Теория поля и ряды

Лекция 17

Скалярные и векторные поля, дивергенция

Скалярное поле

Скалярным полем, заданным на области D на плоскости (в пространстве), называется функция $u(M)$, которая каждой точке M области D ставит в соответствие некоторое число.

Примеры:

- поле плотности,
- поле температуры,
- поле гравитационного потенциала $U(r) = \frac{Gm_0}{r}$.

В прямоугольных координатах $Oxyz$ скалярное поле на плоскости (в пространстве) задаётся как вещественная функция двух (трёх) переменных: $u(x, y)$ или $u(x, y, z)$.

Линией уровня скалярного поля на плоскости называется множество точек, удовлетворяющих уравнению $u(x, y) = const$.

Поверхностью уровня скалярного поля в пространстве называется множество точек, удовлетворяющих уравнению $u(x, y, z) = const$.

Градиент скалярного поля

Градиентом скалярного поля $u(x, y, z)$ называется вектор частных производных:

$$\operatorname{grad} u(x, y, z) = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right).$$

Свойства градиента:

1. градиент указывает направление и величину наибольшей скорости роста,
2. градиент перпендикулярен линии (поверхности) уровня,
3. линейность: $\operatorname{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha \operatorname{grad} u + \beta \operatorname{grad} v$,
4. $\operatorname{grad} uv = u \cdot \operatorname{grad} v + v \cdot \operatorname{grad} u$.

Пример: в единичном квадрате $[0; 1]^2$ поле температур

$$T(x, y) = T_0 + (T_1 - T_0)xy, \qquad \operatorname{grad} T = \left((T_1 - T_0)y, (T_1 - T_0)x\right)$$

градиент указывает направление потока теплоты,

линии уровня – изотермы.

Типы скалярных полей

- стационарное и нестационарное
- однородное (const) и неоднородное
- одномерное (в прямоугольной системе координат зависит только от одной координаты) и двумерное (плоское)
- осевое (зависит только от r в цилиндрических координатах)
- осесимметричное (зависит от r и z в цилиндрических координатах)
- центральное (зависит только от r в сферических координатах)

Векторное поле

Векторным полем, заданным на области D на плоскости (в пространстве), называется функция $\vec{a}(M)$, которая каждой точке M области D ставит в соответствие некоторый вектор на плоскости (в пространстве).

Примеры:

- поле скоростей,
- силовое поле,
- поле градиента скалярного поля $\operatorname{grad} u(x, y, z)$.

В прямоугольных координатах векторное поле на плоскости задаётся как две координатные вещественные функции двух переменных:

$$\vec{a} = \big(a_1(x, y), a_2(x, y)\big),$$

аналогично, в пространстве – три функции трёх переменных:

$$\vec{a} = \big(a_1(x, y, z), a_2(x, y, z), a_3(x, y, z)\big).$$

Векторные линии и векторные поверхности

Гладкая линия L называется ***векторной линией*** (***линией тока***) векторного поля $\vec{a}$, если касательная к линии L в каждой точке $M \in L$ параллельна вектору векторного поля в этой точке $\vec{a}(M)$.

Гладкая линия L называется ***трансверсальной*** векторному полю $\vec{a}$, если касательная к линии L ни в одной точке $M \in L$ не параллельна вектору векторного поля в этой точке $\vec{a}(M)$.

Для векторной линии с параметризацией $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ и векторного поля $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ имеем $\vec{r}\,'\big(t(M)\big) \parallel \vec{a}(M)$, поэтому

$$\frac{x'(t)}{a_1} = \frac{y'(t)}{a_2} = \frac{z'(t)}{a_3}, \qquad \frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3}.$$

Векторной поверхностью векторного поля называется множество всех векторных линий, проходящих через точки некоторой трансверсальной к векторному полю кривой.

Векторной трубкой векторного поля называется векторная поверхность, построенная по простому контуру (замкнутой линии).

Поле скоростей вращающегося твёрдого тела

Пример: поле скоростей вращающегося вокруг оси Oz твёрдого тела

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\Omega y, \Omega x, 0),$$

найдём векторные линии

$$\frac{dx}{-\Omega y} = \frac{dy}{\Omega x} = \frac{dz}{0},$$

$$\int x\,dx = -\int y\,dy, \qquad dz = 0,$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + const, \qquad z = const,$$

$$x^2 + y^2 = C_1, \qquad z = C_2.$$

Типы векторных полей

- стационарное и нестационарное
- однородное и неоднородное
- одномерное и двумерное
- плоское: $\vec{a} = a_1(x,y)\,\vec{i} + a_2(x,y)\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$
- плоскопараллельное – двумерное, не являющееся плоским:
$$\vec{a} = a_1(x,y)\,\vec{i} + a_2(x,y)\,\vec{j} + a_3(x,y)\,\vec{k}$$
- осевое (цилиндрич.) – зависит от r в цилиндрических координатах:
$$\vec{a} = f(r)\,\vec{r}$$
- осесимметричное – зависит от r и z в цилиндрических координатах:
$$\vec{a} = a_1(r,z)\,\vec{r} + a_2(r,z)\,\vec{z}$$
- центральное (сферическое) – зависит от r в сферич. координатах:
$$\vec{a} = f(r)\,\vec{r}$$

Поток векторного поля через поверхность

Потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через поверхность S в направлении единичного вектора нормали $\vec{n}$ к поверхности S называется следующий поверхностный интеграл:

$$Q_S = \int_S \vec{a}(M) \cdot \vec{n}(M)\, dS.$$

Поток через векторную поверхность равен нулю.

Физический смысл потока: объёмный расход вещества через поверхность.

Дивергенция

Дивергенцией векторного поля в точке M называется предел отношения потока через замкнутую поверхность S, охватывающую точку M, к объёму V области, ограниченной поверхностью S, при стягивании поверхности S к точке M:

$$\operatorname{div}\vec{a}\,(M) = \lim_{S\to M}\frac{1}{V}\oint_S \vec{a}\,\vec{n}\,dS.$$

Физический смысл дивергенции: источники и стоки векторного поля.

Для непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат

$$\operatorname{div}\vec{a}\,(M) = [\text{по теореме Остроградского-Гаусса}] =$$

$$= \lim_{V\to M}\frac{1}{V}\int_V\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{\partial a_2}{\partial y}+\frac{\partial a_3}{\partial z}\right)dV = [\text{по теореме о среднем}] =$$

$$= \lim_{V\to M}\frac{1}{V}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}(M_0)+\frac{\partial a_2}{\partial y}(M_0)+\frac{\partial a_3}{\partial z}(M_0)\right)V = \frac{\partial a_1}{\partial x}(M)+\frac{\partial a_2}{\partial y}(M)+\frac{\partial a_3}{\partial z}(M).$$

Свойства дивергенции и теорема Остроградского-Гаусса

Свойства дивергенции:

1. линейность: $\operatorname{div}\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)=\alpha\operatorname{div}\vec{a}+\beta\operatorname{div}\vec{b}$,
2. $\operatorname{div}(f\vec{a})=f\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\operatorname{grad}f$.

   Доказательство:

$$\operatorname{div}(f\vec{a})=(fa_1)'_x+(fa_2)'_y+(fa_3)'_z=f(a_1)'_x+f(a_2)'_y+f(a_3)'_z+$$
$$+a_1f'_x+a_2f'_y+a_3f'_z=f\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\operatorname{grad}f\quad\square$$

Теорема (Остроградского-Гаусса): для векторного поля $\vec{a}(M)$, непрерывно дифференцируемого в объёмно односвязной замкнутой области V, ограниченной кусочно гладкой поверхностью S,

$$\oint_S \vec{a}\,\vec{n}\,dS=\int_V \operatorname{div}\vec{a}\,dV.$$

Примеры

Пример: для поля скоростей $\vec{v} = (-\Omega y, \Omega x, 0)$ имеем $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Пример: для центрального силового поля тяготения

$$\vec{a} = \frac{Gm_0}{r^3}\,\vec{r}$$

найдём дивергенцию в точке с радиус-вектором $\vec{r} \neq \vec{0}$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{Gm_0}{r^3}\operatorname{div} \vec{r} + \vec{r}\operatorname{grad}\frac{Gm_0}{r^3},$$

$$\vec{r} = (x, y, z), \qquad \operatorname{div} \vec{r} = (x)'_x + (y)'_y + (z)'_z = 3,$$

$$\operatorname{grad}\frac{Gm_0}{r^3} = \operatorname{grad}\frac{Gm_0}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-3Gm_0}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,\vec{r},$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{3Gm_0}{r^3} - \frac{3Gm_0}{r^3} = 0.$$