Теория поля и ряды

Лекция 18

# Ротор и оператор Гамильтона

# Линейный интеграл векторного поля

***Линейным интегралом*** векторного поля $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ вдоль гладкой линии $L$ в пространстве называется криволинейный интеграл:

$$\int_L \vec{a}\,\vec{t}\,ds = \int_L \vec{a}\,d\vec{r} = \int_L a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz,$$

где $\vec{t}$ – единичный вектор касательной к кривой $\vec{t} = \vec{r}\,'(s)$.

**Физический смысл**: для силового поля линейный интеграл равен работе.

## Циркуляция векторного поля

***Циркуляцией*** векторного поля $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ вдоль контура $L$ называется линейный интеграл вдоль этого контура:

$$\Gamma_L = \oint_L a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz.$$

**Пример**: для поля скоростей вращающегося вокруг $Oz$ твёрдого тела

$$\vec{v} = \overrightarrow{\Omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\Omega y, \Omega x, 0),$$

найдём циркуляцию вдоль окружности радиуса $R$, перпендикулярной оси вращения: $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = z_0,\ t \in [0; 2\pi]$;

$$\Gamma_L = \oint_L -\Omega y\, dx + \Omega x\, dy = \Omega \int_0^{2\pi} (R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t)\, dt = 2\Omega\pi R^2.$$

Отношение циркуляции к площади круга $\pi R^2$ постоянно и равно $2\Omega$.

# Завихрённость векторного поля

***Завихрённостью*** векторного поля $\vec{a}$ в точке $M$ в направлении вектора $\vec{n}$ называется

$$\omega_n(M) = \lim_{L \to M} \frac{1}{S} \oint_L \vec{a}\, d\vec{r},$$

где $L$ – простой контур, ограничивающий плоскую область, которая перпендикулярна $\vec{n}$, имеет площадь $S$ и содержит точку $M$.

**Физический смысл**: если векторное поле $\vec{a}$ рассматривать как поле скоростей частиц жидкости, вращающей маленькую турбинку с осью в направлении вектора $\vec{n}$, то завихрённость определяет угловую скорость турбинки.

**Пример**: для поля скоростей $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ завихрённость в точках оси вращения в направлении $\vec{\Omega}$ равна $2\Omega$.

# Ротор векторного поля

***Ротором*** (***вихрём***) векторного поля называется вектор, координаты которого в декартовой системе координат равны завихрённостям в направлениях базисных векторов: $\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \big(\omega_i(M), \omega_j(M), \omega_k(M)\big)$.

Для непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат

$$\omega_i(M) = [\text{по теореме Стокса}] = \lim_{S\to M} \frac{1}{S} \iint_S \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right) dy\, dz =$$

$$= [\text{по теореме о среднем}] = \lim_{S\to M} \frac{1}{S} \left(\frac{\partial a_3}{\partial y}(M_0) - \frac{\partial a_2}{\partial z}(M_0)\right) S = \frac{\partial a_3}{\partial y}(M) - \frac{\partial a_2}{\partial z}(M),$$

$$\omega_j(M) = \frac{\partial a_1}{\partial z}(M) - \frac{\partial a_3}{\partial x}(M), \qquad \omega_k(M) = \frac{\partial a_2}{\partial x}(M) - \frac{\partial a_1}{\partial y}(M).$$

Для запоминания удобно использовать следующую запись:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

# Свойства ротора и теорема Стокса

**Свойства ротора**:

1. линейность: $\operatorname{rot}\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) = \alpha \operatorname{rot}\vec{a} + \beta \operatorname{rot}\vec{b}$,
2. $\operatorname{rot}(f\vec{a}) = f \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a} \times \operatorname{grad} f$.

   **Доказательство**:

$$\operatorname{rot}(f\vec{a}) = \left((fa_3)'_y - (fa_2)'_z\right)\vec{\imath} + ((fa_1)'_z - (fa_3)'_x)\,\vec{\jmath} + \left((fa_2)'_x - (fa_1)'_y\right)\vec{k} =$$

$$= f\left((a_3)'_y - (a_2)'_z\right)\vec{\imath} + f((a_1)'_z - (a_3)'_x)\,\vec{\jmath} + f\left((a_2)'_x - (a_1)'_y\right)\vec{k} +$$

$$-\left(a_2 f'_z - a_3 f'_y\right)\vec{\imath} + (a_3 f'_x - a_1 f'_z)\,\vec{\jmath} + \left(a_1 f'_y - a_2 f'_x\right)\vec{k} = f \operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a} \times \operatorname{grad} f \quad \square$$

**Теорема (Стокса)**: для векторного поля $\vec{a}$, непрерывно дифференцируемого в области, содержащей кусочно гладкую поверхность $S$, ограниченную кусочно гладким контуром $L$,

$$\oint_L \vec{a}\, d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot}\vec{a}\ \vec{n}\, dS.$$

## Примеры

**Пример**: для поля скоростей $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, где $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$, имеем

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\Omega_2 z - \Omega_3 y,\ \ \Omega_3 x - \Omega_1 z,\ \ \Omega_1 y - \Omega_2 x),$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \Omega_2 z - \Omega_3 y & \Omega_3 x - \Omega_1 z & \Omega_1 y - \Omega_2 x \end{vmatrix} = (2\Omega_1, 2\Omega_2, 2\Omega_3) = 2\vec{\Omega}.$$

**Пример**: для центрального поля $\vec{a} = f(r)\,\vec{r}$ имеем

$$\operatorname{rot} \vec{a} = f \operatorname{rot} \vec{r} - \vec{r} \times \operatorname{grad} f, \qquad \operatorname{rot} \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad r'_x = \frac{x}{r}, \qquad r'_y = \frac{y}{r}, \qquad r'_z = \frac{z}{r},$$

$$\operatorname{grad} f(r) = \left(f' r'_x, f' r'_y, f' r'_z\right) = \frac{f'(r)}{r}\,(x, y, z) = \frac{f'(r)}{r}\,\vec{r}, \qquad \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}.$$

# Оператор Гамильтона

***Оператором Гамильтона*** (***оператором «набла»***) называется символический векторный дифференциальный оператор

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}, \ \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Градиент, дивергенцию и ротор можно формально записать как применение к оператору Гамильтона, скалярному полю $f$ и векторному полю $\vec{a}$ операций векторной алгебры:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}, \ \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y}, \ \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \operatorname{grad} f,$$

$$\nabla \cdot \vec{a} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}, \ \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (a_1, a_2, a_3) = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a},$$

$$\nabla \times \vec{a} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}, \ \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{a}.$$

# Лапласиан и дифференциальные операции второго порядка

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \nabla(\nabla f) = \nabla^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \nabla\times(\nabla f) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

***Оператором Лапласа*** (***лапласианом***) называется скалярный дифференциальный оператор второго порядка

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \Delta f, \qquad \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \end{vmatrix} = 0,$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}),$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = \nabla\,(\nabla\cdot\vec{a}) - \vec{a}\,(\nabla\cdot\nabla) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a},$$

где $\Delta\vec{a} = (\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3)$.