Доказательство: для слагаемых с буквой P

$$\oint_L P dx = \oint_C P x'_u du + P x'_v dv = [\text{по теореме Грина}] = \iint_D ((P x'_v)'_u - \\ (P x'_u)'_v) du dv = \iint_D \begin{vmatrix} 0 & P'_z & -P'_y \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du dv = \iint_{\Phi} (P'_z dx dz - P'_y dx dy) \quad \square$$

Пример на формулу Стокса

Пример: найдём $\oint_L y dx + z^2 dy + x^2 dz$ по окружности L , вырезаемой плоскостью $z = \sqrt{3}$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sqrt{3},$$

$$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt, \quad dz = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 3 \cos t) dt = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1 - \cos 2t}{2} + 3 \cos t \right) dt = -\pi;$$

по формуле Стокса: рассмотрим круг на плоскости $z = \sqrt{3}$ радиуса 1

$$P = y, \quad Q = z^2, \quad R = x^2,$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Phi} (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dx dz + (Q'_x - P'_y) dx dy = \\ & = - \iint_{\Phi} 2z dy dz + 2x dx dz + dx dy = - \iint_{\Phi} dx dy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = -\pi. \end{aligned}$$

Кривая в пространстве

Линией (кривой) в пространстве \mathbb{R}^3 называется образ некоторого промежутка на прямой при непрерывном отображении $\vec{r} = \vec{r}(t)$, которое называется **параметризацией** линии.

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Криволинейным интегралом II рода общего вида по пространственной кривой AB называется

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i) \Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i) \Delta z_i). \end{aligned}$$

Для естеств. параметризации $\vec{r}(s)$ обозначим $\vec{r}'(s) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ и получим связь с криволинейным интегралом I рода:

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds.$$

Независимость от пути интегрирования

Область G в пространстве называется **поверхностно односвязной**, если любой контур, целиком лежащий в G , является границей некоторой поверхности, целиком лежащей в G .

Теорема: если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемы в поверхностно односвязной области D , то следующие условия эквивалентны:

- 1) $P dx + Q dy + R dz$ – полный дифференциал;
- 2) $P'_y = Q'_x$, $P'_z = R'_x$, $Q'_z = R'_y$;
- 3) $\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0$;
- 4) $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$ не зависит от пути.

Доказательство: аналогично плоскому случаю, только вместо формулы Грина используется формула Стокса \square

Теорема Остроградского-Гаусса

Область G в пространстве \mathbb{R}^3 называется **объёмно односвязной**, если для любой замкнутой поверхности, целиком лежащей в G , ограничиваемая ею область также целиком лежит в G .

Теорема (Остроградского-Гаусса): если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – непрерывно дифференцируемы в объёмно односвязной замкнутой области G , ограниченной кусочно гладкой поверхностью Φ , то

$$\oiint_{\Phi} P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy = \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz,$$

где поверх. интеграл берётся в направлении вектора внешней нормали.

Доказательство: для правильной в направлении Oz области G имеем

$$\begin{aligned} \iiint_G R'_z \, dx \, dy \, dz &= \iint_{D_{xy}} dx \, dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} R'_z \, dz = \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, \varphi_2(x, y)) \, dx \, dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, \varphi_1(x, y)) \, dx \, dy = \oiint_{\Phi} R \, dx \, dy; \end{aligned}$$

далее для произвольной области и аналогично для P и Q \square

Пример на формулу Остроградского-Гаусса

Пример: найдём $\oiint_{\Phi} x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy$ по внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

для $\vec{v} = (x, y, z)$ имеем

$$\oiint_{\Phi} P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy = \int_{\Phi} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = a \int_{\Phi} dS = 4\pi a^3;$$

по формуле Остроградского-Гаусса

$$P = x, \quad Q = y, \quad R = z,$$

$$\iiint_G (P'_x + Q'_y + R'_z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} 3 \, dx \, dy \, dz = 4\pi a^3.$$